高次収束する代数方程式の全根同時反復解法†

櫻井鉄也†† 鳥居達生†† 杉浦洋††

代数方程式 $f(z)=0$ の全根を同時に求めるための，高次収束する反復公式を提案する．本方法は，$f(z)$ の各近似根上でそれぞれ m 階導関数値まで用いて，単根に対しては $2m+1$ 次，重根に対しても多重度にかかわらず m 次収束する．そのため従来の同時反復法と比べて，多項式が重根を含む場合にとくに反復回数が減少する．また多項式が単根のみを持つ場合でも，根の集団から少しはなれるとそれは重根のように見えるが，このようなときでも反復回数はほとんど変わらない．この算法では容易に収束次数の異なる反復公式が得られるため，要求精度に応じて反復法の収束次数を変えることが可能である．

1. はじめに

n 次の代数方程式 $f(z)=0$ に対して，n 個の近似根を用いて全根を同時に求める反復公式としてよく知られているものに，Durand-Kerner 法[1]（2次収束），Aberth 法[2]（3次収束）がある．これらは $f(z)=0$ の1つの根を求める反復法である，Newton 法と Halley 法の反復公式において，それぞれ $f'(z)$, $f''(z)$ を近似根を用いた式によって置き換えることで得られる．

Farmer と Loizou[3] は Kiss 法[4]にこれを適用することで，4次と5次の公式を導いている．Nourein[5] は1根を求める反復公式として，Padé 近似を用いることで Newton 法，Halley 法，Kiss 法を含む任意の収束次数の反復公式を示している．Farmer らの方法をこれに適用すれば，任意の次数の同時反復公式が得られることになるが，この計算はかなり複雑である．またこの公式では，近似根どうしが同じ根に収束してしまう現象が五十嵐[6]によって報告されている．

一方，Nourein[7] は Aberth 法において，ある近似根に対して新しい近似根を求めるときに，他の近似根はあらかじめ Newton 法によって改良したものを用いることで，4次の公式を導いている（例えば野寺[8]）．

これらの方法はいずれも重根に対しては，線形収束である．重根に対して Durand-Kerner 法は，近似根の重心は1次より速く収束する性質を持つことを山本ら[9]が示した．田辺[10]は同様の性質を持つ3次の公式を示し，そのふるまいを解析した．また都田[11]はこれらの方法の重心収束性を利用して，同じ重根に集まった近似根を判定してグループ化することで，重根に対する収束を速めている．

我々はまず，各近似根上での m 次 Taylor 多項式の係数を用いて，単根に対して $m+2$ 次収束する全根同時反復公式を示す（アルゴリズムA）．これは $m=1$ のとき Aberth 法に一致する．さらに，Nourein が Newton 法を用いて Aberth 法から4次収束する公式を導いたのと同様に，あらかじめ近似根を高次の反復法によって改良してから用いることで，同じ Taylor 多項式の係数を用いて，$2m+1$ 次収束する反復公式が得られることを示す（アルゴリズム A′）．

あらかじめ近似根を改良する公式には，櫻井，鳥居，杉浦の方法[12]を用いる．この方法は多重根に対しても収束次数の落ちない方法であるので，アルゴリズム A′ の全根同時反復公式は，重根に対しては多重度にかかわらずm次収束する性質を持つ．これらの収束次数について2章で述べる．

$f(z)$ が単根のみを持つ場合でも，根の集団からはなれるとそれは多重根があるように見え，重根に対して遅い方法ではなかなか収束しない．我々の方法はこのようなときでもすぐに根に近づくため，Aberth の初期値[13]のように根からはなれた初期値をとってもそれほど反復回数は変わらない．

Padé 近似式の分子を求める算法は，文献 12) に示されている．この算法を用いると，次数の異なる反復公式が容易に得られる．

2. 任意次数の同時反復公式

ここでは Padé 近似式を用いて，任意の収束次数の同時反復公式が得られることを示す．Padé 近似式については以下の定義を用いる．

† A High Order Iteration Formula for the Simultaneous Determination for the Zeros of a Polynomial by TETSUYA SAKURAI, TATSUO TORII and HIROSHI SUGIURA (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

定義　有理式 $r_{M,N}(z)=P(z)/Q(z)$ において，多項式 $P(z)$, $Q(z)$ はそれぞれ M 次，N 次で，互いに素であるとする．級数

$$F(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

に対して

$$F(z)Q(z)-P(z)=O((z-z_0)^{M+N+1}) \tag{2.1}$$

が成り立つとき，$r_{M,N}(z)$ を z_0 における $F(z)$ の $M+N$ 次 Padé 近似式あるいは，$[M/N]$-Padé 近似式と呼ぶ．

通常は分母の定数項を1に正規化した有理式を用いるが，本論文では分子の零点のみを問題とするため正規化についてはこだわらず，係数に定数倍の違いがあっても Padé 近似式と呼ぶことにする．

$z_1,\cdots,z_n$ を n 次の代数方程式 $f(z)=0$ の n 個の近似根とする．1つの近似根 z_k に対する反復公式を以下のようにする．

[アルゴリズム A]

z_k を除いた近似根を零点に持つ $n-1$ 次の多項式を

$$g_k(z)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(z-z_i) \tag{2.2}$$

とおく．z_k における $f(z)/g_k(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式を求める．分子は1次式であるから，零点を1つだけ持つ．この零点 d_k を用いて

$$z_k'=z_k+d_k$$

を $f(z)$ に対する新しい近似根とする．

これを $k=1,\cdots,n$ について行えば，n 個の近似根 $z_1,\cdots,z_n$ についての同時反復公式が得られる．

次にこの反復公式の収束次数について考察する．そのために，Padé 近似式についての以下のような性質を示す．

補題 1　$F(z)$ は z_0 の近傍で解析的で，$F(z_0)\neq 0$ とする．z_0 における $1/F(z)$ の m 次 Taylor 多項式を

$$G_m(z)=\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i \tag{2.3}$$

とする．このとき $1/G_m(z)$ は，z_0 における $F(z)$ の $[0/m]$-Padé 近似式であり

$$F(z)=\frac{1}{G_m(z)}+O((z-z_0)^{m+1}) \tag{2.4}$$

と表せる．

証明

$F(z_0)\neq 0$ なので，z_0 において $1/F(z)$ の Taylor 展開式

$$\frac{1}{F(z)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i$$

が得られる．よって

$$\frac{1}{F(z)}-G_m(z)=\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i.$$

これより

$$\begin{aligned}&F(z)G_m(z)\\&=F(z)\left\{\frac{1}{F(z)}-\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{F}\right)^{(i)}(z_0)(z-z_0)^i\right\}\\&=1+O((z-z_0)^{m+1})\end{aligned}$$

となり

$$F(z)=\frac{1}{G_m(z)}+O((z-z_0)^{m+1}).$$

■

補題 2　$F(z)$ は z_0 の近傍で解析的であるとし，$F(z_0)\neq 0$ とする．このとき z_0 における $F(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式の分子の零点 z_0' は

$$z_0'=z_0+m\frac{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)}{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)}. \tag{2.5}$$

証明

$G_m(z)$ を式(2.3)とする．$1/G_m(z)$ は補題1より，z_0 における $F(z)$ の $[0/m]$-Padé 近似式である．ここで有理式 $P(z)/Q(z)$ を

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1-c(z-z_0)}{G_m(z)-c(z-z_0)G_{m-1}(z)} \tag{2.6}$$

とする．このとき定数 c を

$$c=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)\Big/\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)$$

とすると，$G_m(z)$ と $c(z-z_0)G_{m-1}(z)$ の最高次の係数が等しくなるので，$Q(z)$ の次数は

$$\begin{aligned}\deg(Q)&=\deg(G_m(z)-c(z-z_0)G_{m-1}(z))\\&=m-1\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\deg(P)+\deg(Q)=1+(m-1)=m.$$

次に $P(z)/Q(z)$ の近似次数をみる．式(2.6)より

$$\begin{aligned}&F(z)Q(z)-P(z)\\&=F(z)\{G_m(z)-c(z-z_0)G_{m-1}(z)\}\\&\quad-\{1-c(z-z_0)\}\\&=(F(z)G_m(z)-1)-c(z-z_0)(F(z)G_{m-1}(z)-1).\end{aligned}$$

$1/G_m(z)$ と $1/G_{m-1}(z)$ は，z_0 でそれぞれ $F(z)$ の $[0/m]$, $[0/m-1]$-Padé 近似式であったから

$$F(z)Q(z)-P(z)=O((z-z_0)^{m+1})$$

となる．ゆえに $P(z)/Q(z)$ は，z_0 において $F(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式である．このとき分子 $P(z)$ の零点 z_0' は

$$z_0'=z_0+\frac{1}{c}=z_0+m\frac{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)}{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)}. \qquad \blacksquare$$

式(2.5)は，$F(z)=f(z)/f'(z)$ とおくと Pomentale[14] の反復公式に一致する．

補題 3 $F(z)$ は

$$F(z)=\frac{z-\zeta}{\varphi(z)} \tag{2.7}$$

と表せるものとする．また，$\varphi(z_0)\neq 0$ とする．z_0 は $F(z)=0$ の根 ζ に十分近いものとし，$\varepsilon=\zeta-z_0$ とする．このとき，z_0 における $F(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式の分子の零点 z_0' は

$$z_0'=\zeta+c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^{m+1}+O(\varepsilon^{2m+1}). \tag{2.8}$$

証明

式(2.7)より

$$\left(\frac{1}{F(z)}\right)^{(i)}=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{z-\zeta}\right)^{(i-j)}\varphi^{(j)}(z)$$
$$=\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!\,(i-j)!}(-1)(i-j)!\cdot\left(\frac{-1}{z-\zeta}\right)^{i-j+1}\varphi^{(j)}(z)$$
$$=-i!\sum_{j=0}^{i}\frac{\varphi^{(j)}(z)}{j!}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)^{i-j+1}$$

である．補題2より，z_0 における $F(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式の分子の零点は

$$z_0'=z_0+m\frac{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m-1)}(z_0)}{\left(\frac{1}{F}\right)^{(m)}(z_0)}$$
$$=z_0+m\frac{-(m-1)!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}\right)^{m-j}}{-m!\sum_{j=0}^{m}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}\right)^{m-j+1}}.$$

ここで $\varepsilon=\zeta-z_0$ を代入して，右辺第2項の分子と分母に ε^{m+1} をかけると

$$z_0'=z_0+\frac{\varepsilon\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\varepsilon^j}{\sum_{j=0}^{m}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\varepsilon^j}$$
$$=z_0+\frac{\varepsilon}{1-c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^m}.$$

ここで

$$c=-\frac{1}{m!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(j)}(z_0)}{j!}\varepsilon^j}.$$

ε は十分小さいとしたので

$$z_0'=z_0+\varepsilon\{1+c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^m+(c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^m)^2+\cdots\}$$
$$=z_0+\varepsilon+c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^{m+1}+O(\varepsilon^{2m+1}).$$

$\zeta=z_0+\varepsilon$ より

$$z_0'=\zeta+c\varphi^{(m)}(z_0)\varepsilon^{m+1}+O(\varepsilon^{2m+1}). \qquad \blacksquare$$

上の補題から，$f(z)/g_k(z)$ の分子が1次式の Padé 近似式の零点には，以下のような性質があることがわかる．

定理 1 $f(z)$ は n 次の多項式とし，$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ は $f(z)$ の零点で，互いに異なるとする．$f(z)=0$ の n 個の近似根 $z_1,\cdots,z_n$ はそれぞれ $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ に十分近いものとし，$\varepsilon_i=\zeta_i-z_i$ とする．

$$\varepsilon_M=\max_{1\leq i\leq n,\, i\neq k}|\varepsilon_i| \tag{2.9}$$

のとき，z_k における $f(z)/g_k(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式の分子の零点は

$$z_k'=\zeta_k+O(\varepsilon_M\varepsilon_k^{m+1}). \tag{2.10}$$

証明

$$\frac{f(z)}{g_k(z)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\zeta_i)}{\prod_{i=1,\,i\neq k}^{n}(z-z_i)}=(z-\zeta_k)\prod_{i=1,\,i\neq k}^{n}\left(\frac{z-\zeta_i}{z-z_i}\right)$$
$$=\frac{z-\zeta_k}{\varphi(z)}$$

とすると $\varphi(z)$ は

$$\varphi(z)=\prod_{i=1,\,i\neq k}^{n}\left(\frac{z-z_i}{z-\zeta_i}\right)=\prod_{i=1,\,i\neq k}^{n}\left(\frac{z-\zeta_i+\zeta_i-z_i}{z-\zeta_i}\right)$$
$$=\prod_{i=1,\,i\neq k}^{n}\left(1+\frac{\varepsilon_i}{z-\zeta_i}\right)$$

と表せる．ここで

$$u_i(z)=\frac{1}{z-\zeta_i}$$

とおくと

$$\varphi(z)=1+\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n}\varepsilon_i u_i(z)+\cdots.$$

よって $\varphi^{(m)}(z_k)$ は $m>0$ のとき

$$\varphi^{(m)}(z_k)=\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n}\varepsilon_i u_i^{(m)}(z_k)+\cdots.$$

ζ_i は互いに異なるので

$$u_i^{(j)}(z_k)=\left(\frac{1}{z-\zeta_i}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=z_k}=O(1),\quad j\geq 0$$

より

$$\varphi^{(m)}(z_k)=O(\varepsilon_M).$$

よって補題3より

$$z_k'=\zeta_k+O(\varepsilon_M\varepsilon_k^{m+1}).$$ ■

この定理はアルゴリズムAによる反復公式が，単根のみを持つ $f(z)$ の根に対して $m+2$ 次収束することを意味する．$m=1$ のとき，この方法は Aberth 法に一致する．

定理 2 $f(z)$ は n 次の多項式で重根を持つとし，$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ は $f(z)$ の零点とする．$f(z)=0$ の n 個の近似根 $z_1,\cdots,z_n$ はそれぞれ $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ に十分近く，$\varepsilon_i=\zeta_i-z_i$ とし

$$\varepsilon_M=\max_{1\leq i\leq n,\, i\neq k}|\varepsilon_i|$$

であるとする．いま ζ_k は重根であるとし，$\varepsilon_M\ll|\varepsilon_k|$ とする．このとき，z_k における $f(z)/g_k(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式の分子の零点は

$$z_k'=\zeta_k+O(\varepsilon_M). \tag{2.11}$$

証明

ζ_k は重根であるから，$z_k-\zeta_l=O(\varepsilon_k)$, $l\neq k$ であるような ζ_l が存在する．そのため $u_l^{(j)}(z_k)$ は

$$u_l^{(j)}(z_k)=\left(\frac{1}{z-\zeta_l}\right)^{(j)}\Bigg|_{z=z_k}=(-1)^j\left(\frac{1}{z_k-\zeta_l}\right)^{j+1}$$
$$=O\left(\frac{1}{\varepsilon_k^{j+1}}\right)$$

となり $\varphi^{(m)}(z_k)$ は

$$\varphi^{(m)}(z_k)=O\left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_k^{m+1}}\right)$$

となる．よって補題3より

$$z_k'=\zeta_k+c\varphi^{(m)}(z_k)\varepsilon_k^{m+1}+O(\varepsilon_k^{2m+1})$$
$$=\zeta_k+O(\varepsilon_M).$$ ■

このことから，z_k に対する新しい近似根を求めるとき，z_k 以外の近似根をあらかじめ収束次数の高い方法で改良しておけば，重根に対しても改良に用いた方法の収束次数だけは保証されることがわかる．あらかじめ他の近似根を改良する方法として，櫻井らの方法[12]を用いることにする．この方法は m 次 Taylor 多項式の係数を用いて，多重度にかかわりなく m 次収束する．

3. 同時反復公式の計算法

文献 12) では，$f(z)/f'(z)$ の Padé 近似式の分子を求める算法が示されている．この算法はまた，一般の有理式に対して適用できる．これにより，有理式 $h(z)=A(z)/B(z)$ において，$A(z)$, $B(z)$ それぞれの m 次 Taylor 多項式が与えられたとき，$h(z)$ の m 次 Padé 近似式の分子が得られる．

アルゴリズムAのためには，z_k において $f(z)$ と $g_k(z)$ の m 次 Taylor 多項式を求め，文献 12) の算法を用いればよい．

あらかじめ近似根を改良してから，アルゴリズムAの計算を行うアルゴリズム A′ を以下に示す．

[アルゴリズム A′]

i) 近似根 $z_1,\cdots,z_n$ に対して $w_i=z-z_i$, $i=1,2,\cdots,n$ とし，それぞれの点で $f(z)$ の m 次 Taylor 多項式を求める．

ii) $k=1,\cdots,n$ について $f(z)/f'(z)$ の $[1/m-2]$-Padé 近似式の分子を求める．その零点を w_k^* として，各近似根の改良した値 z_k^*

$$z_k^*=z_k+w_k^*$$

を求める．

iii) $k=1,\cdots,n$ について

$$g_k(z)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(z-z_i^*)$$

とし，z_k における $g_k(z)$ の m 次 Taylor 多項式を求める．これより $f(z)/g_k(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似式の分子を求め，その零点 $w_1',\cdots,w_n'$ から新しい近似根 $z_1',\cdots,z_n'$ を

$$z_k'=z_k+w_k'$$

とする．

このようにして求めた新しい近似根から，あらためて $z_i=z_i'$, $i=1,\cdots,n$ として，すべての近似根が収束するまで繰り返す．この反復公式の収束次数を次の定理に示す．

定理 3 $\zeta_k-z_k=O(\varepsilon)$, $\zeta_i-z_i=O(\varepsilon^m)$, $i\neq k$ とする．このとき z_k における $f(z)/g_k(z)$ の $[1/m-1]$-Padé 近似の分子の零点は

i) $z_k'=\zeta_k+O(\varepsilon^{2m+1})$: $f(z)$ が単根のみを持つとき

ii) $z_k'=\zeta_k+O(\varepsilon^m)$ 　: $f(z)$ が重根を持つとき

である．

証明

仮定より $\varepsilon_k=O(\varepsilon)$, $\varepsilon_M=O(\varepsilon^m)$ となる．よって定理 1, 2 より i), ii) の結果を得る． ■

ここで $g_k(z)$ の Taylor 多項式の計算法を示す．

$$e_k(z)\equiv\frac{g_k'(z)}{g_k(z)}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{1}{z-z_i}$$

とおくと，$e_k(z)$ の高階導関数 $e_k^{(i)}(z)$, $i\geq 0$ は簡単に計算できる．ここで

$$g_k'(z)=e(z)g_k(z)$$

とし，両辺を微分すると

$$g_k^{(i+1)}(z)=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}e^{(i)}(z)g_k^{(i-j)}(z),\quad i\geq 0$$

より $g_k(z)$ の高階導関数が得られる.

1回反復あたりの計算の手間は, 多項式の次数 n が大きいときには, ほとんど Taylor 多項式の係数の計算で占められる. アルゴリズムAは, z_k において $f(z)$ と $g_k(z)$ の m 次 Taylor 多項式を求めている. これを $k=1,\cdots,n$ について計算しているので, 結局1回反復あたりの計算量は $2(m+1)n^2$ に比例する. アルゴリズム A′ は, 新たに Taylor 多項式を計算していないので, 計算量はアルゴリズムAと同じとみなせる.

4. 数　値　例

本方法を用いたいくつかの数値例を示す. 計算は FORTRAN 4 倍精度で行った. 計算機は名古屋大学大型計算機センターの FACOM M-780 を使用した.

1) 1回反復後の近似根の誤差. 多項式は
$$f(z)=(z-1)^3(z-2)(z-3)(z-4),\ n=6,$$
$$(\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=1,\ \zeta_4=2,\ \zeta_5=3,\ \zeta_6=4).$$
近似根は $|z_i-\zeta_i|=1.0\times10^{-2}, i=1,\cdots,n$ となるように配置した (**表 1**).

以下の数値例では, 問題とする多項式は, 根を領域 $[-1,1]\times[-1,1]$ に乱数で配置した.

2) すべて単根とし, 初期値を Aberth の初期値[13]にとったときと, 重心を中心として多項式の平均半径の円周上に初期値をとったときの, 近似根の平均の反復回数. ここで多項式の次数は $n=20$ とした (**図 1**).

3) 5個の根を重根としたときの, 近似根の平均の反復回数. 初期値は 2) と同様にとった. 多項式の次数は $n=20$ (**図 2**).

各近似根上で, m 次 Taylor 多項式の係数を用いている. これらの実験結果から, 単根に対しては $2m+1$ 次収束し, 重根に対しては m 次収束していることがわかる. 本方法は, 重根に対しても高い収束次数を持つため, 特に多項式が重根を持つ場合に Aberth 法と反復回数に大きな差がある. また, 初期値のとり方による反復回数の差が少ない.

表 1　1回反復後の近似根の誤差 $(\varepsilon=1.0\times10^{-2})$
Table 1 Errors of the approximations after one iteration $(\varepsilon=1.0\times10^{-2})$

	$\lvert z_1'-\zeta_1\rvert$	$\lvert z_4'-\zeta_4\rvert$
Aberth 法	5.0×10^{-3}	1.3×10^{-6}
本方法 $m=2$	6.2×10^{-5}	1.8×10^{-10}
3	9.1×10^{-7}	4.3×10^{-14}
4	3.8×10^{-9}	3.4×10^{-19}
5	3.8×10^{-11}	2.4×10^{-22}

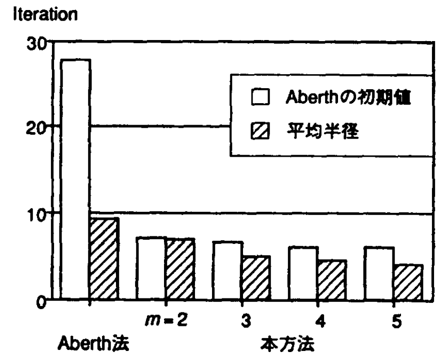


図 1　単根のみの多項式に対する反復回数
Fig. 1 The number of iteration for the polynomial which has only simple roots.

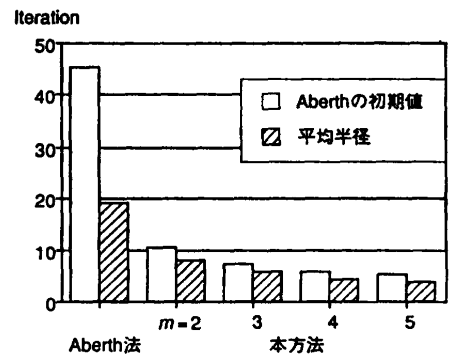


図 2　重根を含む多項式に対する反復回数
Fig. 2 The number of iteration for the polynomial which has the multiple roots.

Farmer らの方法[3]にみられたような, 1つの根にいくつもの近似根が多重度を超えて集まる現象はみられない.

5. お わ り に

代数方程式 $f(z)=0$ の解を求めるために, 高次収束する全根同時反復公式を提案した. この算法は, 各近似根上での m 次 Taylor 多項式の係数を用いて, $f(z)$ が単根のみを持つときには $2m+1$ 次, 重根を持つときにはその多重度にかかわらず m 次収束する.

本方法は, 重根に対しても高い収束次数を持つため, 多項式が重根を持つ場合に Aberth 法と比べて反復回数が相当減少する. また近似根どうしの癒着もみられない.

本方法は, 各近似根上で $f(z)$ と $g_k(z)$ の m 次 Taylor 多項式を求めるため, m を大きくするとそれ

だけ1回反復あたりの計算量が増える．しかし，多倍長演算等を用いて高い要求精度で計算する場合には，それに応じて m は大きくとったほうがよい．本論文で示したアルゴリズムは，収束次数を変えることが容易であるため，要求精度に応じて次数を変えることが可能である．

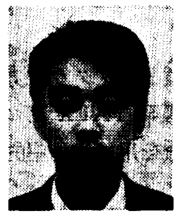
本方法では，各近似根での計算は並列に行える．さらに各近似根上で求める Taylor 多項式の係数も，並列に計算することが可能である．したがって本方法は，並列計算機を用いると特に効果的であると思われる．

謝辞 本論文をまとめるにあたり，多くのご助言をいただいた名古屋大学工学部三井助教授に感謝します．

参 考 文 献

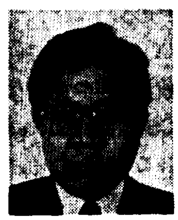
1) Durand, E.: *Solutions Numériques des Équations Algébriques*, Tome I, Masson, Paris (1960).
2) Aberth, O.: Iteration Methods for Finding All Zeros of a Polynomial Simultaneously, *Math. Comp.*, Vol. 27, pp. 339-344 (1973).
3) Farmer, M. R. and Loizou, G.: A Class of Iteration Functions for Improving, Simultaneously, Approximations to the Zeros of a Polynomial, *BIT*, Vol. 15, pp. 250-258 (1975).
4) Kiss, I.: Über die verallgemeinerung des Newtonischen näherungsverfahrens, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 34, pp. 68-69 (1954).
5) Nourein, A. W.: Root Determination by Use of Padé Approximants, *BIT*, Vol. 16, pp. 291-297 (1976).
6) 五十嵐正夫：代数方程式と大域的解法，情報処理学会研究報告，Vol. 89, No. 25, pp. 1-8 (1989).
7) Nourein, A. W.: An Iteration Formula for Simultaneous Determination of the Zeros of a Polynomial, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 4, pp. 251-254 (1975).
8) 野寺 隆：4次収束をする代数方程式の解法，第27回情報処理学会全国大会論文集，pp. 1255-1256 (1983).
9) 山本哲朗，古金卯太郎，野倉久美：代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法，情報処理，Vol. 18, No. 6, pp. 566-571 (1977).
10) 田辺國士：代数方程式の全根同時解法の重根における挙動，情報処理学会数値解析研究会資料，Vol. 4, No. 2, pp. 7-12 (1983).
11) Miyakoda, M.: Iterative Methods for Multiple Zeros of a Polynomial by Clustering, *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 28, No. 1-3, pp. 315-326 (1989).
12) 櫻井鉄也，鳥居達生，杉浦 洋：Padé 近似による代数方程式の反復解法，情報処理学会論文誌，Vol. 31, No. 4, pp. 517-522 (1990).
13) 伊理正夫：数値計算（理工系基礎の数学 12），朝倉書店 (1984).
14) Pomentale, T.: A Class of Iterative Method for Holomorphic Functions, *Numer. Math.*, Vol. 18, pp. 193-203 (1971).

（平成元年8月31日受付）
（平成2年4月17日採録）



櫻井 鉄也（正会員）

昭和36年生．昭和59年名古屋大学工学部応用物理学科卒業．昭和61年同大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期課程修了．同年同大学工学部情報工学科助手．代数方程式の数値解法と有理関数による近似に興味を持つ．



鳥居 達生（正会員）

昭和9年熊本県生．昭和32年九州工業大学電気工学科卒業．同年新日本窒素肥料（株）就職．昭和39年同社退職．同年大阪大学工学部助手（応用物理学科）．昭和50年名古屋大学工学部情報工学科講師，助教授を経て昭和60年教授．数値解析，数学ソフトウェアの研究に従事．とくに FFT を基礎に関数近似，数値積分について研究している．

杉浦 洋（正会員）

昭和27年生．昭和57年名古屋大学理学部数学科卒業．昭和53年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了．昭和56年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了．昭和57年より同大学工学部助手．数値積分と積分方程式に興味をもつ．