

伊藤過程に基づく LSF の推定とそれを用いた鮮鋭度評価  
 Evaluation of Sharpness of Digital Radiography  
 Using Line Spread Function (LSF) Devised on the Basis of Ito Process

今井國治<sup>†</sup> 遠地志太<sup>‡</sup> 森政樹<sup>†</sup> 藤田尚利<sup>††</sup> 池田充<sup>†</sup> 新美孝永<sup>‡‡</sup>  
 Kuniharu Imai Yukihiro Enchi Masaki Mori Naotoshi Fujita Mitsuru Ikeda Takanaga Niimi

## 1. はじめに

現在、肺ガン検診や乳ガン検診と言った集団検診では、単純 X 線検査が重要な役割を果たしている。このようなガンの早期発見を目的とした検査では、微細なガン病変を明確に描出させる必要がある。このことから、X 線デジタル画像の鮮鋭度を評価することは、ガン検出能を向上させる上で、非常に重要となる。

一般に X 線画像の鮮鋭度は、画像信号の広がり程度 (ボケ) を示す線像強度分布 (LSF) をもとに評価が行われており、通常、この強度分布は、エッジ像強度分布 (ESF) を微分して求められている。このようにして求められた LSF には、画像ノイズが多く含まれているため、これを確度良く推定することは極めて困難である。また、デジタル X 線画像には、様々な非線形処理が施されているため、従来の鮮鋭度評価法である Modulation Transfer Function (MTF) が、理論上、使用不可能になってしまった。以上の背景から、本研究では、デジタル X 線画像上の ESF を確率微分方程式の形式で表現し、この方程式の解として与えられる LSF をもとに新しい鮮鋭度評価法を考案した。本報告は、これらの結果をまとめたものであり、本提案法が鮮鋭度評価において有益であることを論じている。

## 2. 確率微分方程式による LSF の推定法

一般に、画像ノイズは白色雑音で、画像信号とは無相関であるとされてきた。しかし、実際の X 線デジタル画像には、様々な画像処理が施されているため、Pixel 間にかかなりの相関があり、画像ノイズを白色雑音として仮定することは非常に困難である。そこで、この画像ノイズをウィナー過程ではなく、単にブラウン運動に基づく Pixel 値変動であるとすると、ブラウン運動はマルコフ過程の一つであることから [1]、Pixel 間で相関を持った画像ノイズが、表現できると考えられる。さらに、これまでの研究で、画像ノイズは、画像信号の大きさと密接に関連していることが明らかにされている。[2,3]以上のことを考慮に入れ、今、画像上のある点  $t$  における Pixel 値を  $X(t)$ 、 $t$  から微小距離  $\Delta t$  離れた点での Pixel 値を  $X(t+\Delta t)$  とすると、画像上の Pixel 値の変動量  $\Delta X(t)$  は、次式で表現できる。

$$\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t) = \mu X(t)\Delta t + \rho X(t)\Delta B(t) \quad (1)$$

$\mu$ : Pixel 値の平均変化率、 $\rho$ : 画像ノイズの平均変化率  
 $\Delta B$ : Brownian motion 関数の変化量

上式の第一、二項は、画像信号及び画像ノイズを示している。ここで、(1)式を形式的に確率微分方程式で表すと

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \rho X(t)dB(t) \quad (2)$$

となり、このような微分方程式で表現できる確率過程は伊藤過程と呼ばれている。従って、X 線デジタル画像は伊藤過程の一つであると考えられ、この微分方程式を解くことにより、本研究の目的の一つである ESF が推定できる。

通常、この微分方程式を解く際、 $X(t)$  が従う関数  $f(x)$  は既知であり、伊藤のレンマ (3)式) を用いて、その解であるサンプルパスが求められている。(次式を(3)式とする)

$$df(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial X(t)} \mu X(t) + \frac{\partial f(x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial X(t)^2} \rho^2 X(t)^2 \right] dt + \frac{\partial f(x)}{\partial X(t)} \rho X(t) dB(t)$$

つまり、この連立微分方程式を解くことによって、目的とする解が得られることになる。今回、 $f(x)$  である ESF は未知の状態となっている。しかし、方程式の解であるサンプルパスは実測により求めることができる。この状況は従来と反対の状況になってはいるが、本質的に、この連立方程式を解くことには相違ない。そこで、(3)式の  $x$  に  $X(t)$  を代入し、(3)式の右辺第四項を消去するため、(2)式の両辺に  $\partial f(X(t))/\partial X(t)$  を乗じ、(3)式との差をとった。その結果、

$$f(x) = \frac{\partial f(X(t))}{\partial X(t)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X(t))}{\partial^2 X(t)} \rho^2 X(t)^2 + \frac{\partial f(X(t))}{\partial X(t)} X(t) \quad (4)$$

となる。ここで、再び  $X(t)$  を  $x$  に置き換えると、(4)式は  $f(x)$  を求めるための二階の偏微分方程式となる。この偏微分方程式を簡素化するため、 $u(t,x) = f(t,x)e^{(T-t)}$  ( $T$ : サンプルの終端点) とおき、さらに

$$s = T - t, y = \ln \frac{x}{K} + (1 - \frac{1}{2} \rho^2)(T - t), u(t,x) = v(s,y) \quad (5)$$

とすると、(4)式は(6)式となる。(5)式中の  $K$  は閾値)

$$-\frac{\partial v(s,y)}{\partial s} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

この式は、熱伝導における拡散方程式と等価な偏微分方程式となっており、この方程式の解が最尤推定された ESF となる。そこで、この境界条件を  $v(0,y) = u(T,x) = \{x-K\}_+ = \{Ke^{-K} - K\}_+$  とおき、(6)式を解くと、次式が得られる。

$$f(x) = x\Phi(-d_1(t)) - e^{-(T-t)} K\Phi(-d_1(t) - \rho\sqrt{T-t}) \quad (7)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left[ \ln \frac{x}{K} + (1 + \frac{1}{2} \rho^2)(T-t) \right] \quad (8)$$

$\Phi(d)$ : 確率変数  $d$  における標準正規分布関数値

式中の  $d_1$  は境界条件から求められる値で、画像ノイズがマルチンゲール過程にも従っているとして導出した。

以上の結果から、ESF は(4)式の陽解として与えられることが明らかとなった。そこで本研究では、 $t=T$  の時、ESF は既に定常値となっていることから、 $x$  の値は Pixel 値の変動を考慮して、その平均値を用いることにした。しかし、 $\rho$  及び  $K$  に関しては、実測した ESF から求めることが困難である。そこで、推定 ESF と実測 ESF から Pearson 積率を求め、それが最大となるような値を採用することにした。

<sup>†</sup> 名古屋大学医学部保健学科 Nagoya University  
<sup>‡</sup> 大阪大学医学部附属病院 Osaka University Hospital  
<sup>††</sup> 名古屋大学医学部附属病院 Nagoya University Hospital  
<sup>‡‡</sup> 名古屋第二赤十字病院 Nagoya Red-Cross Hospital

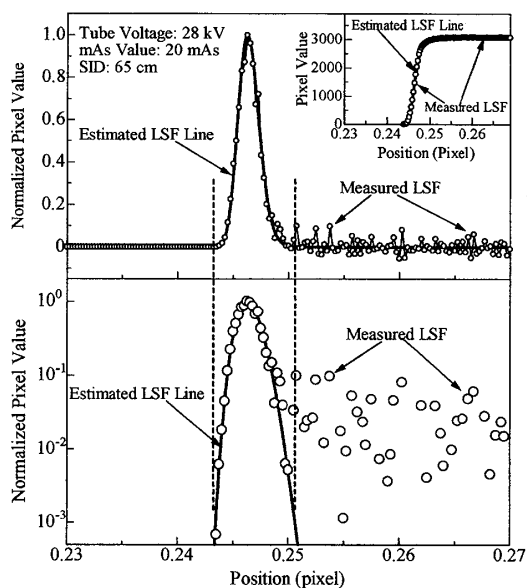


Fig. 1 LSF devised from stochastic differential equation

### 3. Sharpness Index を用いた鮮鋭度評価

前節では、確率微分方程式をもとに ESF を最尤推定した。従って、LSF はこの ESF を微分することによって求めることができる。そこで、この結果をもとに、本節では推定 LSF を用いた鮮鋭度の評価法、つまり、Sharpness Index 法について説明する。

この解析法では、レーザパルスの広がり等を評価する際に用いられるパルスの半値幅 (FWHM) と 1/10 幅 (FWTM) を用いることにした。まず、この 2 つのパラメータを属性とするベクトル空間を考える。今、推定 LSF の FWHM 及び FWTM が  $a$ 、 $b$  であるとする、この属性空間内に  $(a, b)$  というベクトルが定義できる。一般に、実測された LSF は  $\delta$  関数にボケ関数が重畳されたものと考えられている。つまり、ボケのない理想的な LSF は  $\delta$  関数であり、 $\delta$  関数の FWHM 及び FWTM は共に 0 である。従って、この属性空間における原点は  $\delta$  関数を示していることになる。このことから、原点から  $(a, b)$  までの距離は、画像の鮮鋭度を反映した物理量であると考えることができ、次式で定義できる。

$$SI = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (9)$$

本研究では、上式で定義した  $SI$  を Sharpness Index と呼び、この評価指標を用いて、鮮鋭度評価を実施した。

### 4. 実験方法

LSF の検証では、厚さ 1.5mm のタングステン製プレートを用いて ESF を取得することにした。その際、このプレートは直接変換型 Flat Panel Detector (FPD) 装置の検出器パネル上に配置し、X 線管電圧 28kV 一定の下、X 線管電流量 (mAs 値) のみを可変 (20-180mAs) させて撮像した。このようにして得られた ESF は、臨床で使用されている条件で画像処理し、DICOM 形式に変換した。

また、画像信号の位置による鮮鋭度の違いを検討するため、タングステンプレートと検出器パネルとの間に様々な厚さの亚克力板 (0-40mm) を挿入し、亚克力板の厚さと  $SI$  との関係求めた。その際、ESF は臨床の場合と同様、X 線管電圧 28kV 一定の下、AEC を用いて撮像した。

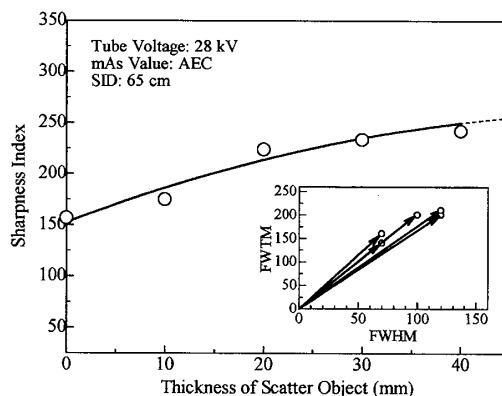


Fig. 2 Relationship between SI and thickness of PMMA

### 5. 解析結果及び検討

図 1 は実測の LSF と最尤推定された LSF との関係を示したもので、ESF の結果もこの図に含めた。この図に示されているように、確率微分方程式から求めた LSF は実測の LSF を非常に良く推定しており、これまで推定が困難であった tail 部分に関しても、かなり高い精度で推定できていると考えられる (Semilog-Scale 図を参照)。従来、LSF は指数関数やガウス分布で近似されてきた。[4]しかし、これらはいくまでも LSF を近似したに過ぎず、今回のように理論的に導き出されたものではない。それゆえ、本研究で推定した LSF は、かなりの確度を持っているものと思われる。

次に、この最尤推定された LSF を用いて、Sharpness Index を算出し、この指標に基づくデジタル X 線画像の鮮鋭度評価を行う。図 3 は信号位置の違いによる鮮鋭度の変化を示したものである。Sharpness Index は亚克力厚の増大と共に増加する傾向にある。これは像の拡大による鮮鋭度の低下であり、従来の報告と一致している。このことから Sharpness Index を用いて、画像上の鮮鋭度評価が可能であることが示唆された。

今回、Sharpness Index を用いて鮮鋭度評価を行った。この指標は、FWHM と FWTM が作る属性空間の原点からの距離として定義した。また、3 節で述べたように原点は  $\delta$  関数を表していることを考慮に入れると、Sharpness Index は  $\delta$  関数を入力信号とした時の出力として捉えることもできる。それゆえ、この指標による鮮鋭度評価は、MTF のような信号応答特性としての性質も兼ね備えているものと思われる。さらに、FWHM 及び FWTM はそれぞれ、高周波数領域及び低周波数領域における鮮鋭度を反映していると考えられる。このことから、どの周波数領域で、鮮鋭度低下が起こっているかということもこの解析法で評価できる。以上のことから、本研究で提案した鮮鋭度解析法は、簡便かつ臨床的に有益な評価法になるのではないかと筆者らは考えている。

最後に本研究は、日本学術振興会研究費助成金 (基盤 C) の助成を受けて行われた。

### 参考文献

- [1] エクセンドール, “確率微分方程式”, シュプリンガー, (1999)
- [2] K.Imai, Phys. Med. :Eur. J. Med. Phys, 26, 157-165(2010)
- [3] 今井他, 電子情報通信学会総合大会 D-15-5 (2010).
- [4] E. Buhr, Med. Phys. 30, 2323-2331(2003)