

微分幾何学的な量を用いた自由曲面形状処理†

山 縣 敬 一†† 中 村 淳 良††* 中 村 一 夫††**
隅 田 敏††*** 塩 谷 景 一††† 牧之内 三郎††††

自由曲面形状処理は実用期に入り、一般的な形状モデルの中で全体的な形状の構成をどのような操作で作りに上げるかが重要になってきている。この構成過程には、応用によっていろいろな手法があってよいと思われるので、本研究では、アウトラインによる大まかな初期曲面があることを想定し、接平面の傾きに視点を置いた形状構成法を議論している。また、応用においては曲面の第一基本量と第二基本量がしばしば必要になるので、曲面式の導関数のプログラムをシステムに組み込むことを提案している。個々のパッチの定式化は双3次パッチを基礎とする既存のものであるが、一般的なサーフェス・モデルと同様のトポロジーに従って曲線によるワイヤフレーム・モデルを作り、接続条件を考慮してパッチを張っていく。このとき、境界曲線上でのパッチの接続を統一的に扱うため、3次 Hermite 補間によるロフト曲面の基礎に立ち戻り、四辺形パッチ、三辺形パッチ、自由形状の周辺領域における接続の問題を詳細に検討している。応用形状処理として、数値制御のための工具経路生成問題を取り上げ、応用においても接平面の傾き、法曲率、等高線の変曲点などが重要であることを指摘している。

1. はじめに

自由曲面形状処理については、次第に実用的なシステムが構築されるようになってきている。現在の状況で考えなければならないことは、自由曲面が一般的な形状モデルの中で統合的に扱われるようになってきていること、ならびに、ユーザが形状を作り上げるときに、どのような過程を経て、どのような操作を定義しておけば、設計者にとって使いやすいインタフェースになりうるかという点であろう。

本研究で開発されたシステムは、特定の応用を目的とした閉じたシステムではなく、教育と研究用にいろいろな試みを行うための開いたシステムになっている。したがって、これまで行われた研究のいろいろな考え方を参考にして、基礎理論から応用への橋渡しを検討している。曲面パッチの接続までを考慮した統一

的な理論展開が、穂坂と本村によって行われ¹⁾、大域的な初期曲面モデルを用意する考え方は、山口が最初に示した²⁾。具体的に形状を構成する過程については、千代倉と木村が多面体から変形操作を行う方法を提案しており³⁾、また、上西と矢島はガイドカーブに沿って曲線をスイープさせて広域曲面を補間する手法を提案している⁴⁾。さらに、実際の応用に密着した議論を倉賀野ら⁵⁾、高井⁶⁾が行っている。

本研究で扱っている自由曲面も双3次パッチに基礎を置いているので、でき上がる形状は特別新しいものではない。多面体の変形操作とは少し考え方の異なる別のアプローチとして、ユーザが形状を作り上げていく過程において、あらかじめ初期曲面として大域的な曲面を用いることを想定し、細かいパッチを接続する所では、法線ベクトルあるいは接平面の傾きに視点を置いて形状制御を行っている。ツイスト・ベクトルについても接平面の傾きを変化させる量としてとらえている。さらに、応用形状処理の一つとして、数値制御のための工具経路自動生成の問題を取り上げ、領域分割のために曲面の第二基本量として曲面の2階微分量を用いている。マンマシン・インタフェースについては、多くの議論が必要であると思われるので、接平面の傾きを操作するといった本研究の内容は、総括的な結論を導いているものではないが、曲面の形状の特性を考えると、まず初めに微分幾何学的な量を取り上げられるので、この点に視点を置いて曲面形状処理の検討を行っている。

† Free-Form Shape Manipulation Using Differential Geometry by KEIICHI YAMAGATA, ATSUYOSHI NAKAMURA, KAZUO NAKAMURA, SATOSHI SUMIDA (Department of Precision Engineering, Faculty of Engineering, Osaka University), KEICHI SHIOTANI (Industrial Electronics & Systems Development Laboratory, Mitsubishi Electric Corporation) and SABURO MAKINOUCI (Faculty of Management and Information, Osaka International University).

†† 大阪大学工学部精密工学科

††† 三菱電機(株)産業システム研究所

†††† 大阪国際大学経営情報学部

* 現在 シャープ(株)

Presently, with Sharp Corporation

** 現在 (株)島津製作所

Presently, with Shimadzu Corporation

*** 現在 (株)東芝

Presently, with Toshiba Corporation

2. 曲面モデルの構成法

2.1 パッチ境界線によるワイヤフレームモデル

本報告においては、細かいパッチを接続して形状を作ることに重点をおいて述べるが、しばしば指摘されるように、このような過程だけで形状を構成していくことには無理がある。いろいろな応用を考えると、細かい形状制御は別にして、広い領域に一度に曲面を張ってしまう機能も必要である。本研究では、この機能としてアウトラインの入力に基づくBスプライン曲面を採用している^{7),8)}。個々の応用に関する事柄は逐一説明しないが、一般的な手法としては、大域的な曲面をあらかじめ用意する機能と、それで不満が残る場合に、さらに細かいパッチに分割して形状制御を行う機能の併用が必要である。

一般的な形状モデリング(サーフェス・モデル)と同様な扱い方にするため、パッチ境界線からなるワイヤフレーム・モデルを作り、これに曲面パッチを張るという考え方をとる。パッチとしては、四辺形と三辺形の混在は許すが、それ以上の多辺形パッチはここでは取り上げていない。双3次四辺形パッチを基本と考え、3次 Hermite 補間とロフト曲面の基礎に立ち戻って接続を行い、でき上がった形状については、適宜 Bézier 曲面で表す。接続の問題を考えるのに、3次 Hermite 補間によるロフト曲面というのが最も適用範囲が広いからである。

初めに、境界線のネットからなるワイヤフレーム・モデルを作成する。多面体のモデルの場合と異なり、通過頂点における単位法線ベクトルが必要になる。もともと予備データが全くない状態で、法線ベクトルの向きを数値で入力するのは容易ではないが、先に述べたような大域的な初期曲面がある場合には、これによって近似値を与えればよい。一般に一度に期待する形状を作り上げることは困難であるので、近似値を与えておくことにより、法線ベクトルの向きすなわち接平面の傾きを制御量として扱えるようにしておくことは、形状制御の意味で有用である。

パッチの境界線は、特別な場合を除いて、3次 Hermite 補間(Ferguson の曲線)で定式化するものとする。上の過程で、通過頂点とそこでの法線ベクトルの傾きが与えられているから、どの通過頂点とどの通過頂点を結んでネットを構成するかをユーザが指定すれば、以下の手順に従ってパッチの境界線が生成される。なお、パッチの並びは不規則であってよいが、

四辺形と三辺形に限定しているので、五辺形以上になる場合はパッチ境界線を追加しなければならない。

図1において、 P_1 と P_2 が通過頂点で、 PL_1 、 PL_2 がそこでの接平面であるとする。ベクトル (P_2-P_1) の平面 PL_1 への正射影をベクトル T_1' とし、 (P_1-P_2) の平面 PL_2 への正射影ベクトルを T_2' とする。 T_1' と T_2' が P_1 と P_2 とを結ぶ境界曲線の接線ベクトルの方向を定める。一般には、 T_1' と T_2' は同一平面上にはない。次に、接線ベクトルの長さであるが、FMILL法に従ってスパンの長さ $|P_1-P_2|$ に比例するように定めるものとする。比例定数を γ として、

$$\begin{aligned} T_1 &= \gamma |P_1 - P_2| \frac{T_1'}{|T_1'|} \\ T_2 &= \gamma |P_1 - P_2| \frac{T_2'}{|T_2'|} \end{aligned} \quad (1)$$

のように決める。とくにユーザからの指定がないときには $\gamma=1$ とする。このようにして定めた T_1 と T_2 を用いて、 P_1 と P_2 を結ぶ曲線は Ferguson の曲線として次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C(u) &= \phi_0(u)P_1 + \phi_1(u)T_1 \\ &\quad + \phi_0(u)P_2 + \phi_1(u)(-T_2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$(0 \leq u \leq 1)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \phi_0(u) &= (u-1)^2(2u+1), \\ \phi_1(u) &= (u-1)^2u, \\ \phi_0(u) &= u^2(3-2u), \\ \phi_1(u) &= (u-1)u^2, \end{aligned}$$

である。一つの通過頂点から複数本のパッチ境界線が引かれることになるが、すべて同様の手順による。また、一度形状が作られた後で法線ベクトルの修正が行われるときにも、その頂点から出ているすべての境界曲線が変更される。

なお、ある頂点の所で二つのパッチを角度をつけて接続したい場合があるので、一つの頂点から出ている境界曲線が一つの接平面上になく、異なった接平面に

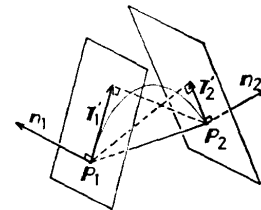


図1 接平面と接線ベクトル
Fig. 1 Tangent vectors derived from tangent planes.

対応していてもかまわない。データ構造について詳しくは述べないが、トポロジカルな構造は多面体と同様で、稜線が曲線になり、面が曲面パッチになっている。したがって、頂点と境界曲線と曲面パッチのトポロジカルな関係はポインタを用いたリストまたはリングによって表されている。多面体モデルに対して新しくつけ加わっているのは、法線ベクトル、接線ベクトル、ツイスト・ベクトルのテーブルである。上に述べた手順によって、ワイヤフレーム・モデルに対応する曲線のネットが作成される。

設計者が望む形状を作り上げる過程において、繰り返し形状の修正が必要になる。このため本システムでも、データ構造の中の数値を表示したり、これらを新しいものに変えていくためのインターフェースを用意している。ワイヤフレーム・モデルの作成段階でも、通過頂点と法線ベクトルの初期値に不満があれば、修正が必要になる。さらに、稜線が曲線になっているために、接線ベクトルの長さの調整が必要になることがある。これについては、直接数値を入力することもできるし、円弧近似や四分の一楕円弧近似の指定も可能になっている。最後に、ツイスト・ベクトルの取扱いが残ってくるが、以下にパッチ接続の問題を議論した後、3.3節で詳しく述べる。

2.2 接平面連続によるパッチの接続条件

前節で構成されたネットに曲面パッチを張っていくことを考える。例外的な処理は後で述べることにして、双3次四辺形パッチを境界曲線上で接平面連続の条件のもとで接続する問題を取り上げる。図2において、 $C(u)$ が頂点 P_0 と P_1 を結ぶ境界曲線で S_a, S_b が曲面パッチとする。二つのパッチを表現するため、図1と記号を変えているが、 a_0, b_0, c_0 は P_0 における接平面上の接線ベクトルであり、 a_1, b_1, c_1 は P_1 における接線ベクトルである。図2の記号を用いて(2)式の定式化を行えば、境界曲線 $C(u)$ は

$$C(u) = \phi_0(u)P_0 + \phi_1(u)c_0 + \phi_0(u)P_1 + \phi_1(u)(-c_1) \quad (3) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

と表される。

次に、境界曲線上の任意の点における、曲線を横切る方向の接線ベクトル $a(u)$ と $b(u)$ を定める。例えば、 $a(u)$ については、両端での接線ベクトルが a_0 と a_1 であり、両端での変化率すなわちツイスト・ベクトルが与えられれば、ここでも3次 Hermite 補間を用いることにより次のように定められる¹⁴⁾。

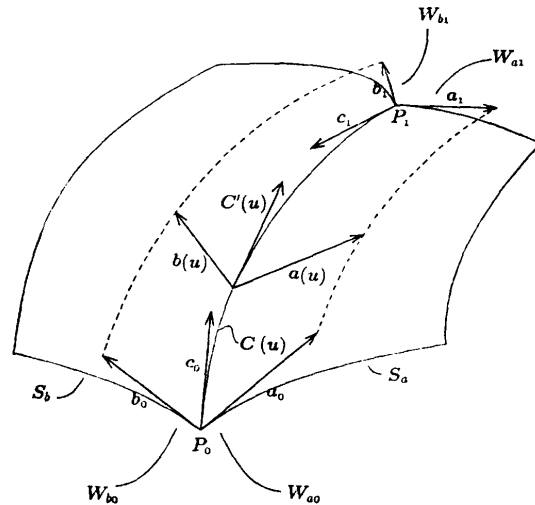


図2 接平面連続の条件によるパッチの接続
Fig. 2 Conditions for smooth connection of surface patches.

$$\begin{aligned} a(u) &= \phi_0(u)a_0 + \phi_1(u)W_{a0} \\ &\quad + \phi_0(u)a_1 + \phi_1(u)W_{a1} \\ b(u) &= \phi_0(u)b_0 + \phi_1(u)W_{b0} \\ &\quad + \phi_0(u)b_1 + \phi_1(u)W_{b1} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $W_{a0}, W_{b0}, W_{a1}, W_{b1}$ は、ツイスト・ベクトルであり、これらは初めから指定されるわけではなく、次に述べるようにパッチ接続の条件から定められる。曲面パッチ接続の条件として任意の u ($0 \leq u \leq 1$)について図2の $a(u), b(u), C'(u)$ が同一平面上にあるように接続するものとする($C'(u)$ は u についての微分を表す)。この接続条件を与えてもツイスト・ベクトルの組は一意には定まらず、自由度が残される。そして、これを操作することによって、境界曲線上での接平面の傾きが変わることになる。

さて、上の接続の条件をここで定式化しておく⁹⁾。この議論は常套的なものであるが、3次 Hermite 補間に基づく定式化を与えるのが目的である。 $a(u), b(u), C'(u)$ が同一平面上にあるための条件は、 $l(u), h(u), k(u)$ をあるスカラー関数とすると、

$$l(u)C'(u) = h(u)a(u) + k(u)b(u) \quad (5)$$

を満たすことである。 P_0 と P_1 において、 a_0, b_0, c_0 と a_1, b_1, c_1 はそれぞれ同一平面上にあるから、

$$\begin{aligned} l_0c_0 &= h_0a_0 + k_0b_0 \\ l_1(-c_1) &= h_1a_1 + k_1b_1 \end{aligned} \quad (6)$$

となるような $l_0, h_0, k_0, l_1, h_1, k_1$ を定めることができる。これらを用いて $l(u), h(u), k(u)$ を

$$l(u) = (1-u)l_0 + ul_1$$

$$h(u) = (1-u)h_0 + uh_1 \quad (7)$$

$$k(u) = (1-u)k_0 + uk_1$$

で与える。

以上の(5)~(7)式は、接平面連続の条件を定める一般的な式である⁹⁾。本研究ではこれらを満たす、通過頂点、接線ベクトル、ツイスト・ベクトルの間の関係を新しく求める。(3)式を u で微分して $C'(u)$ を求め、これと(4)式と(7)式を(5)式に代入し、任意の u について(5)式が成り立つための条件として、 u の各次数の係数を両辺で等しいとおく。1次の係数、2次の係数、3次の係数より次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & k_0 W_{b_0} + h_0 W_{a_0} \\ &= -(k_1 b_0 + h_1 a_0) \\ & \quad + 6l_0(P_1 - P_0) + (-4l_0 + l_1)c_0 - 2l_0(-c_1) \\ & k_1 W_{b_0} + k_0 W_{b_1} + h_1 W_{a_0} + h_0 W_{a_1} \\ &= -3(k_1 b_0 + k_0 b_1 + h_1 a_0 + h_0 a_1) \\ & \quad + 6(l_0 + l_1)(P_1 - P_0) - 2(l_0 + l_1)c_0 \\ & \quad - (l_0 + 2l_1)(-c_0) \\ & k_1 W_{b_1} + h_1 W_{a_1} \\ &= -(k_0 b_1 + h_0 a_1) \\ & \quad + 6l_1(P_1 - P_0) + (-4l_1 + l_0)(-c_1) - 2l_0 c_0 \end{aligned} \quad (8)$$

(5)式は u の4次式であるが、定数項は恒等的に両辺で等しく、4次の項から得られる関係は(8)式の1次結合で表されるため、独立なものは(8)式の三つの関係だけである。これが新しく求められた関係式である。ここで、四つのツイスト・ベクトルが未知であるとする、(8)式の条件を与えても自由度が残されており、これを操作することによって、境界曲線上での接平面の傾きが変わる。形状制御の詳細については3.3節で述べるが、条件(8)式の下で自由度を操作するための手法として、本研究では次のような方法を導入した⁹⁾。いま、望ましいと考えられるツイスト・ベクトルの組 $W^*_{a_0}$, $W^*_{a_1}$, $W^*_{b_0}$, $W^*_{b_1}$ があるとき、(8)式を満たしてこれらに近いツイスト・ベクトルを求めるため、Lagrange 未定乗数法を用いて次の関数が最小となるような W_{a_0} , W_{a_1} , W_{b_0} , W_{b_1} を求める。簡単のため x 成分のみを示す。

$$\begin{aligned} \phi_x = & (w_{a_0x} - w^*_{a_0x})^2 + (w_{a_1x} - w^*_{a_1x})^2 \\ & + (w_{b_0x} - w^*_{b_0x})^2 + (w_{b_1x} - w^*_{b_1x})^2 \end{aligned} \quad (9)$$

最小解は、ベクトルの x, y, z 成分それぞれについて求めなければならないが、未知ベクトルの成分について(9)式は2次式、(8)式は1次式であるため、連

立1次方程式に帰着されて多くの計算時間は要しない。ユーザからの指定がとくにない場合は、望ましいツイスト・ベクトルとして次のものを与える。これは、本研究のシステムで設定しているデフォルト値である。

$$\begin{aligned} W^*_{a_0} &= a_1 - a_0, & W^*_{a_1} &= a_0 - a_1 \\ W^*_{b_0} &= b_1 - b_0, & W^*_{b_1} &= b_0 - b_1 \end{aligned} \quad (10)$$

この場合は、Bézier 曲面を基礎パッチを使って接続する方法と定式化は異なっているが考え方は同じである⁹⁾。求められたツイスト・ベクトルを(4)式に代入すれば、境界曲線上の cross boundary tangent vector (以下 C. B. T. ベクトルと記す) $a(u)$, $b(u)$ がすべて定められる。この操作は、3次 Hermite 補間で定式化される境界曲線ごとに行われるから、後に述べるように三辺形パッチが混在する場合や、一般的なロフト曲面の境界の一部にも適用できる。

2.3 Gregory の四辺形と Brown の四辺形

以上で、ワイヤフレームに曲面パッチを張る準備が整った。図3(a)に示すように、4本の境界曲線 $C_1(u)$, $C_2(v)$, $C_3(u)$, $C_4(v)$ とその上での C. B. T. ベクトル $b_1(u)$, $b_2(v)$, $b_3(u)$, $b_4(v)$ が与えられたとする。図3(b)において、パラメータ v の変化する方向に3次 Hermite 補間を使ってロフト曲面を構成すれば、

$$\begin{aligned} S_1(u, v) = & \phi_0(v)C_1(u) + \phi_1(v)b_1(u) \\ & + \phi_0(v)C_3(u) + \phi_1(v)(-b_3(u)) \end{aligned} \quad (11)$$

であり、パラメータ u の変化する方向に $C_4(v)$ から $C_2(v)$ に向かって同様のロフト曲面を作れば、

$$\begin{aligned} S_2(u, v) = & \phi_0(u)C_4(v) + \phi_1(u)b_4(v) \\ & + \phi_0(u)C_2(v) + \phi_1(u)(-b_2(v)) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

一般的にロフト曲面を扱うときには、両端での曲線は補間式とは限らないが、ここでは特別な場合として、前節の記述に従ってすべての境界曲線が3次 Hermite 補間である場合を考える。境界曲線の補間もロフト曲面の補間も、四隅の点での接線ベクトルを用いた3次 Hermite 補間で与えられるとすれば、 $S_1(u, v)$ と $S_2(u, v)$ はツイスト・ベクトルだけが異なり境界曲線を共有する二つの双3次曲面となる。そこで、次のように Gregory の四辺形を構成する^{10), 11)}。

$$\begin{aligned} S(u, v) = & \frac{u(1-u)}{u(1-u) + v(1-v)} S_1(u, v) \\ & + \frac{v(1-v)}{u(1-u) + v(1-v)} S_2(u, v) \end{aligned} \quad (13)$$

ところで、実際の応用面から、自由形状領域の周辺

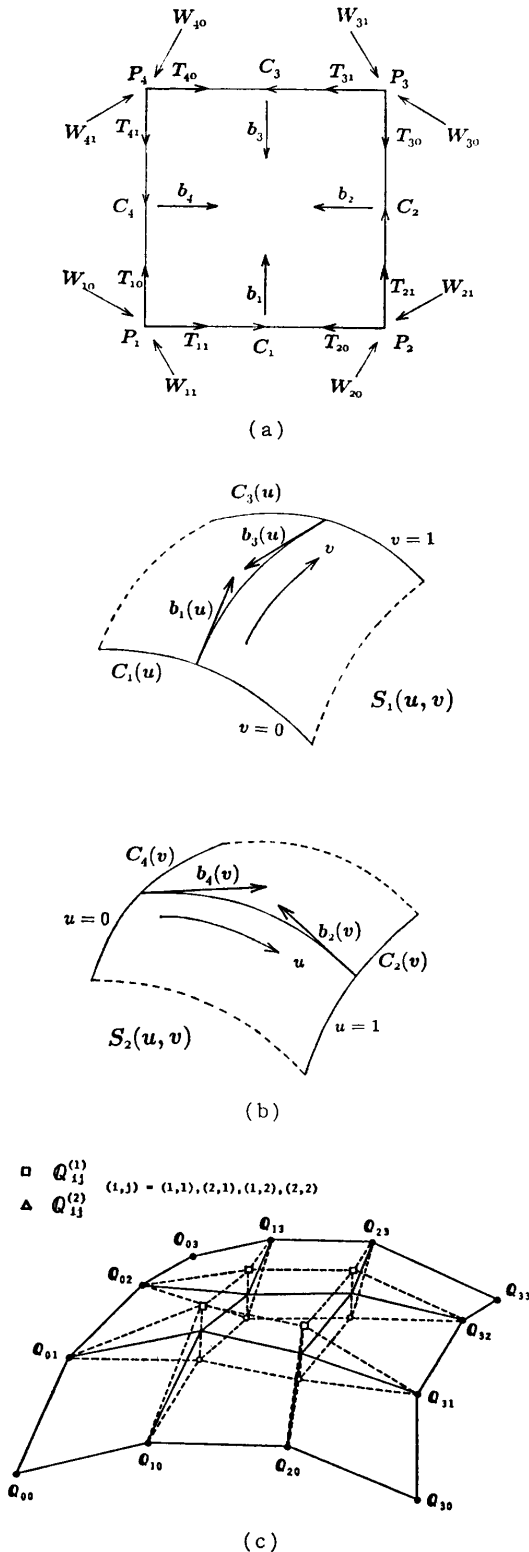


図3 四辺形パッチの構成
Fig. 3 Formation of a rectangular patch.

において、3次 Hermite 補間では厳密に表現できないような境界曲線を用いたいという要求がしばしば発生する。例えば図3 (b)において、 $C_4(v)$ と $b_4(v)$ が3次 Hermite 補間で与えられず、もっと一般である場合の問題である。このときには、二つのロフト曲面 $S_1(u, v)$ と $S_2(u, v)$ を作った上で、Brownの四辺形を次のように構成すればよい¹²⁾。

$$S(u, v) = \frac{u^2(1-u)^2}{u^2(1-u)^2 + v^2(1-v)^2} S_1(u, v) + \frac{v^2(1-v)^2}{u^2(1-u)^2 + v^2(1-v)^2} S_2(u, v) \quad (14)$$

ロフト曲面は、もともとある形状から別の形状にほかにして補間する効果があって、両端での形状は補間式に限らず一般的なものが使える。したがって、大変用途の広いものである。しかし、Gregoryの四辺形では、4本の境界曲線が同じ補間曲線であって、C. B. T. ベクトルだけが異なる曲面の凸結合にしか使えないので、一般のロフト曲面の凸結合を構成するには、Brownの四辺形を用いる^{7), 13)}。もちろん、すべての場合にBrownの四辺形を使って統一的に処理する考え方もあるが、本報告の後半の応用において述べるように、曲面式の微分がなるべく簡単に求められる必要があるので、Gregoryの四辺形を基準に考えることは意味がある。

なお、双3次曲面パッチは Bézier 曲面パッチへの変換が可能であり¹⁴⁾、ここで述べた方法を用いても境界曲線がすべて3次 Hermite 補間で与えられるなら、全体の形状は Bézier 曲面パッチの凸結合で構成できる。本研究では、接続の問題を少し一般的に扱いたいためにロフト曲面に重点をおいて述べたが、それは Bézier 曲面の有用性を損なうものではない。Bézier 曲面は、応用形状処理に便利な形をしているので、得られた形状が Bézier 曲面パッチの凸結合で表現できる場合は、本研究でもこれを利用している。(13)式を Bézier 曲面で表すと、 S_1 と S_2 がそれぞれ Bézier 曲面で表されてそれらの凸結合でパッチが構成される。このときの制御ネットを表したのが図3 (c)である。境界曲線は共有になっているので、境界上の制御頂点は一義的に決まるが、内部の制御頂点は2組与えられていてそれらの重ね合わせで曲面を定義することになる³⁾。図3 (c)ではこれを視覚的に分かりやすいように示してある。

3. 形状制御の詳細

ここでは、二つの事柄を述べる。曲面パッチを不規則にならべて接続し、形状を構成する場合、三辺形パッチが必要になる。もっと一般的な五边形以上のパッチについても多くの提案が行われているが、ここではこの問題には立ち入らない。例えば五边形の領域が生じた場合、一本の境界曲線を入れて三辺形と四辺形に分ける。このようなとき、三辺形パッチが使えらる、通過頂点を新たに増やす必要がない。三辺形パッチを用いる場合でも、パッチ境界曲線上の接続問題が、四辺形パッチと同様に扱えることを示した後に、これらが混在する場合について、境界曲線上の接平面の傾きを変えて形状の修正を行う手法を述べる。

3.1 Bézier 三辺形パッチ

三辺形パッチの接続については、久志本と穂坂がいろいろな場合の定式化を示している¹⁵⁾。ここで議論したいのは、本研究での応用に即した視点から、四辺形パッチについて図2と(4)式を用いて行った考え方が、三辺形パッチが混在しても同等に扱えるようにしたいという点である。そのためには、Bézier 三辺形パッチであれば4次のものを用いればよい^{6), 16)}。図4に

三辺形パッチの場合の条件を示すが、同図(c)に見られるように4次の Bézier 三辺形パッチでは、一つの境界曲線から見たときに二つの制御頂点が見えるので、ツイスト・ベクトルなどが四辺形パッチと同様に扱えるのである。境界曲線上の条件と制御頂点との関係は自明とはいえないので、導出の要点と結果を以下に示す。

三角形の面積座標を u_1, u_2, u_3 とするとき、4次の Bézier 三辺形パッチは次のように定式化される¹⁴⁾。

$$B(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{4-i} \frac{4!}{i!j!k!} u_1^i u_2^j u_3^k Q_{ijk} \quad (i+j+k=4) \quad (15)$$

ここで、 Q_{ijk} は図4に示されている制御頂点である。図4(a)において、一つの辺例えば境界曲線 C_1 に注目する。いろいろな状況で記号を使い分けるため多少まぎらわしくなっているが、図4(a)で P_1, P_2, P_3 が三辺形の通過頂点で、 T_{ij} は接線ベクトル、 W_{ij} はツイスト・ベクトルである。ツイスト・ベクトルまで含めた三つの境界曲線上の条件をすべて満たす一つの Bézier 曲面パッチは作れないので、三辺の境界曲線を共有し、一つずつの辺上の C. B. T. ベクトルを満足する曲面を三つ作り、その凸結合によって三辺形パッチ

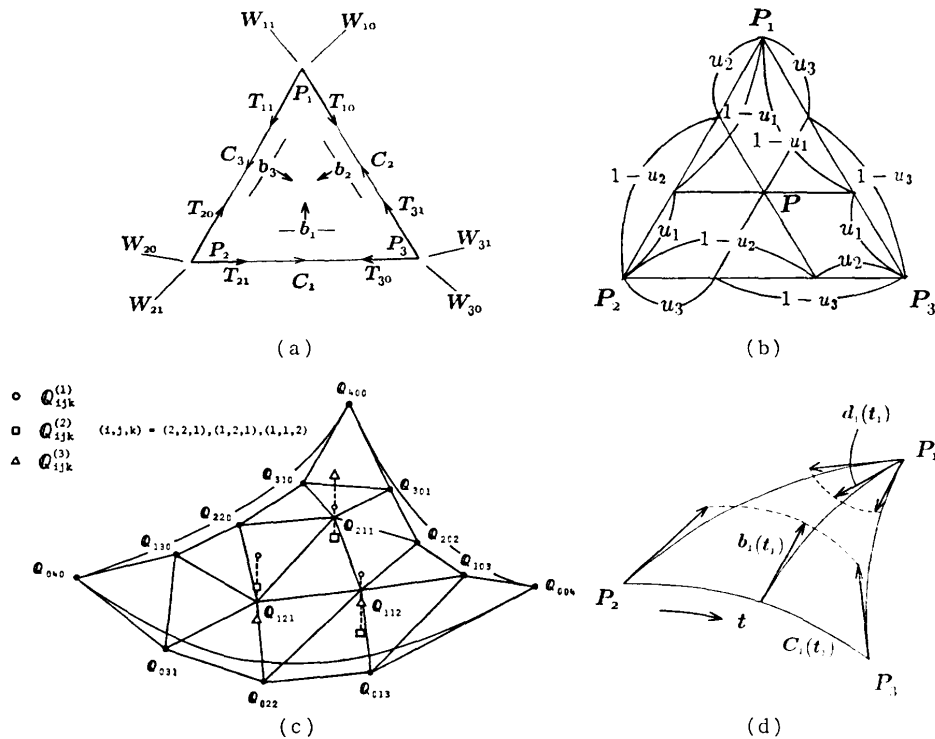


図4 三辺形パッチの構成
Fig. 4 Formation of a triangular patch.

を構成する。いわゆる Gregory の考え方である。

図4の(a)と(c)を対応させて、まず、境界曲線 C_1 が3次 Hermite 補間で与えられるものとすれば、これは3次 Bézier 曲線で表すことができ、さらにこれを形式的に4次の Bézier 曲線で表すことができるから¹⁴⁾、曲線 C_1 を定める制御頂点は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_{040} &= P_2, \quad Q_{004} = P_3 \\ Q_{031} &= P_2 + \frac{1}{4}T_{21}, \quad Q_{013} = P_3 + \frac{1}{4}T_{30} \\ Q_{022} &= \frac{1}{2}\left(P_2 + P_3 + \frac{1}{3}T_{21} + \frac{1}{3}T_{30}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

ほかの2辺の境界曲線 C_2 と C_3 についても同様である。

次に、 C_1 上の C. B. T. ベクトルが(4)式と同様に3次 Hermite 補間で与えられるとすれば、やや複雑な計算になるが、(15)式を微分してこの条件とつき合わせるにより、 C_1 に対応する内部制御頂点は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_{121}^{(1)} &= P_2 + \frac{1}{3}T_{21} + \frac{1}{4}T_{20} + \frac{1}{12}W_{21} \\ Q_{112}^{(1)} &= P_3 + \frac{1}{3}T_{30} + \frac{1}{4}T_{31} + \frac{1}{12}W_{30} \\ Q_{211}^{(1)} &= \frac{1}{2}(Q_{211}^{(2)} + Q_{211}^{(3)}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、制御頂点の右肩の(1)は、 C_1 上の条件を満たす曲面の制御頂点を表している。 $Q_{211}^{(1)}$ については、 C_1 上の条件からは定められない。 C_2 上と C_3 上の条件から二つずつの内部制御頂点が決定されるから、Bézier 曲面の形を形式的に整えるため、(17)式の3番目の式のように定める。(17)式と同様のことを C_2 上の条件と C_3 上の条件についても考えれば、図4(c)のように内部の制御頂点は3組求められることになる。(17)式は、4次の三辺形パッチを扱うときの、コーナ点での条件と Bézier パッチの制御頂点の関係を与えている。単に計算で得られるものであるが、文献には見あたらないので、本システムのために新しく導いたものである。

境界曲線が C_1, C_2, C_3 であって、 C_1 上の C. B. T. ベクトル b_1 を満たす(すなわち(17)式による) Bézier パッチを $B_1(u_1, u_2, u_3)$ と表し、同様に C_2 上の b_2 を満たすパッチを $B_2(u_1, u_2, u_3)$ 、 C_3 上の b_3 を満たすパッチを $B_3(u_1, u_2, u_3)$ とするとき、すべての条件を満たす三辺形パッチを次の凸結合で定義する¹⁷⁾。

$$B(u_1, u_2, u_3) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{u_2 u_3}{u_2 u_3 + u_1 u_3 + u_1 u_2}, \quad \alpha_2 = \frac{u_1 u_3}{u_2 u_3 + u_1 u_3 + u_1 u_2} \\ \alpha_3 &= \frac{u_1 u_2}{u_2 u_3 + u_1 u_3 + u_1 u_2} \end{aligned} \quad (18)$$

パラメータのとりかたは図4(b)に示してあるように、パラメータ u_1 は曲線 C_1 上で0、頂点 P_1 上で1、などとなるように定めている。

以上により、四辺形パッチと同様に、各辺の両端で通過頂点、接線ベクトル、ツイスト・ベクトルが与えられたとき、三辺上のすべての条件を満たす三辺形パッチが構成できる。そして、パッチ接続の仕方も四辺形パッチと同様に扱える。

3.2 四辺形の縮退した三辺形の利用

三辺形の領域ができたときに、もう少し簡潔な方法で三辺形パッチを構成する手法を述べる。上に述べたように、三辺上の C. B. T. ベクトルの条件をすべて満たすためには、Bézier パッチを用いるとしても三つのパッチの重ね合わせになる。この形式を考えるならば、四辺形パッチの一边を縮退させたものを重ね合わせてもよいはずである。もともと、三辺形の領域に四辺形の一边が縮退したものをを用いる考え方は以前からある¹⁴⁾。凸結合でパッチを構成する場合、コーナ点を初めから特異点として扱うので、曲面式を微分する場合にも縮退した点が問題にならないのである。

再び図4(a)にもどり、ロフト曲面の考え方で三辺形パッチを構成する。3本の境界曲線 C_1, C_2, C_3 は四辺形パッチと同様に両端の通過頂点と接線ベクトルから3次 Hermite 補間で構成する。次に、 C_1 上の C. B. T. ベクトル $b_1(t)$ は、これも両端の接線ベクトルとツイスト・ベクトルから、(4)式と同様に3次 Hermite 補間で次のように定める。

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \phi_0(t)T_{20} + \phi_1(t)W_{21} + \phi_0(t)T_{31} \\ &\quad + \phi_1(t)(-W_{30}) \end{aligned} \quad (19)$$

頂点 P_1 から C_1 に向かう方向の接線ベクトルは、頂点 P_1 で一边が縮退しているものと考えて、本研究では次のような簡便な線形補間を導入した(図4(d))。

$$d_1(t) = tT_{11} + (1-t)T_{10} \quad (20)$$

(19)式と(20)式を用いて、一边の縮退したロフト曲面が次のように構成される。

$$\begin{aligned} S_1(u_1, u_2, u_3) &= \phi_0(u_1)C_1(t_1) + \phi_1(u_1)b_1(t_1) \\ &\quad + \phi_0(u_1)P_1 + \phi_1(u_1)(-d_1(t_1)) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 $t_1 = u_3/(u_2 + u_3)$ 。

この S_1 は、境界曲線は C_1, C_2, C_3 のすべてを満たし、

C. B. T. ベクトルは C_1 上の b_1 のみを満たす。同様に、境界曲線を共有し b_2 を満たす S_2 , b_3 を満たす S_3 を構成できるから、(18)式にしたがってこれらの凸結合をつくる。

この三辺形パッチは簡潔であって、後に述べる応用においても式の上で微分を求めることができる。ただし、Bézier 曲面への変換はできないので、形状の全体を制御頂点で表現したい場合には使いにくい。なお、ここでもロフト曲面を基礎にしているから、自由形状の周辺で3次 Hermite 補間で表せない境界曲線が使われる場合も処理できる。このときには、(18)式の凸結合の重みにおいて、分子分母の各因子 $(u_i u_j)$ をすべて2乗したものを用いる¹⁸⁾。これは、Brown の四辺形と同じで、実際に微分して確かめられるが、境界曲線を共有しないような面の凸結合に用いられる。

3.3 境界曲線上の接平面の修正

期待どおりの形状モデルを作り上げるには、いくつかの段階を経て修正を加えることが必要である。2.1 節で、ワイヤフレーム・モデルにおいてコーナ点での接線ベクトルの修正について述べた。ツイスト・ベクトルはパッチ接続の条件から決定しているが、前に述べたように、若干の自由度があるので修正の余地がある。ただし、ツイスト・ベクトルを直接修正するのは人の感覚にあわないので、本研究では次のような操作法を用意している。

図5(a)に示すように、ディスプレイ上のカーソルを動かしてパッチのどのあたりをふくらませたりくぼませたりしたいかを指定する。2.2 節で述べたように一つのツイスト・ベクトルを操作しても自由度があまりないので、一つのパッチの構成に関与しているコーナ点のツイスト・ベクトル全体を修正し、境界曲線上の接平面の傾きを変えて形状制御に活かそうとするのがここでの基本的考え方である。

ツイスト・ベクトルの修正の仕方を図5(b)に示

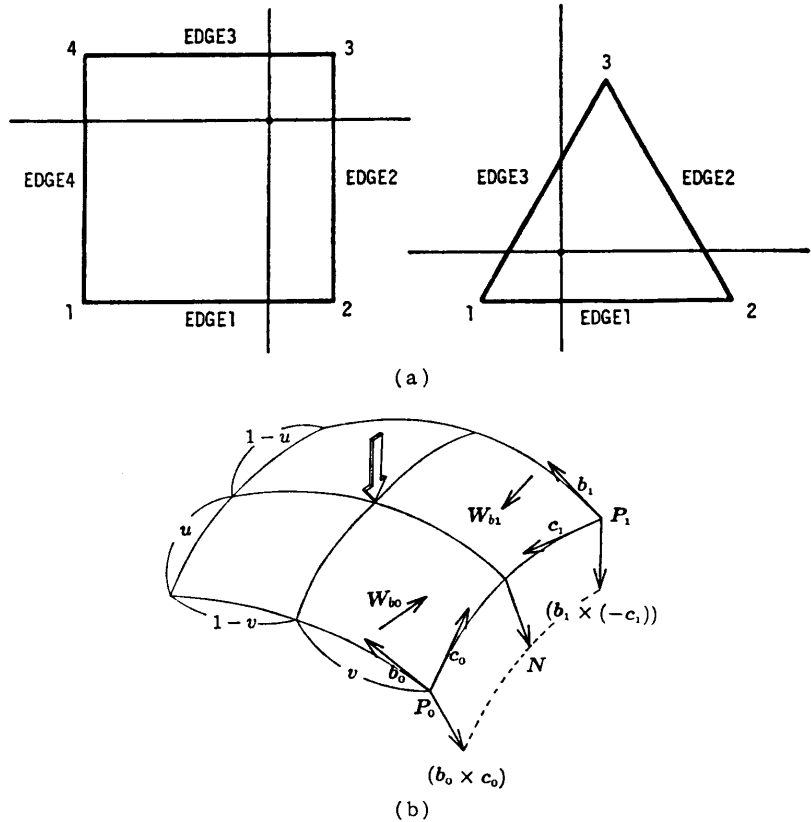


図5 ツイスト・ベクトルの修正
Fig. 5 Modification of twist vectors.

す。パッチの接続に関する修正であるから図2の記号を用い、図2と併せて考えて、ロフト曲面の一本の境界曲線に注目する。頂点 P_0 における法線ベクトル $(b_0 \times c_0)$ と頂点 P_1 における法線ベクトル $(b_1 \times (-c_1))$ から、曲面を修正する方向を表すベクトルを

$$N = (b_0 \times c_0)(1-u) + (b_1 \times (-c_1))u \tag{22}$$

のように定める。これを用いて望ましいツイスト・ベクトルを次のように設定する。

$$W^*_{b0} = b_1 - b_0 + (1-u)(1-v)rN$$

$$W^*_{b1} = b_0 - b_1 + u(1-v)rN \tag{23}$$

ここで、 r は操作する量を表し、 $r=0$ ならば(10)式に一致する。また符号のとりかたによって、ふくらませたりくぼませたりできることになる。実際のツイスト・ベクトルは、(23)式を(9)式に適用して最小解を求める。(23)式では簡単のため、ツイスト・ベクトルを接線ベクトルの差分として扱っている。

他の境界曲線についても同様の定式化ができるので、それらの総合的効果がパッチの形状に現れる。ただし、このような操作法を用意しても定量的な操作量

を把握できるわけではないので、パラメータは試行錯誤によって入力せざるを得ない。簡単な例を図6に示す。(a)はもともと平面であって、境界曲線上の接線ベクトルはすべて同一平面上にある。そして、ツイスト・ベクトルの修正によってくぼみを作っている例である。(b)の場合も、左右の図ではツイスト・ベクトルだけが異なっている。境界曲線上の接平面の傾きを変えることになるから、形状修正の効果は隣接するパッチにも影響する。この操作法は、ユーザに形状修正のツールを提供しているのにすぎないが、2章のパッチ接続法に従って、ツイスト・ベクトルの変更というややとらえにくい制御法を、見方を変えてユーザの感覚にあうように扱っているのである。

4. 応用形状処理としての工具経路生成

これから応用を考えるに当たっては、形状を構成できるだけでなく、形状の性質を把握できることが必要である。ここでは、数値制御のための工具経路生成について一つの論点を述べる。同時3軸制御で工具の姿勢はz軸方向に固定され、ボールエンドミルで切削を行う場合を考える。このとき、切削負荷を軽減する意味で、スロープの急なところではxy平面に平行な等高線の工具経路が望まれる。これらのことを考慮し

て、本研究では、二つの段階によって曲面形状の性質を把握した上で工具経路を生成している。第一段階は、大域的にみて大きく山状の領域と盆地状の領域に分ける。多峰性の曲面であればそれぞれの山を分離する。第二段階は、それぞれの領域について勾配を調べてスロープの急な部分と緩やかな部分に分け、さらに局所的な性質として曲率半径を求め、工具径と許容公差を調べて工具オフセットを行う¹⁹⁾。

曲面形状の性質については、微分幾何学的な量を用いて議論される²⁰⁾⁻²²⁾。とくに重要なのは曲面の第一基本量と第二基本量である。曲面上の点を $S(u, v)$ 、法線ベクトルを e と表すと、これらは次のようになる。

$$E = S_u \cdot S_u, \quad F = S_u \cdot S_v, \quad G = S_v \cdot S_v$$

$$L = e \cdot S_{uu}, \quad M = e \cdot S_{uv}, \quad N = e \cdot S_{vv} \quad (24)$$

曲面上のある接線ベクトルが $t = S_u du + S_v dv$ で指定されるとき、この方向の法曲率は

$$\kappa(t) = \frac{L du^2 + 2M dudv + N dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2} \quad (25)$$

で与えられる。 t の向きを変えることによって最大曲率や最小曲率が求められ、局所的な曲面の性質の把握に用いられる。

第一段階の大きく領域を分ける議論はあまり行われていないので、ここで簡単な例を示す。画像処理の分

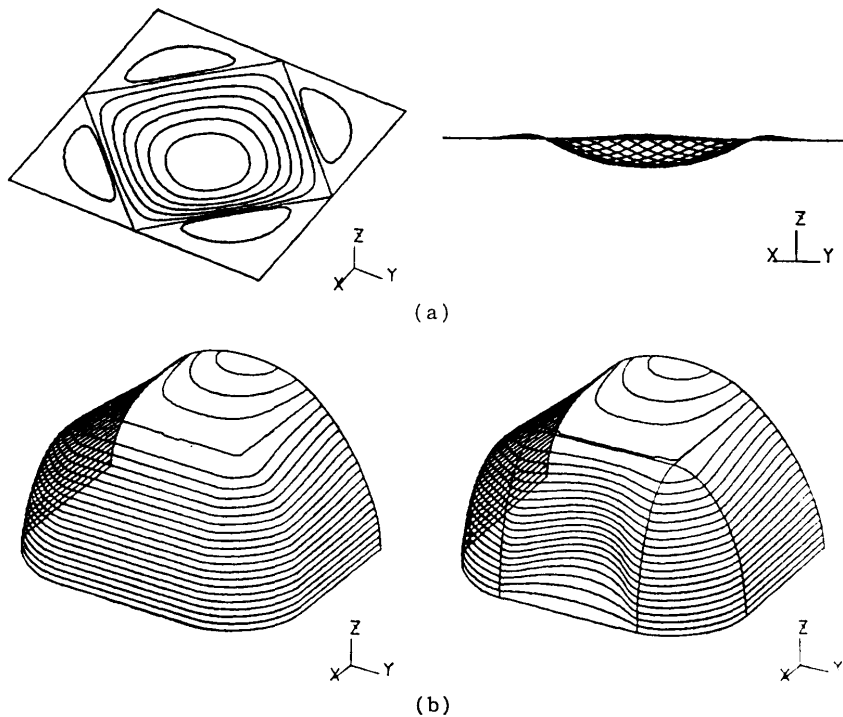


図6 ツイスト・ベクトル操作の応用例

Fig. 6 Shape modification using twist vectors manipulation.

野で、曲面の等高線の変曲点を連ねた曲線がこのような領域の分離に役立つことが示されている²³⁾。(25)式において、 xy 平面に平行な等高線上の接線ベクトルは z 成分が 0 であることから、 $du/dv = -z_v/z_u$ であり、等高線に沿う方向の法曲率は、

$$\kappa = \frac{L z_v^2 - 2M z_u z_v + N z_u^2}{E z_v^2 - 2F z_u z_v + G z_u^2} \quad (26)$$

となる。等高線の変曲点を連ねた曲線は(26)式の分子を 0 とおくことにより、次式で定義される。

$$D(u, v) = [-z_v, z_u] \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z_v \\ z_u \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

図 7 に、B スプライン曲面にこの考え方を適用して工具経路を生成する模式図を示す。図 7 (a) が作成された曲面で、これをパラメータ平面で格子状に分割し、(27)式左辺の符号を調べると同図(b)が得られる。ここで符号が入れかわる境界をたどっていくと(c)の分割線が求められる。次に、各領域について等高線工具経路を生成するが、スロープの緩やかなとこ

ろでは、ある程度領域をまとめて単純に往復する工具経路とする²⁴⁾。まだ完全な自動化はむずかしく、最後の過程では人の判断を必要とする。

さて、形状構成法の本論にもどる。上に述べたように、曲面の性質を調べるには第一基本量、第二基本量の算出が必要であり、曲面式の導関数が精度よく計算できなければならない。この考え方は、本研究で扱っているようなパッチを不規則に並べて形状を作る場合でも重要である。このため、2章、3章で述べたパッチについて、Gregory の四辺形と一辺を縮退させた三辺形パッチについては、導関数を式の上で求め、プログラムに組み込んである。曲率関連の計算はこれに基づいて求め、工具経路生成を試みている。ただし、凸結合を用いている関係で通過頂点では導関数は定義されていないし、接続の条件も接平面連続の条件だけであるから、一部については差分に頼らざるをえない。工具経路生成全般については完全な自動化はむずかしく、人の判断の介入は必要である。上に述べた大

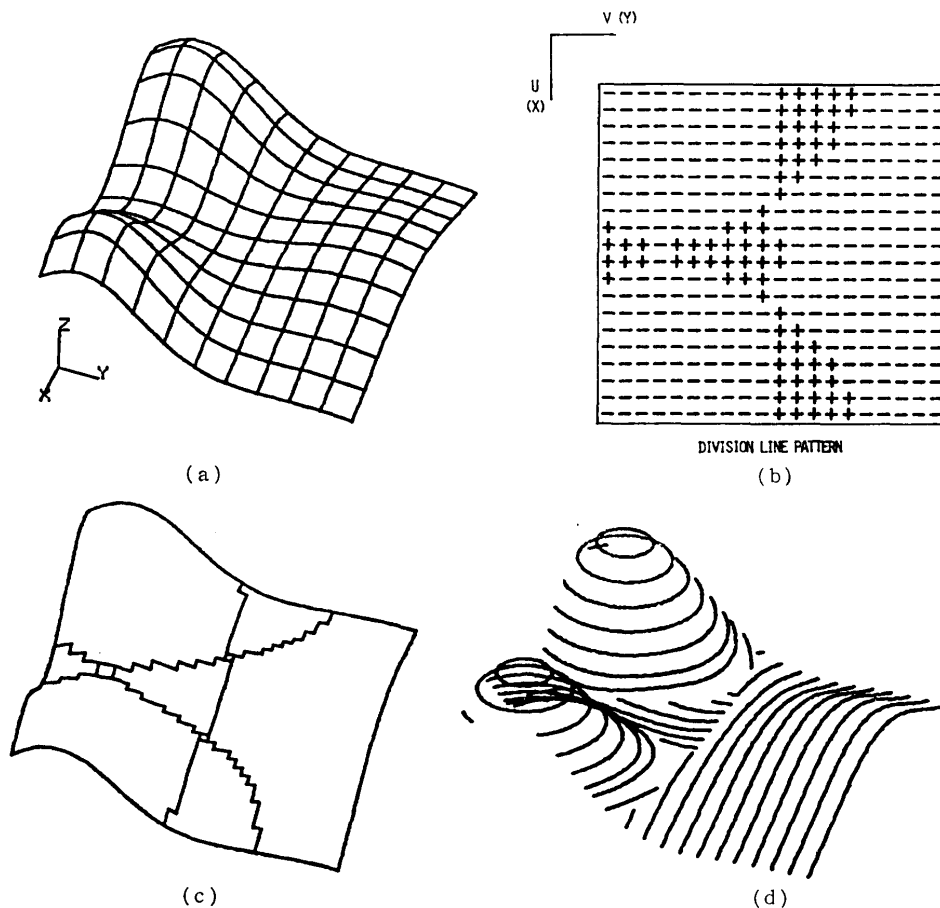


図 7 工具経路生成模式図
Fig. 7 Surface division and tool path generation.

域的性質についても、コンピュータは領域を細かく細分し過ぎる傾向がみられる。しかし、形状の性質を把握するためにも微分幾何学的な量が重要であることは明らかで、形状構成の段階でこのことを考慮しておくことは重要であると思われる。

5. おわりに

本研究においては、一つ一つのパッチの定式化はすでに提案されているものばかりで新しいものではない。全体的な形状を作り上げ、それを応用に結びつけていく場合、接平面や曲率といった微分幾何学的な量が重要になるという点に主眼をおいている。議論の内容は、そのようなシンセシスの問題である。主要な論点を要約すると次のようになる。

1) いろいろな場合の接続の問題を統一的に扱うため、パッチの構成をロフト曲面を基準にして考え、その後応用に応じて Bézier 曲面に変換する考え方を採用した。2) 一般的な形状モデルの中に取り込んでいけるように、データ構造は多面体の場合の拡張になっており、自由形状の周辺においては Brown の凸結合を採用している。3) 接平面の傾きによって形状を作るという点を強調して、ツイスト・ベクトル修正の手法を提案している。4) パッチの並びが不規則になると三辺形パッチが必要になるため、Bézier 三辺形パッチとロフト曲面を縮退させた三辺形の使い分けができるようにし、パッチの接続の仕方は統一的に扱っている。5) 応用形状処理においても、接平面の傾きや曲率などの評価による形状の性質の把握が重要であることを、工具経路生成の簡単な例で示した。

形状を作り上げていく過程はいろいろな方法があったよと思われるので、本研究で一つのアプローチを示したが、一般的な多辺形パッチの取り込みはまだ行われておらず、応用における形状の性質把握も十分ではない。これらが今後の課題である。

謝辞 このシステムは、大阪大学大型計算機センターを利用して作成されている。また、現在、科学研究費補助金(課題番号 63550188)を受けて、コンピュータ・コントローラにおける形状処理の取扱いの研究を行っている。プログラム作成には、尾坂匡隆氏、木本正英氏、井上智之氏に協力を頂いた。厚くお礼申し上げます。

参考文献

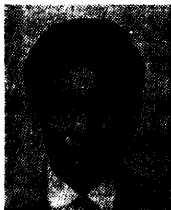
1) 穂坂 衛, 木村文彦: 3次元自由形状設計制御理論とその手法, 情報処理, Vol. 21, No. 5, pp.

- 481-492 (1980).
 2) 山口富士夫: コンピュータディスプレイによる自由曲面の一設計方式(第3報), 精密機械, Vol. 43, No. 10, pp. 1141-1148 (1977).
 3) Chiyokura, H. and Kimura, F.: Design of Solids with Free-Form Surfaces, *ACM Comput. Gr.*, Vol. 17, No. 3, pp. 289-298 (1983).
 4) 上西博文, 矢島章夫: 広域曲面補間法, 情報処理学会論文誌, Vol. 27, No. 4, pp. 401-410 (1986).
 5) 倉賀野哲造, 佐々木伸夫, 菊池 敦: 意匠的に特徴ある自由形状の設計およびその工具経路自動生成システムの開発, 精密工学会誌, Vol. 55, No. 12, pp. 2169-2174 (1989).
 6) 高井憲二郎: カメラ用自由曲面生成処理システム, 精密工学会誌, Vol. 54, No. 10, pp. 1897-1902 (1988).
 7) 塩谷景一: 3次元 CAD/CAM における形状処理技術, p. 180, 日刊工業新聞社, 東京 (1989).
 8) 塩谷景一, 山縣敬一, 牧之内三郎: アウトラインの入力による自由曲面の設計方式, 精密工学会誌, Vol. 52, No. 3, pp. 478-484 (1986).
 9) 中村一夫, 牧之内三郎, 山縣敬一: 三角形パッチの混在する制御ネットによる自由曲面, 精機学会昭和58年度関西地方定期学術講演会講演論文集, pp. 75-76 (1983).
 10) Gregory, J. A.: Smooth Interpolation without Twist Constraints, in *Computer Aided Geometric Design* (Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R. F. eds.), pp. 71-87, Academic Press, New York (1974).
 11) Gregory, J. A.: C_1 Rectangular and Non-Rectangular Surface Patches, in *Surfaces in CAGD* (Barnhill, R. E. and Boehm, W. eds.), pp. 25-33, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1983).
 12) Barnhill, R. E., Brown, J. H. and Kluczewicz, I. M.: A New Twist in Computer Aided Geometric Design, *Comput. Gr. Image Process.*, Vol. 8, pp. 78-91 (1978).
 13) 大野義夫: CAGD 入門曲面(3), bit, Vol. 14, No. 2, pp. 188-197, 共立出版, 東京 (1982).
 14) 山口富士夫: コンピュータディスプレイによる形状処理工学 [I] [II], 日刊工業新聞社, 東京 (1982).
 15) 久志本琢也, 穂坂 衛: 三辺形パッチの接続とその応用, 精密工学会誌, Vol. 55, No. 10, pp. 1799-1804 (1989).
 16) 中村淳良, 山縣敬一, 尾坂匡隆, 牧之内三郎: 不規則なネットによる自由曲面の相貫線算出, 昭和60年度精機学会秋季大会学術講演会講演論文集, pp. 287-288 (1985).
 17) 菊池 敦, 倉賀野哲造: ランダムデータに対する三辺形パッチを用いた自由曲面生成法, 昭和60年度精機学会秋季大会学術講演会講演論文集, pp. 281-282 (1985).

- 18) 倉賀野哲造, 菊池 敦: 線図からの自由曲面生成の一方法 (第5報), 昭和60年度精機学会秋季大会学術講演会講演論文集, pp. 283-284 (1985).
- 19) 木本正英, 山縣敬一, 牧之内三郎: 自由曲面の特徴抽出に基づく工具経路の自動生成, 精密工学会昭和62年度関西地方定期学術講演会講演論文集, pp. 73-74 (1987).
- 20) Beck, J. M., Farouki, R. T. and Hinds, J. K.: Surface Analysis Methods, *IEEE Comput. Gr. Appl.*, Vol. 6, No. 12, pp. 18-36 (1986).
- 21) 長田 正, 査 紅彬: 曲面の微分特徴量の抽出と法ベクトル図の分割, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 8, pp. 954-961 (1989).
- 22) 穂坂 衛, 東 正毅, 久志本琢也: 自由曲面の特徴および評価に関係する諸量および表示, 平成元年度「グラフィクスとCAD」シンポジウム論文集, pp. 45-53 (1989).
- 23) 榎本 肇, 片山卓也, 吉田孝登志: 画像構造線の大域的性質に関する計算機実験とその考察, 情報処理, Vol. 17, No. 7, pp. 641-649 (1976).
- 24) 隅田 敏, 牧之内三郎, 山縣敬一: 自由曲面の特徴抽出に基づく加工情報の生成, 精機学会昭和57年度関西地方定期学術講演会講演論文集, pp. 27-28 (1982).

(平成元年12月11日受付)

(平成2年6月4日採録)



山縣 敬一 (正会員)

昭和15年生。昭和38年京都大学工学部数理工学科卒業。同大学大学院を経て、昭和43年より大阪大学大型計算機センター助手。昭和46年大阪大学工学部精密工学科助手。

現在、同助教授。工学博士。設計と生産における情報処理基礎、とくにCADにおけるマンマシン・インタフェース、生産セルのコンピュータ・コントローラ、生産システムのモデリングに関する研究に従事。IEEE、精密工学会、システム制御情報学会各会員。



中村 淳良

昭和35年生。昭和60年大阪大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了。昭和61年、シャープ(株)入社。現在、シャープ(株)技術本部生産技術開発センター勤務。主として、FA用画像処理装置、自動化装置の開発に従事。

パターン認識、並列処理技術に興味を持つ。



中村 一夫

昭和32年生。昭和58年大阪大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了。同年、(株)島津製作所入社。現在第一科学計測事業部第2工場にてラボラトリーオートメーションシステムの開発に従事。ロボットを利用した分析化学の自動化に興味を持つ。



隅田 敏 (正会員)

昭和32年生。昭和57年大阪大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了。同年、東京芝浦電気(株)入社。現在(株)東芝・生産技術研究所研究主務。主として、CAD/CAM、ロボット制御ソフトウェアの開発に従事。計算機援用の情報生成システム、マンマシンインタフェースに興味を持つ。



塩谷 景一 (正会員)

昭和32年生。昭和56年大阪大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了。同年、三菱電機(株)入社。昭和62年工学博士(大阪大学)。現在、同産業システム研究所所属。

CAD/CAMシステムの研究開発に従事。IEEE Computer Society、精密工学会各会員。



牧之内三郎 (正会員)

大正13年生。昭和21年大阪帝国大学工学部精密工学科卒業。昭和23年同大学院特別研究生前期修了。工学博士。昭和23年大阪大学工学部助手。以後、助教授、教授を経て昭和62年大阪大学停年退官、名誉教授。同年帝国女子大学教授。昭和63年大阪国際大学経営情報学部教授。電子計算機の試作研究、数値解析に関する研究、総合生産システムに関する研究などに従事。著書「計算機械」、「数値解析」ほか。精密工学会会員。