

接平面が連続となる有理 Bézier 曲面の接続方法†

原田 毅士†† 鳥谷 浩志††

三次元形状を計算機内部に表現する場合、形状を持つ曲面の表現形式の一つとして有理 Bézier 曲面がある。有理 Bézier 曲面とは、Bézier 曲面のそれぞれの制御点に重みを持たせて拡張したもので、工学的に重要な円柱、円錐、球といった自然二次曲面を正確に表現できるという利点を持つ。しかし、従来の手法では、接平面が連続になるように有理 Bézier 曲面同士を接続する汎用的な手法がなかった。そこで本論文では、接平面連続を保ちながら二つの有理 Bézier 曲面を接続するための、制御点と重みの条件式を導出した。この条件式を満たすように有理 Bézier 曲面の制御点と重みを生成すれば、二つの曲面を滑らかに接続することができる。さらに、有理曲線を境界を持つ曲線モデルから曲面を内挿する方法として、ここで導いた条件式が有効である。

1. はじめに

設計作業を計算機によって支援する CAD システムの重要性が近年ますます増してきており、設計者の関心は二次元から三次元の扱えるものへ、しかも複雑な曲面を表現できるシステムへと移ってきている。その中で、沖野、Braid らによって提案されたソリッドモデル (solid model) の手法は、三次元 CAD システムの基礎として用いられている^{1),2)}。ソリッドモデルとは、立体の三次元形状を計算機内部に表現する手法のことであり、このモデルを扱うシステムはソリッドモデラ (solid modeler) と呼ばれる。

実際の設計作業で扱う立体は、複雑な形状を持つものが多いため、ソリッドモデラは様々な自由曲面を取り扱う必要がある。その自由曲面の表現形式としては、Coons 曲面³⁾、Bézier 曲面⁴⁾、B-spline 曲面⁵⁾などの多項式表現や、有理 Bézier 曲面、NURBS (non-uniform rational B-spline surface)⁶⁾などの有理式表現がある。従来は、Bézier 曲面などの多項式表現がよく用いられてきたが、最近では NURBS などの有理式表現が主流になってきている。なぜなら、有理式で表されている自由曲面は、多項式曲面をすべて包含しており、かつ円柱面、円錐面、球面といった自然二次曲面を正確に表現できるという利点を持つからである。Piegl らは、工学的に重要な自然二次曲面を NURBS で正確に表現する手法について述べている⁶⁾。

ソリッドモデラで自由曲面を扱う場合、立体を持つ複雑な曲面を複数の自由曲面で近似することになるた

め、自由曲面同士を滑らかに接続する必要がある。また、立体の角にフィレットが付けられている場合も、曲面同士を滑らかに接続しなければならない。Bézier 曲面などの多項式表現の自由曲面については、Faux, 千代倉, Liu らにより、接平面連続 (G^1 連続) となるよう 2 枚の自由曲面を接続する手法が確立されている⁷⁾⁻⁹⁾。しかし、NURBS など有理式表現の自由曲面については、接平面連続を保つ接続法はまだ示されていない。

そこで、本論文では有理式で表現された自由曲面の一つである有理 Bézier 曲面を、接平面が連続になるように接続する条件を導くことにする。この条件式を用いれば、機械部品に数多く見られる自然二次曲面と自由曲面を滑らかにつなぐ、ということも可能になる。自然二次曲面と自由曲面の滑らかな接続は、立体の角を丸めるフィレット付けなどで大きな役割を果たすことができる。

2. 有理 Bézier 曲面の表現形式

有理 Bézier 曲面とは、Bézier 曲面が持つそれぞれの制御点に重みを付け加えて拡張したものである。本論文では、双三次有理 Bézier 曲面についてその接続条件を導くため、以下に双三次の有理 Bézier 曲面式を示す。

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij} w_{ij}}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) w_{ij}} \quad (1)$$

ただし、

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

この式から分かるように、双三次有理 Bézier 曲面

† G^1 Continuity Condition between Rational Bézier Surface Patches by TSUYOSHI HARADA and HIROSHI TORIYA (Software Division, RICOH Company Ltd.).

†† (株)リコーソフトウェア事業部

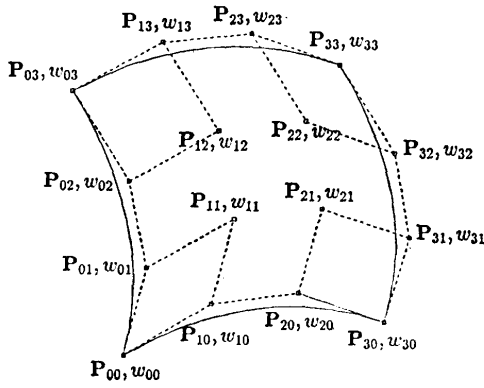


図 1 双三次有理 Bézier 曲面
Fig. 1 Bicubic rational Bézier surface patch.

は、16 個の制御点と 16 個の重みを持つ。図 1 に双三次有理 Bézier 曲面の制御点と重みを示す。

二つの双三次有理 Bézier 曲面を接平面が連続になるように接続するときには、境界曲線上での u 方向の一階微分と v 方向の一階微分が重要になる。なぜなら、境界曲線上での接平面の法線ベクトルは、境界上での u 方向の一階微分と v 方向の一階微分の外積になるからである。そこで、(1)式における境界曲線 $v=0$ 上の u 方向、 v 方向の一階微分の式を次に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{S}(u, 0)}{\partial u} = \frac{3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^2 B_{i-1}^2(u) B_j^2(u) (\mathbf{P}_{i0} - \mathbf{P}_{j0}) w_{i0} w_{j0}}{\left(\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i0} \right)^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}(u, 0)}{\partial v} = \frac{3 \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(u) (\mathbf{P}_{i1} - \mathbf{P}_{j0}) w_{i1} w_{j0}}{\left(\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i0} \right)^2} \quad (3)$$

境界曲線 $v=0$ における接平面は、境界曲線上の制御点 $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{20}, \mathbf{P}_{30}$ と重み $w_{00}, w_{10}, w_{20}, w_{30}$ そして、それに隣接する制御点 $\mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{21}, \mathbf{P}_{31}$ と重み $w_{01}, w_{11}, w_{21}, w_{31}$ により決まることが、(2)式、(3)式から分かる。このことは、すべての境界曲線において成立する。

3. 有理 Bézier 曲面の接続条件

2章では、双三次有理 Bézier 曲面の式と境界曲線

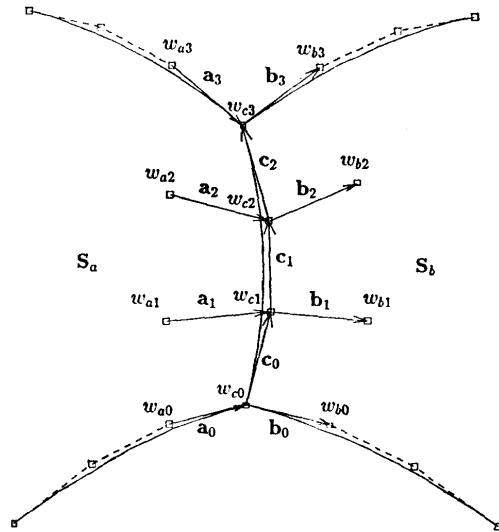


図 2 双三次有理 Bézier 曲面の接続
Fig. 2 Connection of two bicubic rational Bézier surface patches.

上での u, v による一階微分の式を示した。ここでは、それらの式を利用して図 2 に示す二つの双三次有理 Bézier 曲面が、境界曲線上で接平面連続になる十分条件を導くことにする。なお、 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は、曲面 S_a 上の制御点間ベクトル、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は、曲面 S_b 上の制御点間ベクトル、 $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ は、二つの曲面 S_a, S_b の境界曲線上の制御点間ベクトルを表している。また、 $w_{a0}, w_{a1}, w_{a2}, w_{a3}$ と $w_{b0}, w_{b1}, w_{b2}, w_{b3}$ は、それぞれ曲面 S_a, S_b 上で境界曲線に隣接する重みを示し、 $w_{c0}, w_{c1}, w_{c2}, w_{c3}$ は、二曲面の境界曲線上の重みを示している。

接平面が連続であるという条件のもとでは、境界曲線上の任意の点における次の三つの微分ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{S}_a(1, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{S}_a(1, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathbf{S}_b(0, v)}{\partial u}$$

が必ず同一平面上に存在しなければならない。このことは、任意の v ($0 \leq v \leq 1$) について次の(4)式を成立させる二つのスカラー関数 $k(v), h(v)$ が存在する、ということと同値である。

$$\frac{\partial \mathbf{S}_b(0, v)}{\partial u} = k(v) \frac{\partial \mathbf{S}_a(1, v)}{\partial u} + h(v) \frac{\partial \mathbf{S}_a(1, v)}{\partial v} \quad (4)$$

接平面が連続であるので、二曲面の境界曲線の端点における三つのベクトル $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$ と $\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_2$ はそれぞれ同一平面上に存在する必要がある。このとき、次の式を満たすような k_0, k_1, h_0, h_1 が必ず存在する。

$$w_{b0}b_0 = k_0w_{a0}a_0 + h_0w_{c1}c_0 \quad (5)$$

$$w_{b3}b_3 = k_1w_{a3}a_3 + h_1w_{c2}c_2 \quad (6)$$

ここでは、(4)式が $v=0$ で(5)式を、 $v=1$ で(6)式をそれぞれ満たすようにするために、二つのスカラー関数 $k(v)$, $h(v)$ が、次のような一次式であると仮定する。一次式と仮定したのは、数式の処理を簡単にするためである。

$$k(v) = (1-v)k_0 + vk_1 \quad (7)$$

$$h(v) = (1-v)h_0 + vh_1 \quad (8)$$

この仮定のもとで、任意の v ($0 \leq v \leq 1$) について(4)式を満たす条件を求めると、二つの双三次有理 Bézier 曲面を接平面連続にする十分条件が得られる。

2章で示した(2), (3)式から分かるように、境界曲線上の u 方向、 v 方向の一階微分は、制御点間ベクトルと境界曲線に隣接した重みのみで表すことができる。したがって、ここで仮定した(7), (8)式を基に、(4)式を図2の制御点間ベクトルと重みを用いて表すと、以下の(9)式になる。ただし、式を分かりやすくするため、制御点 P_i ($i=0, 1, \dots, n$) で表される Bézier 関数を、 $\sum_{i=0}^n B_i^*(v)P_i = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ という記号を用いて表すことにする。

$$\begin{aligned} & \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\} \\ & = \{(1-v)k_0 + vk_1\} \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} \\ & \quad + \{(1-v)h_0 + vh_1\} \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\} \quad (9) \end{aligned}$$

ただし、

$$A_0 = w_{a0}w_{c0}a_0$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(w_{a0}w_{c1}a_0 + w_{a1}w_{c0}a_1 + (w_{a0}w_{c1} - w_{a1}w_{c0})c_0)$$

$$A_2 = \frac{1}{5}(w_{a0}w_{c2}a_0 + 3w_{a1}w_{c1}a_1 + w_{a2}w_{c0}a_2 + (w_{a0}w_{c2} - w_{a2}w_{c0})(c_0 + c_1))$$

$$A_3 = \frac{1}{20}(w_{a0}w_{c3}a_0 + 9w_{a1}w_{c2}a_1 + 9w_{a2}w_{c1}a_2 + w_{a3}w_{c0}a_3 + 9(w_{a1}w_{c2} - w_{a2}w_{c1})c_1 + (w_{a0}w_{c3} - w_{a3}w_{c0})(c_0 + c_1 + c_2))$$

$$A_4 = \frac{1}{5}(w_{a1}w_{c3}a_1 + 3w_{a2}w_{c2}a_2 + w_{a3}w_{c1}a_3 + (w_{a1}w_{c3} - w_{a3}w_{c1})(c_1 + c_2))$$

$$A_5 = \frac{1}{2}(w_{a2}w_{c3}a_2 + w_{a3}w_{c2}a_3 + (w_{a2}w_{c3} - w_{a3}w_{c2})c_2)$$

$$A_6 = w_{a3}w_{c3}a_3$$

$$B_0 = w_{b0}w_{c0}b_0$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(w_{b0}w_{c1}b_0 + w_{b1}w_{c0}b_1 + (w_{b0}w_{c1} - w_{b1}w_{c0})c_0)$$

$$B_2 = \frac{1}{5}(w_{b0}w_{c2}b_0 + 3w_{b1}w_{c1}b_1 + w_{b2}w_{c0}b_2 + (w_{b0}w_{c2} - w_{b2}w_{c0})(c_0 + c_1))$$

$$B_3 = \frac{1}{20}(w_{b0}w_{c3}b_0 + 9w_{b1}w_{c2}b_1 + 9w_{b2}w_{c1}b_2 + w_{b3}w_{c0}b_3 + 9(w_{b1}w_{c2} - w_{b2}w_{c1})c_1 + (w_{b0}w_{c3} - w_{b3}w_{c0})(c_0 + c_1 + c_2))$$

$$B_4 = \frac{1}{5}(w_{b1}w_{c3}b_1 + 3w_{b2}w_{c2}b_2 + w_{b3}w_{c1}b_3 + (w_{b1}w_{c3} - w_{b3}w_{c1})(c_1 + c_2))$$

$$B_5 = \frac{1}{2}(w_{b2}w_{c3}b_2 + w_{b3}w_{c2}b_3 + (w_{b2}w_{c3} - w_{b3}w_{c2})c_2)$$

$$B_6 = w_{b3}w_{c3}b_3$$

$$C_0 = w_{c0}w_{c1}c_0$$

$$C_1 = \frac{1}{2}w_{c0}w_{c2}(c_0 + c_1)$$

$$C_2 = \frac{1}{6}(w_{c0}w_{c3}(c_0 + c_1 + c_2) + 3w_{c1}w_{c2}c_1)$$

$$C_3 = \frac{1}{2}w_{c1}w_{c3}(c_1 + c_2)$$

$$C_4 = w_{c2}w_{c3}c_2$$

以上述べてきたことから、二つの双三次有理 Bézier 曲面を接平面が連続になるように接続する十分条件を求めるためには、11個の制御点間ベクトル

$$a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2$$

と、12個の重み

$$w_{a0}, w_{a1}, w_{a2}, w_{a3}, w_{b0}, w_{b1}, w_{b2}, w_{b3}, w_{c0}, w_{c1}, w_{c2}, w_{c3}$$

が、任意の v ($0 \leq v \leq 1$) について、(9)式を満たす条件を導けばよいことになる。式の詳細な導出過程は付録に記すが、求める接続条件は、(10)式から(12)式までの重みの関係式三つと、(13)式から(15)式までの制御点間ベクトルの関係式三つの、合計六つの式になる。

$$\begin{aligned} & w_{c0}w_{c3}(k_0 - k_1)(w_{a0} - 3w_{a1} + 3w_{a2} - w_{a3}) \\ & = g(w_{c0} - 3w_{c1} + 3w_{c2} - w_{c3}) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3w_{c0}w_{c3}(w_{b1} + k_0w_{a1}) \\ & = -w_{a0}w_{c3}(k_1w_{c0} - 3k_0w_{c1}) + k_1w_{a3}w_{c0}^2 \\ & \quad - w_{b0}w_{c3}(w_{c0} - 3w_{c1}) + w_{b3}w_{c0}^2 \\ & \quad - h_0w_{c3}(w_{c0}^2 - 2w_{c0}w_{c1} - 2w_{c0}w_{c2} + 3w_{c1}^2) \\ & \quad + h_1w_{c0}(w_{c0}w_{c2} + w_{c1}w_{c3} - 2w_{c0}w_{c3}) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3w_{c0}w_{c3}(w_{b2} + k_1w_{a2}) \\
& = k_0w_{a0}w_{c3}^2 + w_{a3}w_{c0}(3k_1w_{c2} - k_0w_{c3}) \\
& \quad + w_{b0}w_{c3}^2 + w_{b3}w_{c0}(3w_{c2} - w_{c3}) \\
& \quad - h_0w_{a3}(w_{c0}w_{c2} + w_{c1}w_{c3} - 2w_{c0}w_{c3}) \\
& \quad + h_1w_{c0}(3w_{c2}^2 - 2w_{c1}w_{c3} - 2w_{c2}w_{c3} + w_{c3}^2)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& w_{c0}w_{c3}(k_0 - k_1)(w_{a0}a_0 - 3w_{a1}a_1 + 3w_{a2}a_2 - w_{a3}a_3) \\
& = -w_{c0}w_{c3}(k_0 - k_1) \\
& \quad \cdot (w_{a0}c_0 + (w_{a0} - 3w_{a1})c_1 + w_{a3}c_2) \\
& \quad + g(w_{c0}c_0 + (w_{c0} - 3w_{c1})c_1 + w_{c3}c_2)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& 3w_{b1}b_1 \\
& = -(k_0 - k_1)w_{a0}a_0 + 3k_0w_{a1}a_1 + 2h_0w_{c2}c_1 \\
& \quad + h_1w_{c0}c_0 + \frac{1}{w_{c3}}(g - (k_0 - k_1)w_{a0}w_{c3})c_0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& 3w_{b2}b_2 \\
& = 3k_1w_{a2}a_2 + (k_0 - k_1)w_{a3}a_3 + 2h_1w_{c1}c_1 \\
& \quad + h_0w_{c3}c_2 + \frac{1}{w_{c0}}(g - (k_0 - k_1)w_{a3}w_{c0})c_2
\end{aligned} \tag{15}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
g & = (k_0w_{a0}w_{c3} - k_1w_{a3}w_{c0}) \\
& \quad + (w_{b0}w_{c3} - w_{b3}w_{c0}) \\
& \quad + h_0w_{c3}(w_{c0} - w_{c1}) - h_1w_{c0}(w_{c2} - w_{c3})
\end{aligned}$$

図2を, 境界曲線のみが決まっている曲線モデルとして考える。このとき, ここで導いた(10)から(15)までの式は, 境界曲線から曲面を内挿する方法, 言い換えれば, 境界曲線上の制御点と重みから自由曲面内部の制御点と重みを求める方法, として応用可能である。すなわち, 図2を曲線モデルとして考えると, 制御点間ベクトル a_1, a_2, b_1, b_2 と重み $w_{a1}, w_{a2}, w_{b1}, w_{b2}$ の合計八つが未知数になる。そこで, これらを(10)から(15)式の接続条件を用いて決定すれば, 有理曲線を境界に持つ曲線モデルを有理 Bézier 曲面で内挿できるということになる。以下に, 自由曲面内部の制御点と重みを決定する手順を示す。

1. w_{a1} を任意の正の実数とし, (10)式を満たす重み w_{a2} を計算する。
2. (11), (12)式から二つの重み w_{b1}, w_{b2} を計算する。
3. a_1 を任意のベクトルとし, (13)式を満たすベクトル a_2 を計算する。
4. (14), (15)式から二つの制御点間ベクトル b_1, b_2 を計算する。

5. 制御点間ベクトルと境界曲線上の制御点から, 曲面内部の制御点を決定する。

双三次の Bézier 曲面については, 千代倉が境界曲線から曲面内部の制御点を生成する手法を述べているが⁸⁾, ここでは, 双三次の有理 Bézier 曲面について述べた。

4. おわりに

本論文では, ソリッドモデラにおいて有理式表現の自由曲面を滑らかに接続することが有効であることを示し, その例として, 二つの双三次有理 Bézier 曲面を接平面が連続になるように接続する方法を示した。そのための条件式は, 制御点と重みについてそれぞれ三つずつあり, これを利用すれば, 二つの双三次有理 Bézier 曲面を滑らかに接続することができる。有理 Bézier 曲面は, Bézier 曲面を完全に包含し, かつ円柱面, 円錐面, 球面といった自然二次曲面を正確に表現できるという利点を持つ。したがって, その滑らかな接続は, ソリッドモデラにおける自由曲面内挿方法やフィレット付け操作などに重要な役割を果たすものである。

謝辞 本研究を行う上で, 多大な御指導, 御援助をいただいた(株)リコーソフトウェア事業部 國井秀子事業部長, 慶応義塾大学環境情報学部 千代倉弘明助教授に深い謝意を表します。

参考文献

- 1) Okino, N., Kakazu, Y. and Kubo, H.: TIPS-1; Technical Information Processing System for Computer-aided Design, Drawing and Manufacturing, *Computer Languages for Numerical Control*, Hatvany, J. ed., pp. 141-150, North-Holland, Amsterdam (1973).
- 2) Braid, I. C. and Lang, C. A.: Computer-aided Design of Mechanical Components with Volume Building Bricks, *Computer Languages for Numerical Control*, Hatvany, J. ed., pp. 173-184, North-Holland, Amsterdam (1973).
- 3) Coons, S. A.: *Surfaces for Computer Aided Design of Space Forms*, MIT Project MAC, TR-41 (1967).
- 4) Bézier, P. E.: *Numerical Control—Mathematics and Applications*, John Wiley and Sons, London (1972).
- 5) Riesenfeld, R. F.: Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, Ph. D. Thesis, Syracuse University (1973).

- 6) Piegl, L. and Tiller, W.: Curve and Surface Constructions Using Rational B-Splines, *Comput. Aided Des.*, Vol. 19, No. 9, pp. 485-498 (1987).
- 7) Faux, I. D. and Pratt, M. J.: *Computational Geometry for Design and Manufacture*, pp. 210-218, Ellis Horwood, London (1979).
- 8) 千代倉弘明: ソリッドモデリング, pp. 106-109, 工業調査会 (1985).
- 9) Liu, D. and Hoschek, J.: GC^1 Continuity Conditions between Adjacent Rectangular and Triangular Bézier Surface Patches, *Comput. Aided Des.*, Vol. 21, No. 4, pp. 194-200 (1989).

付録 有理 Bézier 曲面の接続条件の導出

3章では、二つの双三次有理 Bézier 曲面が接平面連続となる十分条件が、任意の v ($0 \leq v \leq 1$) について (9)式が成り立つこと、であることを述べた。ここでは、この条件を用いて(10)から(15)までの六つの条件式を導いていく過程を記す。

制御点 P_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) で表される Bézier 関数 $\sum_{i=0}^n B_i^n(v)P_i = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ については、次の二つの式が成り立つ。以下、この性質を利用して、(9)式を変形していくことにする。

$$(1-v)\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \\ = \frac{1}{n+1} \{(n+1)P_0, nP_1, \dots, P_n, 0\} \quad (16)$$

$$v\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} \\ = \frac{1}{n+1} \{0, P_0, 2P_1, 3P_2, \dots, (n+1)P_n\} \quad (17)$$

(9)式は、左辺が v について六次式、右辺が v について七次式になっている。したがって、(9)式が任意の v ($0 \leq v \leq 1$) について成立するためには、

$$\frac{\partial S_2(1, v)}{\partial u} = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

が、高々五次式でなければならない。これは、六次式 $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$

が、五次式

$$\{A_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, A_6\}$$

として表現できる、ということである。一方、次の四次式

$$\{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

に $(1-v)+v$ を掛けることにより、これを五次式

$$\{C_0, R_1, R_2, R_3, R_4, C_4\}$$

に書き直すことができる。すると、Bézier 関数の性

質である二つの式(16), (17)を用いて、(9)式は次の(18), (19)式となる。

$$\{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\} \\ = ((1-v)k_0 + vk_1)\{A_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, A_6\} \\ + ((1-v)h_0 + vh_1)\{C_0, R_1, R_2, R_3, R_4, C_4\} \quad (18)$$

$$A_0 - 6A_1 + 15A_2 - 20A_3 + 15A_4 - 6A_5 + A_6 = 0 \quad (19)$$

ただし、

$$Q_1 = \frac{1}{5}(-A_0 + 6A_1)$$

$$Q_2 = \frac{1}{10}(A_0 - 6A_1 + 15A_2)$$

$$Q_3 = \frac{1}{10}(15A_4 - 6A_5 + A_6)$$

$$Q_4 = \frac{1}{5}(6A_5 + A_6)$$

$$R_1 = \frac{1}{5}(C_0 + 4C_1)$$

$$R_2 = \frac{1}{5}(2C_1 + 3C_2)$$

$$R_3 = \frac{1}{5}(3C_2 + 2C_3)$$

$$R_4 = \frac{1}{5}(4C_3 + C_4)$$

再び Bézier 関数の性質を利用して(18)式をまとめると、次の七つの式になる。

$$B_0 = k_0A_0 + h_0C_0 \quad (20)$$

$$6B_1 = k_0(-A_0 + 6A_1) + k_1A_0 \\ + h_0(C_0 + 4C_1) + h_1C_0 \quad (21)$$

$$15B_2 = k_0(A_0 - 6A_1 + 15A_2) + k_1(-A_0 + 6A_1) \\ + h_0(4C_1 + 6C_2) + h_1(C_0 + 4C_1) \quad (22)$$

$$20B_3 = k_0(15A_4 - 6A_5 + A_6) \\ + k_1(A_0 - 6A_1 + 15A_2) \\ + h_0(6C_2 + 4C_3) + h_1(4C_1 + 6C_2) \quad (23)$$

$$15B_4 = k_0(6A_5 - A_6) + k_1(15A_4 - 6A_5 + A_6) \\ + h_0(4C_2 + C_4) + h_1(6C_2 + 4C_3) \quad (24)$$

$$6B_5 = k_0A_6 + k_1(6A_5 - A_6) \\ + h_0C_4 + h_1(4C_3 + C_4) \quad (25)$$

$$B_6 = k_1A_6 + h_1C_4 \quad (26)$$

(20), (26)式は、整理するとそれぞれ(5), (6)式に等しい。また、(21), (25)式を用いて、ベクトル b_1, b_2 をベクトル a_0, a_1, a_2, a_3 とベクトル c_0, c_1, c_2 で表すと、次の二つの式になる。

$$\begin{aligned}
3w_{s1}\mathbf{b}_1 = & -(k_0 - k_1)w_{s0}\mathbf{a}_0 + 3k_0w_{s1}\mathbf{a}_1 + 2h_0w_{s2}\mathbf{c}_1 \\
& + \frac{3}{w_{s0}}((w_{s0}w_{s1} - w_{s1}w_{s0}))\mathbf{c}_0 \\
& + k_0(w_{s0}w_{s1} - w_{s1}w_{s0})\mathbf{c}_0 \\
& + \frac{1}{w_{s0}}(h_0(w_{s0}w_{s1} + 2w_{s0}w_{s2} - 3w_{s1}^2) \\
& + h_1w_{s0}w_{s1})\mathbf{c}_0 \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3w_{s2}\mathbf{b}_2 = & 3k_1w_{s2}\mathbf{a}_2 + (k_0 - k_1)w_{s3}\mathbf{a}_3 + 2h_1w_{s1}\mathbf{c}_1 \\
& + \frac{3}{w_{s3}}((w_{s2}w_{s3} - w_{s3}w_{s2}))\mathbf{c}_2 \\
& + k_1(w_{s2}w_{s3} - w_{s3}w_{s2})\mathbf{c}_2 \\
& + \frac{1}{w_{s3}}(h_0w_{s2}w_{s3} \\
& + h_1(w_{s2}w_{s3} + 2w_{s1}w_{s3} - 3w_{s2}^2))\mathbf{c}_2 \quad (28)
\end{aligned}$$

(5), (6), (27), (28)式を(22), (24)式に代入して, ベクトル $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を消去すると, それぞれ次のような式になる.

$$\begin{aligned}
w_{s0}(k_0 - k_1)(w_{s0}\mathbf{a}_0 - 3w_{s1}\mathbf{a}_1 + 3w_{s2}\mathbf{a}_2 - w_{s3}\mathbf{a}_3) \\
= (\text{ベクトル } \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \text{ のみを含む式}) \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{s3}(k_0 - k_1)(w_{s0}\mathbf{a}_0 - 3w_{s1}\mathbf{a}_1 + 3w_{s2}\mathbf{a}_2 - w_{s3}\mathbf{a}_3) \\
= (\text{ベクトル } \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \text{ のみを含む式}) \quad (30)
\end{aligned}$$

(29), (30)式はベクトル $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の係数の割合が等しい. したがって, 以下のようにして $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を消去することができる.

$$\begin{aligned}
w_{s3} \times (29) \text{式} - w_{s0} \times (30) \text{式} \\
= (\text{ベクトル } \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \text{ のみを含む式}) \\
= 0
\end{aligned}$$

ベクトル $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ は, 境界曲線から定まる独立した三つのベクトルであるから, それぞれの係数は0で

なければならない. これが, 重み間の関係式(10), (11), (12)になる.

また, (10), (11), (12)式を用いて(19), (27), (28)式を書き換えると, 制御点間ベクトルの関係式(13), (14), (15)式を導くことができる. 逆に, 重みと制御点間ベクトルが(10)から(15)式を満たすとき, (19)式と(20)から(26)までの式をすべて満たすことは, 容易に計算できる. 以上で, (10)から(15)式が求める条件式であることが分かった.

(平成元年8月31日受付)

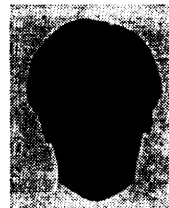
(平成2年7月10日採録)



原田 毅士

1962年生. 1986年東京大学工学部精密機械工学科卒業. 1988年同大学院修士課程修了. 同年より(株)リコー入社. 現在, 同社ソフトウェア事業部ソフトウェア研究所勤務.

ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事. 形状モデリング, 特にフィレット面生成とその数学的曲面表現式に興味を持つ.



鳥谷 浩志 (正会員)

1960年生. 1983年東京大学理学部情報科学科卒業. 同年より(株)リコー入社. 現在, 同社ソフトウェア事業部ソフトウェア研究所勤務. ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事.

1989年東京大学理学部より博士号取得. 形状モデリングとその応用に興味を持つ.