F-025

ナンバープレースの問題の複雑さに関する研究

Research on the complexity of Number Place

芳賀 将至† 力武 克彰† 佐藤 貴之‡
Masashi Haga Yoshiaki Rikitake Takayuki Sato

1. はじめに

理論計算機科学において，「問題の複雑さは何に依存するのか」という最も基本的，かつ，重要な課題がある.

本研究では，「ナンバープレース(数独)」というパズルゲームを対象とする．このパズルゲームを，理論計算機科学の視点から見た問題の複雑さと，人がパズルを解いていく過程で感じる問題の難易度との関係を解明してくことを最終的な目標としている．

この目的を達成するために，我々はまず理論計算機科学の視点から見たナンバープレースの問題の複雑さの解析を行っている．ナンバープレースの問題を解いていき，解答に至るまでの過程をグラフ構造として捉える．その構造を計算機により分析することで，問題の複雑さに関する特徴を抽出し，定量化を行った．その結果より，認知科学的な視点から見た問題の難易度と関連すると考えられるグラフ構造の特徴がいくつか得られた．

本稿では，計算機側からのナンバープレースの解析を行い，難易度に関わる特徴の提示を行う．

2. 研究概要

2.1. ナンバープレースについて

一般に，ナンバープレースの問題は 9×9 のサイズで，唯一解をもつ．しかし，唯一解をもつ問題の解のパターンだけでも 6.27×10^{23} 個存在するため[1]，9×9 のサイズは全ての問題に対しての様々なデータの収集および解析が非常に困難である．したがって，本研究では，全ての問題に対して解析ができるように，4×4 のサイズにスケールダウンして考える．

基本的なルールは，図 1 のように，問題には数個の数字が埋められた状態から，以下の制約条件を基に空きマスに埋める数字を推測し，全てのマスを埋めていく．

- 縦に同じ数字が重複しない
- 横に同じ数字が重複しない
- 2×2 のブロックに同じ数字が重複しない

2.2. 探索網による問題の複雑さの解析

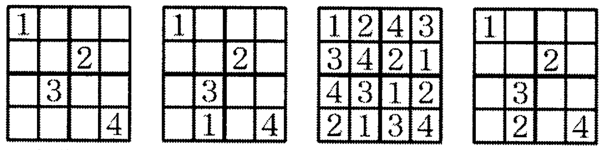
ナンバープレースの問題の複雑さを解析するにあたり，「局面」および「探索網」について定義する．

局面とは，問題に数字が制約条件を守るように埋められたものと定義する．具体的には，図 1 の(a)が問題として与えられた局面(初期局面)，(b)が(a)を解いている途中の局面，(c)が(a)を解いた局面(解局面)になる．また，(d)のように制約条件は守っているが，解に到達できない手詰まりの局面も存在する．

続いて，「探索網」を定義する．探索網とは，局面同士を，1 つ数字を埋めることで遷移できるように結び付けたものとする．初期局面を探索網の根とし，そこから数字を一つ埋めることで遷移できるものを節とし，解局面まで同様に結び付ける．また，上の局面から遷移した局面の群を階層と呼ぶことにする．この定義を基に探索網を生成したところ，図 2 のような構造，および，以下に示す性質をもつものになった．

- 同じ階層の局面には同じ量の数字が埋められている
- 一つ下の局面に遷移すると数字が一つ埋まる

探索網を定義することで，局面を構造的にまとめることができ，数字を埋めていく手順を追いやすくなった．



(a)初期局面 (b)局面 (c)解局面 (d)手詰まり

図 1. 局面の一例

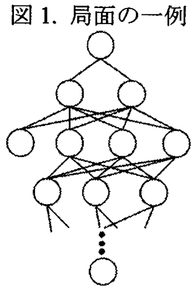


図 2. 生成された探索網の形状のイメージ図

上述の「局面」および「探索網」を用いて，難易度に関わる特徴の抽出を行う．しかし，4×4 サイズの全問題数は 4389840 問存在し，解析するには膨大な量である．そこで我々は，「極小問題」を新たに定義し，解析を行う問題を絞った．極小問題は問題の定義に加え，初期局面での数字の量が最少であると定義した．この一例を図 3 に示す．この定義から導くことができた極小問題の性質を以下に示す．

- 初期局面で埋められている数字の量は 4 つ
- 使用されている数字の種類は 3 または 4 種類

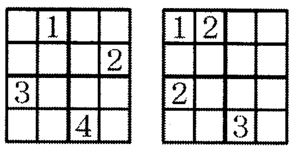


図 3. 極小問題の一例

解析対象を極小問題に絞る利点について説明する．極小問題は数字の量が最少であるため，それ以上数字の量が少ない問題は存在しない．よって，全ての極小問題の探索網は他の問題全ての初期局面を内包する．ゆえに，極小問題の探索網を生成することができれば，4×4 ナンバープレースの問題すべての探索網を生成できる．極小問題を定義したことで 25728 問まで問題数を絞ることができた．

†: 仙台電波工業高等専門学校
‡: 北九州市立大学

3. 難易度を決定づける特徴の提示

今回，計算機を使用して，ナンバープレースの問題の解析を行った．この解析結果より，以下のような特徴が難易度を決定づけると予測した．

3.1. 初期局面からの特徴付け

まずは初期局面の性質からの考察を行った．使用されている数字の種類は 3 または 4 種類という極小問題の性質から以下の特徴を提示する．

- 使用されている数字の種類
  3 種類と 4 種類では問題がもっている情報が変わってくる．3 種類使用している問題は 1 つの数字の情報が抜けているということなので，3 種類の問題のほうが難易度の高い問題と考えられる．

3.2. 探索網の形状からの特徴付け

全ての極小問題の探索網を生成し，階層ごとの局面数について解析したところ，図 4 のように探索網が 13 パターンに分類されることが分かった．

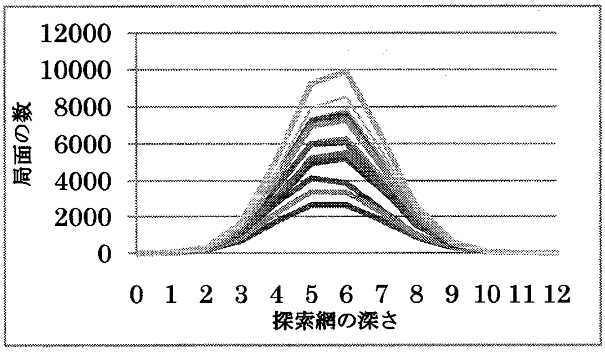


図 4. パターンごとの探索網の局面数

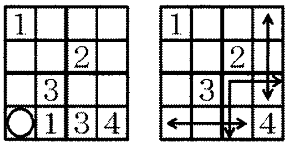
図 4 の 13 パターンで共通する性質として，5 または 6 個数字を入れた時に局面数が最も多くなるピークを迎え，それを頂点とした山なりの形状をしている点である．そして図 4 から，難易度に関わると考えられる特徴を提示する．

- 探索網でピークを迎えたときの局面数
  局面数が多いということは，その分選択肢が多いということであり，マスに入る数字を限定しづらく，難易度が高くなる．逆に，局面が少ないということは，数字を限定しやすく，難易度の低い問題であると予測した．
- 探索網の山の緩やかさ
  山が緩やかであると，問題を解き進める上で選択肢が減らないといえる．山が急であると，部分的には難しいかもしれないが，それ以外の部分は簡単であると予測できる．

3.3. 推論からの特徴付け

続いて，探索網内での局面から局面の遷移に「推論数」を付加した．制約条件やそれぞれの局面から導くことができる数字を埋めるために必要な情報を推論と定義し，その推論を行った回数を推論数とする．9×9 サイズでは数字の確定，縦・横・ブロックの制約条件を使用した数字の候補の消去，候補に注目した他のマスの候補の消去が存在するが [2]，今回は次に示す基本的な推論に絞ることにした．また，局面から局面への推論は様々な手順があるが，今回はそのうち最短のものを推論数とした．

- 数字の確定
  この推論は，手詰まりの局面へ遷移する場合を除き，最後に必ず使用される．図 5 の(a)の場合，一番下の行において制約条件を考えると，○の部分は 2 以外入らないので，2 という数字が確定される．
- 制約条件を使用した候補の消去
  縦・横・ブロックに同じ数字が入らないという制約条件が存在する．つまり，ある数字が埋められていたのなら，その埋められたマスに関連する行，列，ブロックには存在しないということがいえる．図 5 の(b)の場合，右下の 4 に注目すると，その場所に関係する行，列，ブロックには 4 が入らない．よって関係する部分の 4 という候補を消去する．また，今回は縦，横，ブロックの推論を別として考えた．



(a)数字の確定　(b)候補の消去

図 5. 推論の適用例

この推論数の付加を行ったところで，以下のような特徴が難易度と関わりがあることを提示する．

- 初期局面から解局面までの最短の推論数
  解局面に達するまでの推論数が少ないほど，人が考える量が減るので，この値が少ないほど難易度の低い問題であると予測される．
- 序盤の推論数
  序盤とは，図 4 で定義したピークに達するまでである．ある極小問題で上記の特徴が同じであるが，辿る局面が異なる場合がある．よって，序盤で推論数が少なければ難易度の低い問題であると予測される．
- 推論数が 1 になるまでの階層数
  解局面が近付くにつれて埋まっている数字の量が増え，数字の確定のみで推論できるようになる．この状態になるまでの階層数が少なければ推論を行う局面が減り，難易度の低い問題であると予測される．

4. おわりに

本稿では，解析を行うにあたり，形状からの難易度の考察，推論からの提示を行った．計算機側からの問題の解析を中心に進めているものの，人がナンバープレースを解いている過程を分析しなければならないため，計算機側からのさらなる解析も含めて，以下の作業を行っていく．

- 極小問題のグループ分け
- 人に解いてもらう問題の精選
- 解いたもらった結果から人側の複雑さの解析
- 計算機と人の複雑さの関係について考察

【参考文献】

[1] 戸神聖也，「数独の解生成と解に対する番号付け」，電子情報通信学会技術研究報告，Vol.107，pp.73-78 (2007.12)

[2] 松原康夫，「数独の推論規則と難易度に関する考察」，情報処理学会研究報告，2006(134)，pp.1-6(2006.12.16)