F-018

経済データの長期記憶性に関するGranger理論の実証的研究
Empirical study on Granger theory for long-term memory of the economic data

関本　信太郎 *　　森　康久仁 *　　松葉　育雄 *
Shintaro SEKIMOTO　Yasukuni MORI　Ikuo MATSUBA

1 はじめに

経済をはじめ様々な分野で，多数の時系列の和 (または平均) をとった系列をその時系列の指標として扱うことが多い．例えば，日経平均株価，個人総所得，失業率，非耐久財の消費量，在庫などは，それぞれミクロな時系列の集合である．

ところが，このような和をとった時系列は，個々の時系列とは違った相関構造を持つことがある．Granger が示した理論によると，短期記憶過程である自己回帰 (AR) モデルに従う時系列を多数集め，和 (または平均) をとったとき，長期記憶性を示すことがあるとされている [1]．しかしながら，この理論を実際のデータを用いて検証した例は報告されていない．そこで，本研究ではこの理論を実際の経済データを用いて実証的に示す．

2 時系列の長期記憶性

自己相関の減少が遅い時系列データは，経済学を中心に様々な分野で現れる．このよう時系列は長期記憶過程に従うという．これに対し，AR モデル，ARIMA モデルなどの代表的な時系列モデルは，相関が急激に減衰する短期記憶過程に従うモデルである．ただし，定常ではない，トレンドや季節変動を持つデータは当然長期に相関が続くので，ここではデータが定常性を持っていることを前提としている [2]．

長期記憶過程に従うデータは以下のような特徴をもっている．

- 大きい値をとる期間，小さい値をとる期間が長く続く
- 自己相関関数 $\rho(k)$ の減衰が緩慢 (ラグ k について指数関数的) である
- 周波数 λ のスペクトル密度関数 $f(\lambda)$ が $\lambda = 0$ で発散する

特に自己相関関数の特徴を具体的に式では，$0 < b < 1$ について

$$\rho(k) \approx k^{b-1} \tag{1}$$

と表される．この式をべき則 (スケーリング則) を満たすといい，長期記憶性を判定する上で非常に重要である．また，これはフーリエ解析の理論から，

$$f(\lambda) \approx |\lambda|^{-b} \tag{2}$$

を満たすことと同値である [2]．これは，原点で発散するというスペクトル密度の特徴とうまく整合している．また，式 (1) と式 (2) の b は対応しており，この b が長期記憶性を特徴づける指数となっている．

以上のような特徴を持つ長期記憶過程に従うデータは，長期記憶性を考慮していない ARMA 等のモデルにはうまくあてはまらない．また，このようなデータをごく最近のデータのみで予測しようとすると，正しい結果が得られない．従って，長期記憶性を考慮したモデルによる予測が望ましい．

3 Grangerの理論

時系列の長期記憶性の発生のメカニズムは様々な理論が存在する．その中の一つとして，Granger の理論がある．Granger は多数の短期記憶過程に従う時系列の多数の和をとった系列が長期記憶性を持つ場合があることを示した [1]．t を時刻とした N 個の定常過程が，独立なパラメータを持つ AR(1) モデル

$$x_{jt} = \alpha_j x_{j,t-1} + \epsilon_{jt}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

に従うとする．ただし，ϵ_{jt} は分散 σ_j^2 のすべて互いに独立なホワイトノイズである．これらを足し合わせた $\bar{x}_t = \sum_{j=1}^{N} x_{jt}$ は，ARMA$(N, N-1)$ に従うことが知られている [3]．さらに N を無限に増やした場合，ARMA のパラメータ数は無限に増えることになる．非常に大きい N を持つ ARMA$(N, N-1)$ 過程に従う時系列の相関構造を調べるため，スペクトル密度関数を考える．まず，(2) 式のような AR(1) モデルのスペクトル密度関数は

$$f_j(\lambda) = \frac{\sigma_j^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \alpha_j e^{-i\lambda}|^2} \tag{4}$$

と表される．スペクトル密度の線形性から $\bar{x}_t$ のスペクトル密度関数 $\bar{f}(\lambda)$ は

$$\bar{f}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \alpha_j e^{-i\lambda}|^2} \tag{5}$$

となる．今，α_j が $F(\alpha)$ から抽出される確率変数で，σ_j^2 が平均 σ^2 の確率変数であると仮定する．このとき，N が十分大きいとすると，(5) 式は E[.] を期待値として，

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda) &= \sum_{j=1}^{N} E[f_j(\lambda)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_0^1 |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^{-2} df(\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

*千葉大学大学院融合科学研究科情報科学専攻

と近似できる [2]. 従って，$\bar{f}(\lambda)$ の特徴は，$F(\alpha)$ の形状によって決まることになる．このとき，$F(\alpha)$ にベータ分布を採用し，パラメータを適切に設定すると，$\bar{f}(\lambda)$ は (2) 式のようにスケーリング則を満たす [1].

従って $\bar{x}_t$ は長期記憶過程となる．これは，データに相関が存在する場合でも同様の議論ができ，さらにベータ分布以外にも拡張できる [4]. 次節では，実際の経済データを用いて，平均した時系列が長期記憶となりうるかを検証する．

4 シミュレーション

4.1 シミュレーション条件

シミュレーションに用いる経済データは，日経平均株価関連 225 銘柄である．日経平均株価の個別銘柄は AR モデルの当てはまりがよいものが多く，短期記憶であると仮定できるため，Granger の理論の検証に適している．データは 2007 年 1 月 1 日から 12 月 31 日までの日時データを用いた．ただし，日経平均株価の個別銘柄は非定常データであるので，

$$x_n = log\frac{y_n}{y_{n-1}} \tag{7}$$

とし，対数差分化することで定常性を仮定できるようにした [5]. この対数差分データはリターン (収益率) と呼ばれ経済データの分析によく用いられる．このデータの平均をとり，自己相関関数を求め，スケーリング則を満たすかどうかを検証する．スケーリング則の判定は，R/S 統計量によるハースト数，局所ホイットル法などがある [2]. 本研究ではノイズに比較的強く，容易に求められる累積自己相関関数によって検証した．累積自己相関関数 $S(k)$ は，自己相関関数の和をとったもので，

$$S(k) \quad = \quad \sum_{j=-k}^{k} \rho(j) \tag{8}$$

として求めることができる．長期記憶過程の場合，k が大きいところで，$S(k)$ はべき則 (またはスケーリング則)

$$S(k) = ak^b \quad (a, b > 0) \tag{9}$$

に従う．この b は (1) 式，(2) 式と対応している．$S(k)$ がべき則に従う場合，k が大きいところで (1) 式を満たさなければならず，結局自己相関関数もべき関数となる [2]. 累積自己相関関数は微小な変動を平均化し，べき則が確認しやすい．

4.2 結果と考察

個別銘柄のリターンのいくつかの平均をとり，累積自己相関関数を求めた．平均をとる銘柄数を変えて，それぞれを (9) 式で回帰した．表 1 に示した残差平方和で当てはまりの良さを評価する．ただし，注意しなければいけない点として，銘柄数が少ない場合，同じような業種や関連企業が多く含まれると，強い相関関係を持つため，[1] の理論とは異なった結果となってしまう．このため，銘柄数が少ない場合はランダムではなく，業種が重ならないようにデータを適切に選んだ．

表 1: 回帰曲線の評価 (残差平方和)

銘柄数	残差平方和	b
10	0.4245	0.58571
30	0.3692	0.55435
50	0.3951	0.54708
150	0.3108	0.54938

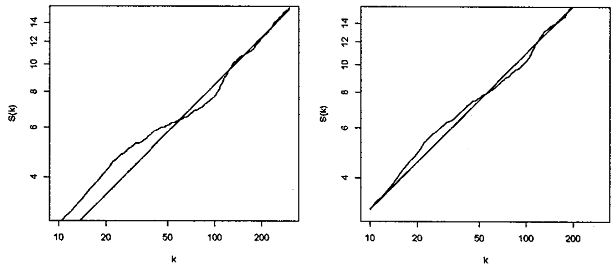

図 1: 銘柄数 30 の累積自己相関関数 (左) と銘柄数 150 の累積自己相関関数 (右)

残差平方和は平均を多数とるほど小さくなり，よく当てはまっている．図 1 左は銘柄数 30, 右は銘柄数 150 の場合を回帰したものを両対数軸で示した．銘柄数が大きくなると，べき関数への当てはまりがよくなっており，長期記憶性に近い性質がみられる．

5 まとめ

個々の時系列は短期記憶過程に従っているが，それを集計した時系列が長期定常過程となるという Granger の理論を日経平均株価を用いて実際に検証した．短期記憶過程とみなされる 150 銘柄程度の時系列を平均した場合，長期記憶性が見られた．よって，個々が AR(1) モデルのような短期記憶過程であっても，その平均の解析においては長期記憶過程に従うモデルが適切である可能性を検討すべきである．

参考文献

[1] C.W.J.Granger, “Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models ”, Journal of Econometrics, 14, pp.227-38. 1980.

[2] 松葉　育雄，“ 長期記憶過程の統計—自己相似な時系列の理論と方法 ”，共立出版，2007.

[3] 刈屋　武昭，矢島　美寛，田中　勝人，竹内　啓 “ 経済時系列の統計　その数理的基礎 ”，岩波書店，2003.

[4] Lippi,M. and Zaffaroni,P. “ Aggregation of simple linear dynamics:exact asymptotic results. ”, STICERD Discussion Paper, EM/98/350, The London School of Economics, 1998.

[5] 松葉　育雄，“非線形時系列解析”，朝倉出版，2000.