E-032

楽曲のグラフ表現とその解析手法
A Graph representation for Analysis of Music

佐々木 雄人† 河合 博之†
Yuto Sasaki Hiroyuki Kawai

1. まえがき

楽曲情報の特徴を定義する様々な手法が存在する[1][2]．その特徴を適切に定義することにより楽曲間の類似度が決定され，楽曲検索システムなどへの応用が期待される．

本研究では，楽曲情報として楽譜からグラフで表現し，その特徴をグラフ的性質から調査することを目的とする．我々がこれまで調査した楽曲グラフはほぼ強連結であることがわかっている．

我々は，このグラフから何らかの手法でサイクル構造を削除し，音階の列を得ることにより，元の楽曲が持つ何らかの特徴を抽出することができると考える．

本研究では，楽曲より得られた楽曲グラフから，最小フィードバック頂点集合（MFVS）と非サイクル彩色との関係を用いて，楽曲の特徴を抽出することを試みる．

2. 楽曲グラフとは

2.1 グラフとは

グラフとは，頂点と辺の集合から構成され，頂点と頂点を辺で結ぶことによって，2 頂点間の関係を表現することができる[3]．頂点集合Vと辺集合Eを持つグラフGを，$G=(V,E)$と表す．本研究においては，辺が向きを持つ有向グラフを用いる．有向グラフGのサイクルとは，始点と終点が等しい，有向辺でたどれる頂点の列である．

2.2 楽曲グラフ

楽曲グラフは，[4]により，以下のように定義された．

・各音階を頂点とする．
・音階の遷移を辺とする．
・音階から音階へ遷移した回数を辺の重みとする．

楽曲グラフは辺として音階の遷移を保持しているので，有向グラフである．有向グラフにおいて，任意の 2 頂点で，そのどちらからも到達可能であるとき，そのグラフは強連結である，という．これまでの研究から，楽曲グラフはほぼ強連結であることがわかっている[5]．

3. MFVS と非サイクル彩色問題

3.1 MFVS

連結グラフ$G=(V,E)$において，頂点集合Vと，その部分集合V'との差集合によって誘導されたグラフG'がサイクルを含まない場合，V'をフィードバック頂点集合（FVS）という．濃度が最小の FVS を，最小フィードバック頂点集合（MFVS）といい，$\overline{V}(G)$と表す．図 1 のグラフGでは，灰色で示した頂点とそれに接続している辺を取り除くと，非サイクルグラフG'が得られる．よってこの 2 つの頂点を要素に持つ集合が$\overline{V}(G)$の 1 つである．

3.2 非サイクル彩色

グラフGの頂点を以下の条件を満たすように彩色することを，非サイクル彩色という．

・ 頂点では同じ色に彩色されない．
・ $V_a \subseteq V$を，同じ色aで彩色された頂点の集合とする．任意の$a \neq b$なる$V_a \cup V_b$によって誘導された，Gの部分グラフG''が非サイクルである．

Gを採色するのに必要な色の数の最小値を非サイクル彩色数といい，$a(G)$と表す． 図 2 は$a(G)=3$の例である．

3.3 MFVSと非サイクル彩色数

グラフ$G=(V,E)$において$a(G)=3$と仮定する．3 つの色をa，b，cとすると，非サイクル彩色の定義より，$V_a \cup V_b$は非サイクルグラフを誘導する．すなわち，VとV_cとの差集合が非サイクルグラフを誘導するので，V_cはGの FVS である．本研究ではこの 2 つの視点から，音楽グラフを解析する．

もし楽曲グラフGにおいて，$a(G) \leq 3$だった場合，FVS や非サイクル彩色を用いて，グラフからサイクルを取り除き，音階のツリー構造を得ることができる．このツリー構造をもつ部分グラフに，グラフ的な性質がないかを調べる．

グラフGの頂点集合Vの大きさをNとする．もし$a(G) \leq k$ならば，$\left|\overline{V}(G)\right| \leq N \cdot (k-2)/k$であることが証明されている[6]．これに$a(G) \leq 3$を代入すると，次の式が得られる．$\left|\overline{V}(G)\right| \leq N/3$．

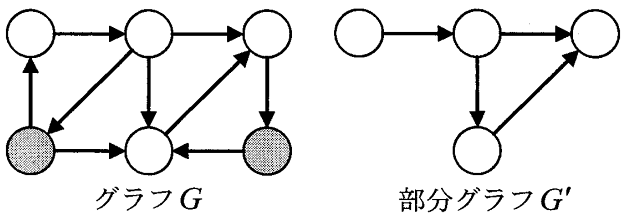

図 1 MFVS の例

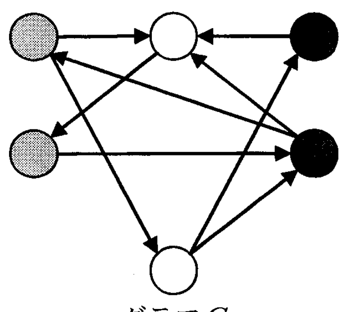

図 2 非サイクル彩色の例

† 函館工業高等専門学校

4. 楽曲グラフ作成プログラム

これまでの研究において，ボタン入力から楽曲グラフを作成し，画面に描画するプログラムが Java 言語で開発されている．

このプログラムの内部では，楽曲グラフの情報が，頂点集合と辺集合とに分かれて保存されている．本研究では，このプログラムを改良し，彩色プログラムを付加して楽曲グラフの解析を行う．

5. 楽曲グラフの彩色アルゴリズム

まず，楽曲グラフに非サイクル彩色を施した．彩色のアルゴリズムは以下の通り．

① 元のグラフ G の N 個の頂点は，音階順にソートしてある．

② i 番目の頂点を v_i，j 色に塗られた部分頂点集合を V_j と置く．

③ v_1 を 1 色に塗る．即ち，V_1 に追加する．

④ 残り全ての v_i（$i=2,3,\cdots,N$）について，以下を繰り返す．

  i. $j=1$ とする．

  ii. V_j が持つ頂点の中に v_i と隣接するものがないかを調べる．

  iii. もし，ひとつでも隣接する頂点があれば，j をインクリメントし，ⅱに戻る．

  iv. 隣接する頂点がなければ，v_i を j 色に塗り，V_j に追加する．i をインクリメントする．

⑤ 頂点を 1 つ以上含む V_j（$j=1,2,\cdots$）の数を k とする．

⑥ k 個のグラフを，それぞれ G_j（$i=1,2,\cdots,k$）とする．

⑦ $i \neq j$ である全ての V_j の要素である頂点を，G_i の頂点集合へ追加する．

⑧ 全ての i について，G_i の頂点集合が誘導する G の部分グラフを，新たに G_i とする．

ただし，これは厳密な非サイクル彩色ではない．以下の二つの要因による．

- このアルゴリズムでは，非サイクル彩色の第 1 条件は満たすが，第 2 条件を判断するアルゴリズムが含まれていない．しかし，このアルゴリズムで楽曲グラフを彩色した結果，多くの楽曲グラフを 3 色で彩色することができた．
- 楽曲グラフの特性上，図 3 のように，1 つ前の頂点へ戻る遷移や，自分自身への遷移が多くみられる．しかし，このような遷移が一つでも存在すると，非サイクル彩色の条件を満たすことができない．よって，本研究ではこのような遷移を許すこととした．

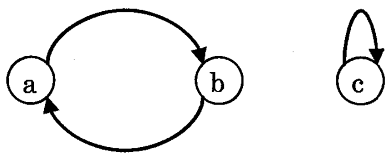

図 3 楽曲グラフに多く見られる遷移

できあがった部分グラフ内の小道をたどることにより，音階の列を解析する．

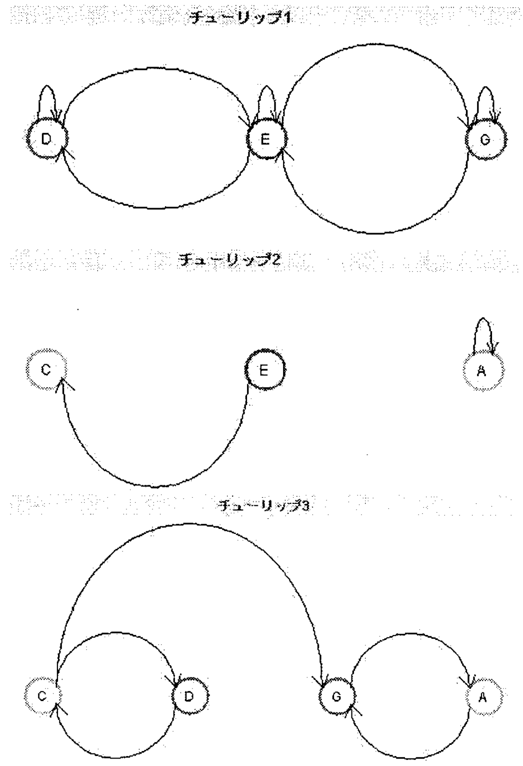

図 4 プログラムより得られた部分グラフ

6. まとめ

今回，プログラムを用いて楽曲グラフを彩色した結果，多くの楽曲グラフを 3 色で彩色できた．その例を図 4 でしめす．楽曲グラフとは，そもそも楽譜上の音階をなぞることによって作成されている．楽曲グラフを 3 色に彩色できた要因として，この作成方法になにか意味があるのではないかと考える．

7. 今後の展望

今後は，今回の結果で得られた部分グラフを元に，具体的な特徴を定量的に導き出すことが求められる．例えば，各部分グラフの音階の遷移や，各色で彩色された頂点の音階などに，特徴が現れるのではないかと期待する．

また，楽曲グラフが 3 色で彩色されるための条件なども確立していく必要がある．

参 考 文 献

[1] 波多野誼余夫, “音楽と認知,” 東京大学出版会, (1987).

[2] Lerdahl, F., and R.Jackendoff, “Agenerative theory of tonal music,” Mass MIT Press, (1996).

[3] G. Chartrand and L. Lesniak, “Graphs and Digraphs,” (Chapman & Hall, 2005).

[4] 佐々木雄人, “楽曲のグラフ表現,” 平成 19 年度函館工業高等専門学校卒業論文, 2008.

[5] 杉山幸恵, “楽曲のグラフ表現,” 平成 20 年度函館工業高等専門学校特別研究論文, 2009.

[6] G. Fertin, E. Godard, A. Raspaud, “Minimum feedback vertex set and acyclic coloring," Information Processing Letters, vol. 84 (2002), pp. 131-139.