

3次元光散乱体の光パルス伝搬解析精度の検討

A study for numerical accuracies of finite difference time domain (FDTD) analysis in three-dimensional scattering medium

熊澤 秀幸、藤原 昇平、谷藤 忠敏

Hideyuki Kumazawa, Shohei Fujiwara, Tadatoshi Tanifuji

1. はじめに

近赤外光における酸化・還元ヘモグロビンの光吸収係数スペクトルの相異を利用した拡散光トモグラフィは、脳機能計測ツールとして期待されている^[1]。生体にピコ秒パルス照射して、その散乱光パルスから生体内部の光学パラメータを推定する時間領域拡散光トモグラフィ (Time-resolved Diffused Optical Tomography: TDOT) は、高精度な光学パラメータ推定を実現できる可能性がある^{[2],[3]}。TDOTを実現するためには、3次元不均一光散乱体中の光パルス伝搬解析が必要不可欠である。本報告は、筆者等が定式化したFDTD法^[4]による3次元光散乱体の光パルス伝搬解析精度向上法を提案する。

2. 光拡散方程式と境界条件

本節では、光拡散方程式^{[5],[6]}と境界条件について述べ、FDTD解析精度を向上するための境界条件を提案する。光拡散方程式は下式に示す時刻 t 、位置 \mathbf{r} の放射発散度 $\phi(\mathbf{r}, t)$ と拡散放射流速 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ の微分方程式である。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \mu_{tr} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \epsilon_{r1}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) \hat{\mathbf{s}} d\omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \mu_a \phi(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \epsilon_{r1}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) d\omega \quad (2)$$

上式で μ_a 及び μ_{tr} は光吸収及び輸送減衰係数、 $\epsilon_{r1}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)$ は等価波源を示す。(1)式で $\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) / \partial t \approx 0$ と近似し $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ を $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\epsilon_{r1}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)$ で解き、(2)式に代入すると $\phi(\mathbf{r}, t)$ のみの2次微分方程式が得られる^{[5],[6]}。散乱体-非散乱体境界 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_b$ では、次式が成立する^[5]。

$$\phi(\mathbf{r}_b, t) + 2 \mathbf{J}_n(\mathbf{r}_b, t) = 0 \quad (3)$$

上式で $\mathbf{J}_n(\mathbf{r}_b, t)$ は、境界面に垂直な内向き法線方向の拡散放射流速である。 $\phi(\mathbf{r}, t)$ のみの2次微分方程式を解析する場合^[5]には(3)式を(1)式の n 方向成分に代入して得られる次式が境界条件として使用されている。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu_{tr} \right) \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{2}{3} \nabla_n \phi(\mathbf{r}, t) = - \int_{4\pi} \epsilon_{r1}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\omega \quad (4)$$

筆者等が定式化したFDTD解析では、図1に示すように、散乱体の z 方向に入射した光子は $z = 1/\mu_s$ で最初に散乱されると仮定している。ここで、 $\mu_s = \mu_s(1-g)$ は、等価散乱係数、 g は非等方散乱パラメータである。この場合、図1に示すように、 $\Delta z \mu_s > 2$ の時は、表層 Yee 格子で拡散光が発生する。しかし、上の境界条件を表層 Yee 格子に適用すると、 $g=0$ の場合は(4)式右辺が零になり、表層 Yee 格子で発生する拡散光の評価が不可能となる。

以上の問題を解決するために、(3)式を(2)式に代入する境界条件を検討した。この場合、境界条件は $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{J}_n(\mathbf{r}_b, t)$ が混在するが、ここで使用するFDTD解析はこれ

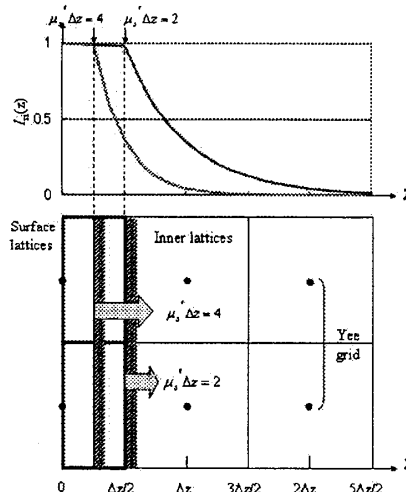


図1 表層Yee格子での拡散光の発生

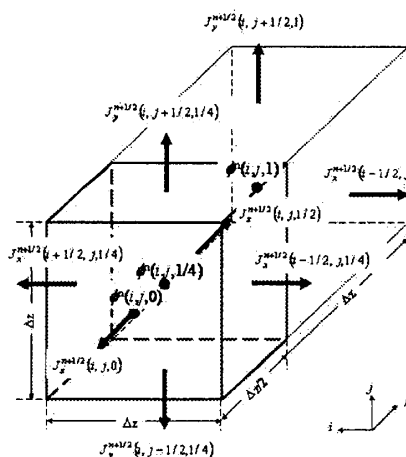


図2 表層Yee格子の放射発散度と拡散放射流速

らの物理量を計算に組み込んでいるので、不都合は無い。(3)式を(2)式に代入し、図2に示す表層 Yee 格子で体積積分し^[7]、これを差分化すると表層 Yee 格子の $\phi^n(i, j, 0)$ のFDTD解は次式となる。

$$C_2 \phi^{n+1}(i, j, 0) = C_1 \phi^n(i, j, 0) - \left\{ \phi^{n+1}(i, j, 1) - \phi^n(i, j, 1) \right\} / 4 / \Delta z - \left\{ \phi^{n+1}(i, j, 1) + \phi^2(1, i, j) \right\} \mu_a / 8 - 2 J_z^{n+1/2}(i, j, 1/2) / \Delta z - 3 \left\{ J_x^{n+1/2}(i+1/2, j, 0) - J_x^{n+1/2}(i-1/2, j, 0) \right\} / 4 / \Delta x - \left\{ J_x^{n+1/2}(i+1/2, j, 1) - J_x^{n+1/2}(i-1/2, j, 1) \right\} / 4 / \Delta x - 3 \left\{ J_y^{n+1/2}(i, j+1/2, 0) - J_y^{n+1/2}(i, j-1/2, 0) \right\} / 4 / \Delta y - \left\{ J_y^{n+1/2}(i, j+1/2, 1) - J_y^{n+1/2}(i, j-1/2, 1) \right\} / 4 / \Delta y + \mu_s \int F_0(\rho) dS / \Delta x \Delta y \bullet \int_0^{\Delta z/2} I_n(z) f^{n+1/2}(t-z/c) dz / \Delta z / 2 \quad (5)$$

† 北見工業大学 Kitami Institute of Technology

上式で表層 Yee 格子中心の $\phi^n(i, j, 1/4)$ 、 $J_x^{n+1/2}(i \pm 1/2, j, 1/4)$ 及び $J_y^{n+1/2}(i, j \pm 1/2, 1/4)$ は、格子点の値から直線近似した。

上式で $f^{n+1}(t-z/c)$ 及び $F_0(\rho)$ は、入射パルス波形とレーザビーム形状を示す。また、 C_1 及び C_2 は次式で与えられる。

$$C_{1,2} = 3/4c\Delta t \mp 3/8\mu_a \mp 1/2\Delta z, \quad (6)$$

$J_x^{n+1/2}(i \pm 1/2, j, 0)$ 、 $J_y^{n+1/2}(i, j \pm 1/2, 0)$ 及び $J_z^{n+1/2}(i, j, 1/2)$ についても表層の Yee 格子で(2)式を積分することにより、同様に FDTD 解を得る。

3. 光パルス伝搬解析精度

前節の解析を用いて、 $80 \times 80 \times 30 \text{mm}^3$ の3次元光散乱体の前方及び後方散乱光パルス光パルス応答解析精度の境界条件依存性を検討した。なお、 $g=0$ と仮定し、入射光パルスは $1/e$ 全幅が 60ps のガウス型を用いた。

3.1 光パルス波形

光パルス波形は、境界条件依存性は見られなかった。図3は、 $\Delta z = 0.5 \text{mm}$ を基準としたときの、前方及び後方散乱光パルス波形の平均遅延時間誤差の光源-検出器間隔(d)依存性を示す。なお、 μ_a 及び μ_s' は、0.02 及び $2(\text{mm}^{-1})$ と仮定した。図から Δz の拡大に伴い、グリッド分散の影響で、光パルス伝搬速度が増加し平均遅延時間が減少していることが分かる。また、後方散乱光パルスの遅延時間誤差は d が大きくなるに従い悪化するが、前方散乱光パルスの場合、 $d=30(\text{mm})$ 近傍で誤差が最小となる。これは、本解析法では、格子辺に対して対角方向の分散が水平方向のそれに比べて小さいことに起因している。図3から、 $\Delta z = 1 \text{mm}$ の場合は 20ps の誤差に留まっているが、 Δz を 2mm に拡大すると平均遅延時間誤差は 120ps 程度に拡大する。 $\Delta z = 1$ 及び 2mm で計算した光パルスを図3に示す遅延時間補正を行い、 $\Delta z = 0.5 \text{mm}$ の計算結果と比較した結果を図4に示す。この結果から $\Delta z = 2 \text{mm}$ の場合でも、振幅誤差は 5% 以下に留まっていることが分かる。

3.2 光パルスパワ

図5は、 $\Delta z = 0.5 (\text{mm})$ の計算結果で規格化した後方散乱光パルスパワの境界条件依存性を示す。このとき、図2から分かるように、 $\Delta z = 2 (\text{mm})$ の場合は、表面 Yee 格子で拡散光が発生する。なお、光パルスパワは図3の平均遅延時間 Δt を用いて、 $\exp(-c\mu_a\Delta t)$ の補正を行った。この結果から、 $\Delta z = 2 (\text{mm})$ の場合は、(4)式で与えられる従来の境界条件を適用すると、40%程度の誤差を伴うことが分かる。これに対して、ここで提案した(5)式を用いると $g=0$ の場合でも誤差は 10%程度に抑圧されることが分かる。以上、光源と検出器が Yee 格子辺と平行な場合の結果を示したが、対角方向についてもほぼ同様の結果となった。

今後は、(1)本解析法と遅延時間補償が不要な Non-Standard FDTD 法^[8]との組み合わせ、(2)グリッド分散は光拡散初期で顕著なことから^[8]、時間の進行に伴い Δz を大きくする、等の方法により3次元光散乱体の FDTD 解析における Δz の拡大を行う必要がある。

4. まとめ

FDTD 法で光拡散方程式を数値解析する際の新たな境界条件を提案した。これを用いると Yee 格子サイズの拡大に伴う数値解析誤差の抑圧が可能なことを示した。

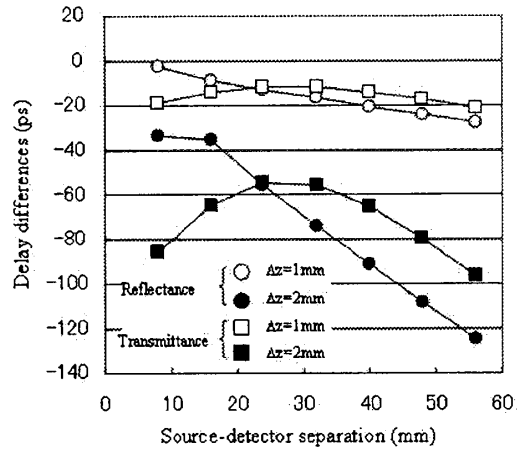


図3 光パルス平均遅延時間の Δz 依存性

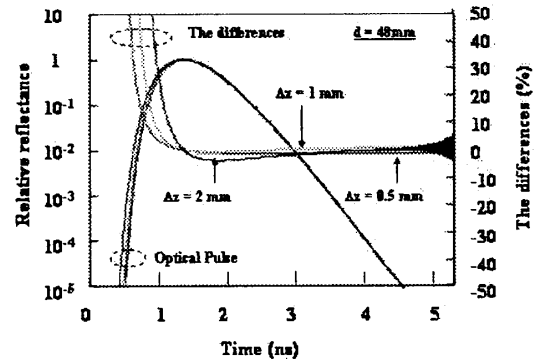


図4 光パルス応答の格子サイズ依存性(遅延補正後)

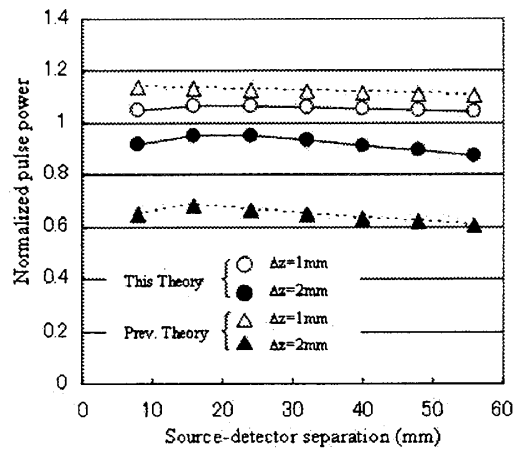


図5 後方散乱光パルスパワの Δz 依存性(遅延補正後)

参考文献

- [1] M. Fabiani *et al.*, IEEE Eng. in Med. and Biol. Mag., Vol.26, No.4 (2007).
- [2] A. H. Hielscher *et al.*, IEEE Trans. Medical Imaging, vol.18, No.3, pp.262-271(1999)
- [3] F. Gao *et al.*, Applied Optics, vol. 41, No.4, pp. 778-791, 2002.
- [4] T. Tanifuji *et al.*, IEEE Trans. Medical Imaging, vol.21, No.2, pp.181-184, 2002.
- [5] A. Ishimaru: *Wave propagation and scattering in random media* (IEEE Press, New York, 1997), Chap. 7, Chap. 9.
- [6] Y. Yamada: Annual Review of Heat Transfer, VI, Begell House Inc.1995.
- [7] T. Tanifuji *et al.*, OPTICAL REVIEW vol.12, No.6, pp.480-485, 2005.
- [8] 加藤他、電子情報通信学会 2007 年総合全国大会、D-7-6、2007.