

LI_018

ガウシングラフィカルモデルを用いた画像補修アルゴリズム

Digital Image Inpainting Algorithm by Using Gaussian Graphical Model

安田 宗樹*
Muneki Yasuda

大久保 潤†
Jun Ohokubo

田中 和之‡
Kazuyuki Tanaka

1 はじめに

画像補修 (Digital image inpainting) とは画像の欠損部を自動的に再構築する画像処理技術である。様々な手法が提案されているが、ほとんどの場合、画像における欠損部は人為的に手で決め、欠損部わの色の情報はその境界の色の情報から推定するという方法で行われる。代表的なアルゴリズムは、欠損部わの階調値の勾配が、外からの勾配とスムーズにつながるように欠損部わの階調値を決めるという方針で設計されている [1, 2, 3, 4]。これらのアルゴリズムは直感的に理解しやすいものではあるが、やや複雑な手続きを必要とする。

一方、我々はマルコフ確率場に基づいて、全く異なる観点で画像補修の枠組みを提案した [5]。確率モデルによる画像処理については、ベイジアンネットなどの確率推論の理論との統合により多くの有用な結果が報告されている [6, 7, 8, 9]。しかし、文献 [5] で提案されたアルゴリズムのモデルパラメータに対する依存性はまだ明らかとなっていない。今後さらにこのアルゴリズムを発展させてゆくためには、最適なモデルパラメータが存在するかどうかなど、確率モデルの詳細な性質を明らかにすることが重要である。そこで本論文では、文献 [5] において我々の提案した確率モデルによる画像補修の定式化をモデルパラメータによる画像補修の依存性という視点からより詳細に議論する。

2 モデルの定式化とアルゴリズム

画像の欠損している領域に含まれるピクセルの集合を Ω 、していない領域に含まれるピクセルの集合を D とする。 Ω の階調値を D の情報のみを用いて推定するために

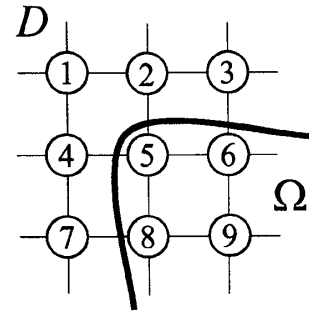


図 1: モデルの説明

白丸は各ピクセルを表しており、説明のために番号付けしてある。白丸同士をつないでいる線分は各ピクセルの隣接関係を表している。太い曲線は欠損している領域 Ω と欠損していない領域 D との境界線を表している。
 $\Omega = \{5, 6, 8, 9\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{5, 6, 8\}$.

次のコスト関数を導入する。

$$E(\mathbf{f}) \equiv \frac{\beta}{2} \sum_{i \in B} (f_i - z_i)^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{(ij) \in \mathcal{N}_\Omega} (f_i - f_j)^2 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{f} = \{f_i \mid i \in \Omega\}$ は欠損している領域の階調値であり、集合 B は領域 Ω の中で欠損していない領域 D に隣接する全てのピクセルの集合である。すなわち式 (1) の第 1 項は領域 Ω の境界のピクセルにのみ課されている項である。また、 $\{z_i \mid i \in B\}$ は領域 B に属するピクセル i に隣接するピクセルの中で領域 D に属するピクセルの階調値であり、複数ある場合にはそれらの平均値で定義する。つまり、 $\{z_i\}$ は Ω の境界に隣接している欠損していない領域から決まる値であり、補修する画像によって決定する定数である。第 2 項の和は領域 Ω の中の隣接する全てのピクセル対に関する和であり、 (ij) は隣接するピクセル対 i, j を表し、 \mathcal{N}_Ω は領域 Ω の中で隣接する全てのピクセルの集合である。 β と α は共に正であり、これらはそれぞれの項の強さを調節するモデルパラメータである。

図 1 で本モデルの簡単な説明する。図 1 において、欠損しているピクセルは 5, 6, 8, 9 番のピクセルである。

* 東北大学大学院情報科学研究科 システム情報科学専攻 e-mail: muneki@smapi.is.tohoku.ac.jp

† 東北大学大学院情報科学研究科 システム情報科学専攻

‡ 東北大学大学院情報科学研究科 応用情報科学専攻 e-mail: kazu@smapi.is.tohoku.ac.jp

$\Omega = \{5, 6, 8, 9\}$ であり, $D = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ である. 集合 B は Ω の中で D に隣接する全てのピクセルの集合であるので, $B = \{5, 6, 8\}$ である. D に属するピクセルの階調値をそれぞれ $\{g_i \mid i \in D\} = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_7\}$ とすると, $\{z_i \mid i \in B = \{5, 6, 8\}\}$ はそれぞれ $z_5 = (g_2 + g_4)/2$, $z_6 = g_3$, $z_8 = g_7$ となる.

式 (1) のコスト関数の最小化において第 1 項は領域 B に属するピクセルが隣接する領域 D のピクセルとできるだけ近い階調値をとるように調整する役割を果たしている. また, 第 2 項の寄与は領域 Ω 内のピクセルが互いに隣接するピクセルと近い階調値をとるように選ぶことに対応している. この 2 つの競合する機能のバランスから目的とする画像の補修を達成しようというわけである.

今, 次で定義される確率分布を考える.

$$P(\mathbf{f}) \equiv \frac{1}{Z} e^{-E(\mathbf{f})} \quad (2)$$

ここで, Z は規格化定数である. 式 (2) はギブス分布と呼ばれ, 一部の特殊なケースを除いて厳密な取り扱いが困難であるが, 大変豊富な構造を持つ分布として知られる. 式 (1) の最小値が確率分布 (2) の最大値に対応していることは容易に確認できる. したがって, 我々は式 (1) のコスト関数を最小化する代わりに, この確率分布 (2) を最大化することで目的の画像補修を達成することにする. このように評価基準として確率を持ち込むことによって, その最適解の探索に確率的な計算技法を用いることが可能となる.

Q 階調を持つ画像を扱う場合, 通常確率変数は $f_i = \{0, 1, \dots, Q-1\}$ の離散値である. しかし, 確率変数が離散値であると確率分布 (2) の取り扱いは大変困難なものとなる. そこで我々は, 確率変数 f_i を $(-\infty, \infty)$ の間の任意の実数を取る連続値の確率変数と近似する. すると, 確率分布 (2) は単に多次元ガウス分布となり, 統計量の解析が容易になる. これはガウシングラフィカルモデルと呼ばれ, マルコフ確率場を基礎とする確率的画像処理モデルの一種である [6]. 連続値近似の結果, 確率分布 (2) は

$$P(\mathbf{f}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{A}}{(2\pi)^{|\Omega|}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{m})^t \mathbf{A} (\mathbf{f} - \mathbf{m}) \right\} \quad (3)$$

となる. ここで, 行列 $\mathbf{A} = \{A_{ij} \mid i \in \Omega, j \in \Omega\}$ とベクトル $\mathbf{m} = \{m_i \mid i \in \Omega\}$ は以下で定義される.

$$A_{ij} \equiv \begin{cases} -\alpha & ((ij) \in \mathcal{N}_\Omega) \\ 0 & ((ij) \notin \mathcal{N}_\Omega) \end{cases}, A_{ii} \equiv \begin{cases} \beta + k_i \alpha & (i \in B) \\ k_i \alpha & (i \notin B) \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{m} \equiv \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (5)$$

ベクトル $\mathbf{b} = \{b_i \mid i \in \Omega\}$ は

$$b_i \equiv \begin{cases} \beta z_i & (i \in B) \\ 0 & (i \notin B) \end{cases} \quad (6)$$

で定義されている. また, k_i はピクセル i に隣接するピクセルの中で, 領域 Ω に含まれるピクセルの数である. 式 (3) は多次元ガウス分布の形を持つため, 各画素ごとの平均の計算には多次元ガウス積を用いることができ, 更に, この場合は確率分布を最大化する \mathbf{f} の階調値が平均ベクトル \mathbf{m} に等しくなることを容易に示すことができる. すなわちが我々の推定する領域 Ω の推定値の計算は式 (3) のガウシングラフィカルモデルの平均ベクトル \mathbf{m} を求める問題に帰着される. \mathbf{m} を求めるには式 (5) を用いてもよいが, 次の固定点方程式を用いると便利である.

$$m_i = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \in \Omega, j \neq i} A_{ij} m_j \right) \quad (7)$$

したがって, 我々のアルゴリズムは以下にまとめられる.

- Step 1. 行列 \mathbf{A} , ベクトル \mathbf{b} を計算する.
- Step 2. 式 (7) を用いてベクトル \mathbf{m} を求める.
- Step 3. $\{\hat{f}_i = [m_i + 0.5] \mid i \in \Omega\}$ より領域 Ω の階調値 $\{\hat{f}_i\}$ を定める. ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

画像の欠損部を人為的に指定すること以外は自動的に修復を行い, 更にその処理は式 (7) を数値的に繰り返し計算するだけというシンプルな形に帰着されていることがこのアルゴリズムの特長である.

実際, 確率分布 (3) の最大値は式 (1) の最小値に対応しているため, 単に式 (1) の極小値 (実際そこは最小値になっている.) を求めることによっても式 (7) を導出することができる. しかし, マルコフ確率場に拡張することにより, EM アルゴリズム等の有用な確率的方法論を素直な形で導入でき, その発展性を考慮すると確率的な形に定式化することは重要である.

確率変数 \mathbf{f} が離散値である場合, コスト関数から直接最小値を求めることは全探索問題となってしまう計算困難という障壁に直面ため, 今回我々は確率変数を連続値に近似して画像補修の問題にアプローチしたが, もちろんこれとは別の方法も考えられる. 例えば, 確率伝播法をはじめとする確率的な計算技法を用いる方法である. 確率伝播法は人工知能やベイジアンネットワーク等で精力的に研究されており, それもまた確率分布 (2) のような計算困難な分布をもつ問題を近似的に解決する方法である [6, 7]. そこでは確率変数 \mathbf{f} を離散値のまま扱うことが可能であり, 今後この方面からのアルゴリズムの発展も期待され

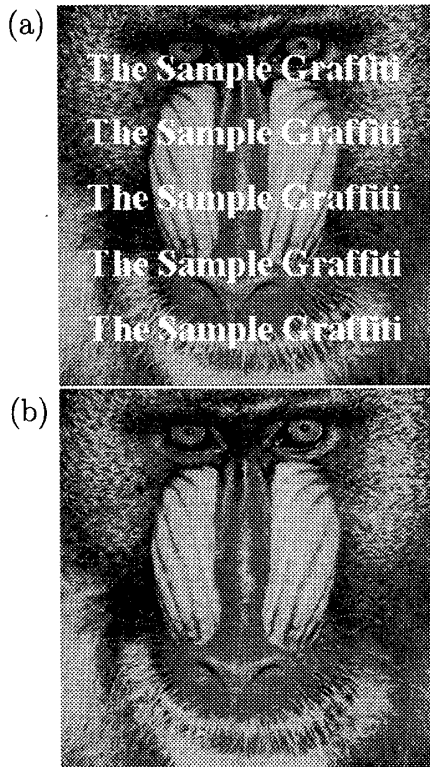


図2: 提案アルゴリズムによる数値実験

(a) 欠損した画像. (b) 提案アルゴリズムにより補修された画像.

る. 確率伝播法を用いた画像補修の初歩的なアルゴリズムは文献 [5] で導入されている.

3 数値実験

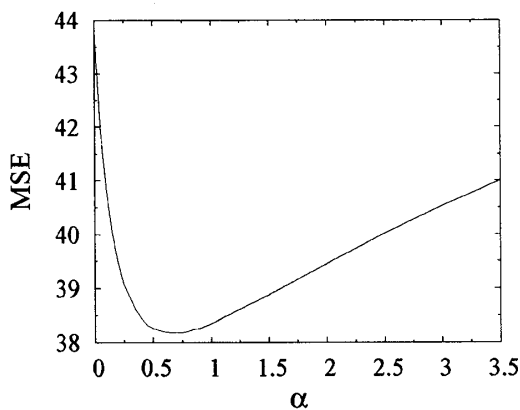
図3: MSE の α 依存性

図2(a) のデータに対する提案手法による画像補修における MSE の α 依存性 ($\beta = 1$).

本節では, 提案手法のアルゴリズムに対する数値実験を図2(a) に与えられた 256 階調の画像データに対して行

い, モデルパラメータに対する依存性を調べる. 図2(a) は標準画像を人為的に欠損させた画像であり, 白字で上塗りされた部分を欠損部としている. 欠損部の割合は全体のおよそ 16% を占めている.

提案手法により補修された画像は図2(b) の通りである. このとき, モデルパラメータの値は $\alpha = 0.65$, $\beta = 1$ と設定している. 補修画像に多少ぼやけている箇所も認められるが, 全体としては良好な補修が行われていることが確認できる. この数値実験は 1GHz の CPU を持つパーソナルコンピュータにより実行しているが, 計算時間は 1 秒未満であり, 非常に高速である.

次に, モデルパラメータ α に対する平均 2 乗誤差 (Mean Square Error; MSE)

$$\text{MSE} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \in \Omega} (\hat{f}_i - f_i^*)^2 \quad (8)$$

の依存性について検討する. 式(8)において $\{f_i^*\}$ は原画像の各ピクセルの階調値であり, $\{\hat{f}_i\}$ は提案手法により補修した画像の階調値である. よって, MSE の値が小さいほど補修された画像は原画像に近いと見なすことができる. 図3に図2(a) の画像データに対して $\beta = 1$ と固定したときの提案手法における α の値による MSE の依存性をプロットしたグラフを示す. 図3から α に対する MSE には最小値が存在することがわかる. 図2(b) は図3における MSE の最小値を与える付近の α の値に対して得られた補修画像である. 更に MSE が大きい範囲の α を用いた補修ではあまり良い補修結果が得られないことも確認している.

図2(a) 以外のいくつかの標準画像に対する欠損を持つ画像データに対しても同様に MSE の α に対する依存性を調べている. その数値実験の結果から最小値の値およびその最小値を与える α の値は画像や欠損の仕方によって異なるが, いずれの場合も最小値が存在し, 図3と同様の傾向があることを確認している. 以上により, 本稿の提案アルゴリズムにおいては α と β のバランスが重要であり, 更に最適なバランスが存在することを示している.

4 まとめ

本論文では文献 [5] において提案したガウシアングラフィカルモデルを用いた画像補修アルゴリズムにおけるモデルパラメータに対する補修結果の依存性の詳細について報告した.

提案アルゴリズムは単純な式(7)により表され, 非常にシンプルなものであるため実装が容易であり, 比較的早い処理速度で結果を得ることが可能である. また, ガウシアングラフィカルモデルはマルコフ確率場を基礎としたものであり, より広い応用範囲への拡張が期待され

る [10]. また, カラー画像に対しては RGB 空間のそれぞれにおいて同様なアルゴリズムを適用すれば良いため, カラー画像への拡張も容易である.

今回の数値実験の結果から, モデルパラメータ β の値によって最適な α の値が幾つかの標準画像に対して存在することが明らかとなった. あらゆる画像に対して, このような最適なモデルパラメータの値が必ず存在するかどうかは本論文のみの結果ではわからないが, そのようなモデルパラメータが存在する可能性を強く予想できる結果を得られたと考えている. これは非常に重要な結果であり, その最適なパラメータは EM アルゴリズム等を用いて推定される可能性があり, これは今後の課題である. また, 本提案手法ではパラメータはピクセルもしくはピクセル対毎に一樣としたが, α_{ij} や β_i のようにモデルパラメータの値がピクセルの位置に依存する場合についても同様の定式化も可能であり, この拡張により更に良好な画質を有する画像補修が可能になることが期待される.

本論文の提案アルゴリズムは, 欠損部 Ω の階調値を推定するに当たって, Ω に隣接する領域のみのピクセル情報を利用しているが, エッジなどの情報をより詳細に取り入れるためにはより広域の情報を利用する必要があると考えられる. したがって, この枠組みを拡張し, さらに広域の有用な情報を考慮するモデルを作ることは, より良好な画質を持つ推定結果を得るため重要であると考えられる. 更に, 欠損部の形状や占有面積の変化に対する提案アルゴリズムの依存性を明らかにすることも今後に残された興味ある問題である.

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (No.14084101, No.14084203, No.17500134) の補助を得て行われたものである.

参考文献

- [1] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester, "Image Inpainting," in *Proc. SIG-GRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, edited by Kurt Akeley, pp 417–424, Reading, MA: Addison-Wesley, 2000.
- [2] M. Bertalmio, A. L. Bertozzi, and G. Sapiro, "Navier-Stokes, Fluid Dynamics, and Image and Video Inpainting," in *Proc. ICCV 2001*, pp. 1335 – 1362, IEEE CS Press 1. [CITY]:[PUB], 2001.
- [3] C. Ballester, M. Bertalmio, V. Caselles, G. Sapiro, and J. Verdera, "Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 10(8), pp. 1200 – 1211, August 2001.
- [4] T. F. Chan and J. Shen, "Mathematical models of local non-texture inpainting," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 62(3), pp. 1019 – 1043, 2002.
- [5] M. Yasuda, J. Ohkubo and K. Tanaka, "Digital image inpainting based on Markov random field," *Proceedings of International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation (November 28-30, 2005, Vienna, Austria)*, Vol.II, pp.747-752, IEEE Computer Society Press, March 2006.
- [6] K. Tanaka, "Statistical-mechanical approach to image processing," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol 35, pp. R81 – R150, 2002.
- [7] 田中和之, 大規模確率場における予測と推論, 電子情報通信学会誌, Vol.88, No.9, pp.698-702, September 2005.
- [8] 田中和之編著, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ「確率的情報処理と統計力学 —様々なアプローチとそのチュートリアル», サイエンス社 (2006年9月).
- [9] 田中和之, 確率モデルによる画像処理技術入門, 森北出版 (2006年末までに刊行予定, 印刷中) .
- [10] R. Chellappa, A. Jain, "Markov Random Fields: Theory and Application," Academic Press, 1993.