

# 間引き、補間を含むフィルタ処理におけるシフト依存性の評価法 Measure of Shift Sensitivity in Filtering with Decimation or Interpolation

松尾 直志<sup>†</sup>

吉田 靖夫

中森 伸行<sup>‡</sup>

Tadashi Matsuo

Yasuo Yoshida

Nobuyuki Nakamori

## 1. はじめに

間引きや補間を伴うフィルタ処理はウェーブレット変換等のフィルタバンクに用いられている。注目する周波数に応じて分析時には間引きを、合成時には補間を行うことで信号を効率的に扱うことができるが、間引きや補間を含む処理は入力信号の相対的な位置変化(シフト)によって結果が変化する。間引きを伴う処理のシフト依存性が高い場合、同じ信号波形であるにもかかわらずその位置によって信号認識の結果が変わることになる。また、補間を伴う合成でシフト依存性が高い場合には、特定位置には所望の信号を合成できるが異なる位置には同様の信号が合成できない、という問題が生じる。つまり同じ信号でも相対位置によって認識結果、圧縮効率や強調効果が変わることになる。このため、ウェーブレットやフィルタバンクはそのシフト依存性が低くなるように設計されるべきであるが、そのための一般的なシフト依存性の数値的評価法は与えられていなかった。

通常のウェーブレット分解は、シフト依存性が高く入力信号のシフトによって処理結果が大きく変化する[5]が、これを改善するものとして Kingsbury の Dual-Tree Discrete Wavelet Transform (DTDWT) [4] や Fernandes の Complex Wavelet Transform (CWT) [3] 等が提案されている。しかし、これらの設計においてはシフト依存性そのものの評価法は与えられていない。文献 [3] においてはシフトによる出力信号のパワーの変化を見ているがこれは波形変化が考慮されておらず、規格化された形にもなっていない。また、合成時のシフト依存性は全く評価されていない。

一般的なシステムにおけるシフト依存性を数値的に評価できれば、フィルタバンクやウェーブレットの設計において、シフト依存性が低くなるような設計が可能となる。本論文で提案する評価法は、分析、合成のどちらのシステムにおいても規格化された数値でシフト依存性を評価できる。間引きを含む場合については、筆者らは既に評価法を与えている [5] が本論文では補間を含むフィルタ処理のシフト依存性の評価法も合わ

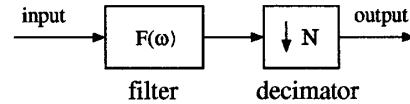


図 1: 間引きを伴うフィルタ処理

せて提案する。

## 2. 間引きを伴うフィルタ処理のシフト依存性

図 1 は、ウェーブレット分解などで用いられる、間引きを含むフィルタ処理を表したものである。原信号をシフトすると、当然出力信号も変化するが、その際の「波形」変化に注目してシフト依存性を評価する。但し、この原信号のシフトによって出力信号も位置がずれていることに注意する必要がある。提案法では、出力信号の位置的なずれを除去して波形の変化のみを評価するために出力信号に逆シフトを施すことにする。この逆シフトは原信号に加えられたシフトを相殺するように行うべきであるが、間引きを行っているため直接の逆シフトで原信号のシフトを相殺することができない。そこで出力信号を補間してから逆シフトを施した信号を考え、この信号の原信号シフトに対する依存性を見る。

以下では原信号を  $\{c_n\}$  とし、その周波数表現を  $c(\omega)$  と表すことにする。これを  $p$  だけシフトし、フィルタ  $F(\omega)$  を通した結果は  $c(\omega)F(\omega)e^{ip\omega}$  と表せる。これを間隔  $N$  でサンプリングして間引きを行った結果の周波数表現を  $d_p(\omega)$  とすればこれは以下のように表せる。

$$d_p(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} c\left(\frac{\omega + 2\pi l}{N}\right) e^{i\frac{\omega + 2\pi l}{N} p} F\left(\frac{\omega + 2\pi l}{N}\right) \quad (1)$$

この  $d_p(\omega)$  が出力信号であり、これを補間した信号を  $\tilde{y}_p(\omega)$  とする。補間としては線型なものと考えれば

$$\tilde{y}_p(\omega) = d_p(N\omega)s(\omega) \quad (2)$$

と表せる。式 (2) の  $s(\omega)$  が補間フィルタを表す。この  $\tilde{y}_p(\omega)$  を逆シフトした信号  $\tilde{y}_p(\omega)e^{-ip\omega}$  を  $y_p(\omega)$  とする。このとき、これら補間した信号  $y_p(\omega)$  と、間引きを行わない理想的な出力  $c(\omega)F(\omega)$  との差は次式のように表せる。

$$\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |c(\omega)F(\omega) - y_p(\omega)|^2 d\omega \quad (3)$$

<sup>†</sup>京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科, Kyoto Institute of Technology

<sup>‡</sup>京都工芸繊維大学, Kyoto Institute of Technology

$s(\omega)$  は逆シフトのために施される仮想的な補間であるので様々なものが考えられるが、式 (3) の  $s(\omega)$  に関する最小値はフィルタ処理 (図 1) のシフト依存性を代表する値と見なせるので、本論文ではこの最小値を規格化して  $r_a(c, F)$  としシフト依存性の評価尺度とする。

$$r_a(c, F) \stackrel{\text{def}}{=} \min_s \frac{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |c(\omega)F(\omega) - y_p(\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |c(\omega)F(\omega)|^2 d\omega} \quad (4)$$

定義から  $r_a(c, F)$  が小さいほど、その過程のシフト依存性は低いといえる。また、 $r_a(c, F)$  は実際の出力信号  $d_p(\omega)$  のエネルギーの変動を上から抑えている。このことから  $r_a(c, F)$  がシフト依存性に対応していることが分かる。

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|c(\omega)F(\omega) - y_p(\omega)\|^2}{\|c(\omega)F(\omega)\|^2} \leq r_a(c, F) \quad (5)$$

但し、 $\|\cdot\|$  はノルムを表し、以下のように定義されているものとする。

$$\|y_p(\omega)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |y_p(\omega)|^2 d\omega} \quad (6)$$

具体的な展開は省略するが、 $r_a(c, F)$  の定義式 (4) は式 (7) (次ページに表示) で定義される汎関数  $R(g)$  を用いて

$$r_a(c, F) = R(g_a), \quad g_a(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} c(\omega)F(\omega) \quad (8)$$

と表すこともできる。

汎関数  $R(g)$  について考える。まず、

$$h(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{l=0}^{N-1} |g(\frac{\omega+2\pi l}{N})|^4}{\left\{ \sum_{l=0}^{N-1} |g(\frac{\omega+2\pi l}{N})|^2 \right\}^2} \quad (9)$$

とすると、 $0 \leq h(\omega) \leq 1$  なので、 $0 \leq R(g) \leq 1$  が成り立つ。つまり、 $0 \leq r_a(c, F) \leq 1$  が成り立つ。また、 $N$  個の数値  $|g(\frac{\omega}{N})|^2, |g(\frac{\omega+2\pi}{N})|^2, \dots, |g(\frac{\omega+2\pi(N-1)}{N})|^2$  の内、どれかひとつが突出して大きい場合に  $h(\omega)$  は 1 に近くなるので、 $R(g)$  は 0 に近づく。逆にこの  $N$  個の中の内、2つの数値が突出して大きく、ほぼ等しい場合には  $h(\omega)$  は  $1/2$  に近づく。同様に  $m$  個の数値が突出しており、それらがほぼ等しい場合には  $h(\omega)$  はほぼ  $1/m$  となるので、 $R(g)$  は  $1 - 1/m$  に近づくことになる。つまり、 $r_a(c, F)$  はフィルタ  $F(\omega)$  のパワーが幅  $2\pi/N$  [rad] の範囲に集中している場合に小さくなる。

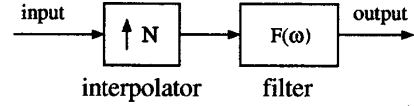


図 2: 補間を伴うフィルタ処理

### 3. 補間を伴うフィルタ処理のシフト依存性

次に、逆ウェーブレット変換などで用いられる補間を伴うフィルタ処理 (図 2) のシフト依存性について考える。しかし、ある出力信号が得られたときに、それをシフトした信号も出力することができるか、という問題がある。2. と同様に入力信号を  $c(\omega)$  とすると、図 2 の出力は  $c(N\omega)F(\omega)$  と表せる。 $c(N\omega)F(\omega)$  は出力可能な信号の一つであるが、これを  $p$  だけシフトした  $c(N\omega)F(\omega)e^{ip\omega}$  は、一般に出力可能ではない。ここでは、 $c(N\omega)F(\omega)$  と同じ波形が位置によっては近似的にしか出力できないというシフト依存性について考察する。

出力可能な信号の内でも最も  $c(N\omega)F(\omega)e^{ip\omega}$  に近いものを考え、そのときの誤差でシフト依存性を評価することを考える。まず、その誤差は以下のように表せる。

$$\min_{\tilde{c}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{c}(N\omega)F(\omega) - c(N\omega)F(\omega)e^{ip\omega}|^2 d\omega \quad (10)$$

この誤差を最小にするような  $\tilde{c}(\omega)$  を  $\tilde{c}_p(\omega)$  とすれば、これは次のように表せる。

$$\tilde{c}_p(\omega) = c(\omega) \frac{\sum_{l=0}^{N-1} |F(\frac{\omega+2\pi l}{N})|^2 e^{i\frac{\omega+2\pi l}{N} p}}{\sum_{l=0}^{N-1} |F(\frac{\omega+2\pi l}{N})|^2} \quad (11)$$

出力信号の大きさに対する誤差の大きさが問題となるから、誤差を  $p$  について和をとり出力信号のエネルギーで規格化したものをシフト依存性の指標と考え、これを  $r_s(c, F)$  とする。これは特定の入力信号に対するこのシステムのシフト依存性を表していると思える。

$$r_s(c, F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{c}_p(N\omega)F(\omega) - c(N\omega)F(\omega)e^{ip\omega}|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |c(N\omega)F(\omega)|^2 d\omega} \quad (12)$$

具体的な展開は省略するが、 $r_s(c, F)$  も、 $r_a(c, F)$  と同様に式 (7) の汎関数  $R(g)$  を用いて

$$r_s(c, F) = R(g_s), \quad g_s(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} c(N\omega)F(\omega) \quad (13)$$

と表せる。

$r_a(c, F)$  と同様に  $r_s(c, F)$  も  $F(\omega)$  のパワーが幅  $2\pi/N$  [rad] の範囲に集中していると小さくなる。

$$R(g) = \frac{\int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \left| g\left(\frac{\omega + 2\pi l}{N}\right) \right|^2 \left\{ 1 - \frac{\sum_{l=0}^{N-1} \left| g\left(\frac{\omega + 2\pi l}{N}\right) \right|^4}{\left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \left| g\left(\frac{\omega + 2\pi l}{N}\right) \right|^2 \right\}^2} \right\} d\omega}{\int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \left| g\left(\frac{\omega + 2\pi l}{N}\right) \right|^2 d\omega} \quad (7)$$

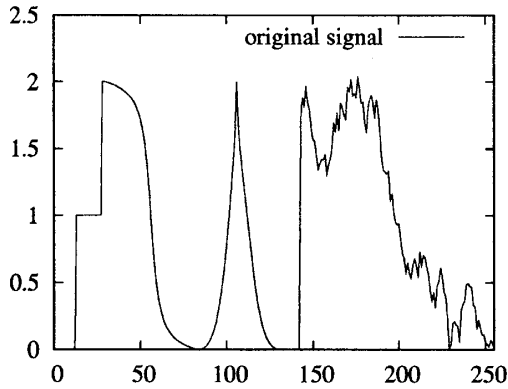


図 3: 原信号

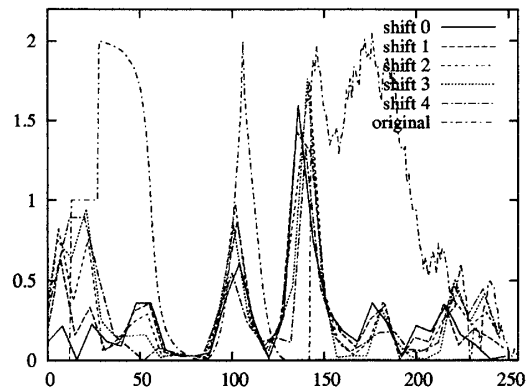


図 5: (9,7) 双直交 DWT のレベル 3 展開係数

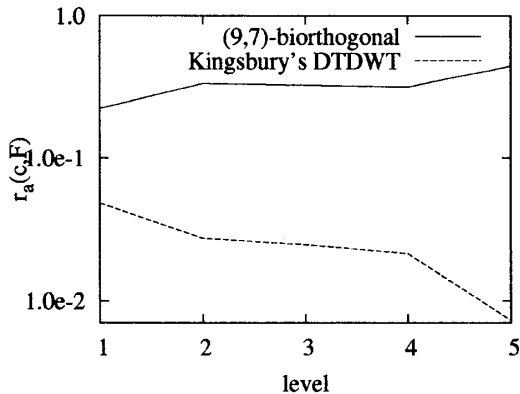


図 4:  $r_a(c, F)$  の比較

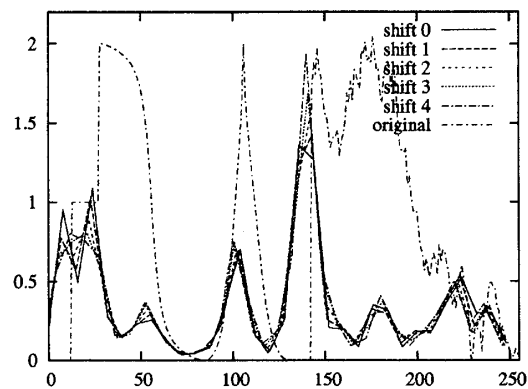


図 6: DTDWT のレベル 3 展開係数

#### 4. ウェーブレットのシフト依存性評価の例

次に、提案したシフト依存性の尺度  $r_a(c, F)$ ,  $r_s(c, F)$  を用いて実際の離散ウェーブレット変換 (DWT) を評価し、提案法の有効性を示す。ここでは、(9,7) 双直交 DWT [1], [2] と、Kingsbury の DTDWT [4] の内の (9,7) 双直交 DWT とタップ数 6 のフィルタを組み合わせ得られるものを比較する。DTDWT は 2 つの DWT を組み合わせるフィルタの負の周波数成分を実質的にほぼ 0 にするという方法である。周波数帯域幅が通常の DWT の半分になるので、2., 3. の結果からシフト依存性が下がることが期待できる。

##### 4.1 順変換の場合

ここではシフト依存性の改善を観察しやすいように、様々な成分を含む図 3 の信号を原信号  $c$  として評価を

行った。この原信号に対して各レベルの  $r_a(c, F)$  を計算した結果が図 4 である。DTDWT の方が明らかに小さく、シフト依存性が低いことが分かる。また、原信号を色々にシフトさせて高周波成分の展開係数の絶対値を計算した結果が図 5, 6 である。レベル 3 の展開係数なので実際の長さは原信号の 8 分の 1 であるが比較のため 8 倍に拡大し、原信号と長さを揃えている。また、波形変化を見るためにグラフ上で原信号のシフト幅に応じた逆シフトを施している。両図を比較すると、DTDWT は原信号をシフトしても出力波形の変化が小さく、図 4 の結果と対応していることが分かる。

##### 4.2 逆変換の場合

図 2 への入力としてインパルス  $c(\omega) = 1$  を与えた場合の、 $r_s(c, F)$  をレベル 1 から 5 について図 7 に示す。

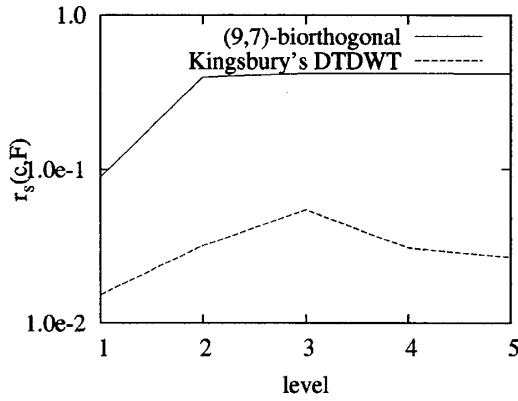


図 7:  $r_s(c, F)$  の比較

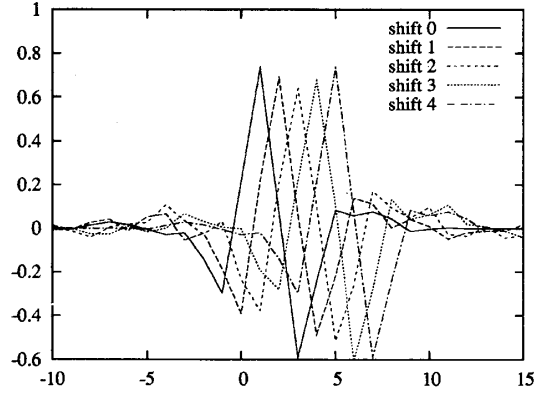


図 9: DTDWT の場合の誤差最小出力 (実部)

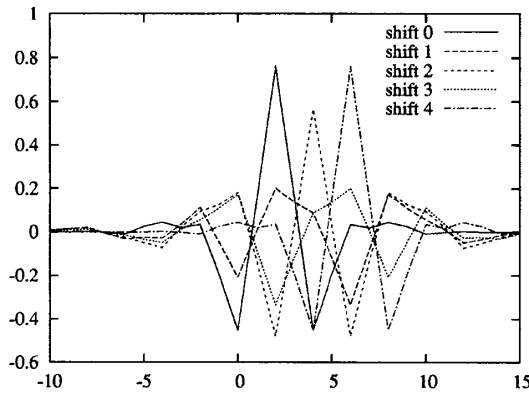


図 8: (9,7) 双直交 DWT の場合の誤差最小出力

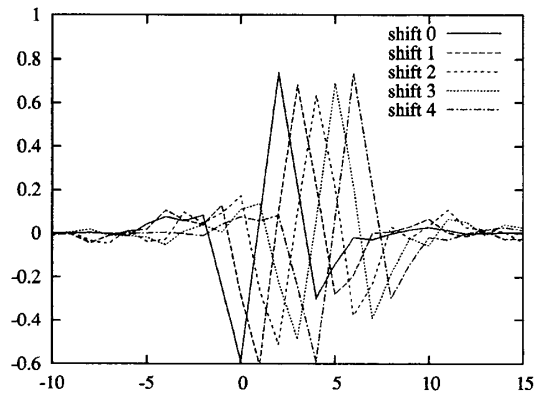


図 10: DTDWT の場合の誤差最小出力 (虚部)

こちらも図 4 と同様 DTDWT のシフト依存性が低いことを示している。また、このときの出力信号をシフトした  $c(N\omega)F(\omega)e^{ip\omega}$  に最も近い出力信号  $\tilde{c}_p(N\omega)F(\omega)$  は図 8, 9, 10 のようになる。いずれもレベル 2 の場合である。(9,7) 双直交 DWT はシフトした波形を出力できず、くずれていることが分かる。一方、DTDWT はその実部、虚部ともほぼシフトした波形を出力可能でシフト依存性が低いといえる。この結果も図 7 の結果と合致している。

### 5. おわりに

本論文では間引き、補間を伴うフィルタ処理に対してシフト依存性を評価する方法を与え、またその有効性を確認した。これまで、シフト依存性を抑えたウェーブレットはいくつか提案されているが、シフト依存性の確認としてはインパルス応答等をグラフ上で比較するのみで、数値評価はされていなかった。本論文で提案した評価法を用いれば数値的な評価が可能であるのでウェーブレットやフィルタバンクの設計に有用であると思われる。

### 参考文献

[1] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform," IEEE Trans. Image Process., vol.1, no.2,

pp.205–220, April 1992.

[2] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.  
 [3] F.C.A. Fernandes, R.L.C. van Spaendonck, and C.S. Burrus, "A new framework for complex wavelet transforms," IEEE Trans. Signal Process., vol.51, no.7, pp.1825–1837, July 2003.  
 [4] N.G. Kingsbury, "A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties," Proc. IEEE Int.Conf.Image Process., Vancouver, Sept. 2000.  
 [5] T. Matsuo, Y. Yoshida, and N. Nakamori, "Proposal of shift insensitive wavelet decomposition for stable analysis," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E88, no.8, Aug. 2005. now in printing.