

トークン整列問題の計算複雑に関する一考察

川原 純^{1,a)} 斎藤 寿樹^{2,b)} 吉仲 亮^{3,c)}

概要：本稿では、グラフの隣接頂点間で頂点上に配置されたトークンを交換し、目的配置を達成する、トークン整列問題の計算複雑を議論する。入力グラフが2部グラフで、かつ最大次数が高々3の場合にNP完全になることを示すとともに、多項式時間で解ける特殊なグラフクラスを提示する。

KAWAHARA JUN^{1,a)} SAITOH TOSHIKI^{2,b)} YOSHINAKA RYO^{3,c)}

1. はじめに

n 頂点のグラフが与えられ、グラフの頂点には1から n までのラベルが1つずつ振られている。各頂点には数字 $1, \dots, n$ が書かれたトークンが1個ずつ配置されている。隣接する2つの頂点上のトークンの交換を繰り返すことで、各トークンをトークンに書かれた数字の頂点まで移動させることを考える。このとき、トークンの交換回数の最小値を求める問題をトークン整列問題という。

トークン整列問題で入力グラフがパスの場合は、 $\{1, \dots, n\}$ 上の置換を実現する横棒本数が最小の「あみだくじ」を求める問題と等価である。横棒本数が最小のあみだくじは置換の反転数と同じであり、置換の反転数は $O(n\sqrt{\lg n})$ 時間で計算できる [2] ため、トークン整列問題で入力グラフがパスの場合の計算時間は $O(n\sqrt{\lg n})$ である。

入力グラフがパスの場合以外にもいくつかのグラフクラスについて計算時間が知られている。入力グラフがサイクルの場合 [5] や完全グラフの場合 [1], [5] の計算時間は $O(n^2)$ である。また、入力グラフが完全2部グラフの場合には多項式時間で計算できる [8]。

本問題に対する近似アルゴリズムもいくつか設計されている。Heath と Vergara [4] は入力グラフがパスの平方の場合に多項式時間2近似アルゴリズムを提案している。こ

こで、パスの平方とは、パス P において P 上での距離がちょうど2である2頂点間に辺を加えて得られるグラフである。Yamanaka ら [8] は入力グラフが木の場合に多項式時間2近似アルゴリズムを設計し、それをういて入力グラフが α スパナーの場合に多項式時間 2α 近似アルゴリズムを設計している。

入力グラフが一般の場合、トークン整列問題はクラスNPに属することは知られている [8] が、NP困難であるかどうかは知られていなかった。本稿では入力グラフが2部グラフで、かつ最大次数が高々3の場合にNP完全であることを示す。証明はNP困難であることが知られている最大次数制限付き3次元マッチング問題 [3], [6] からの還元によって行う。また本稿では、刺又グラフに対する多項式時間アルゴリズムを与える。ここで、刺又グラフとは、パスの片方の端から2番目の頂点に辺を1本追加で接続したグラフである。

1.1 関連研究

Yamanaka ら [9] は c 色トークン整列問題を提案している。 c 色トークン整列問題は、 $1, \dots, c$ のいずれかのラベルが(重複を許して)各トークンと各頂点に割り当てられているという設定で、トークンの交換回数の最小値を求める問題である。Yamanaka らは、 $c=2$ の場合の、一般のグラフ上での $O(n^3)$ 時間アルゴリズム、および、木における $O(n)$ 時間アルゴリズムを提案している。また、 c が一般の場合で、入力グラフの最大次数が高々2のとき $O(n^{c+2})$ 時間のアルゴリズムを与えている。さらに、 $c \geq 3$ で、入力グラフが平面グラフかつ最大次数が高々3に限られる場合でも、NP困難であることを示している。この証明内で帰着の際に構築されるインスタンスは、いくつかのトークン

¹ 奈良先端科学技術大学院大学
Nara Institute of Science and Technology
² 神戸大学
Kobe University
³ 京都大学
Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan
a) jkawahara@is.naist.jp
b) saitoh@eedept.kobe-u.ac.jp
c) ry@i.kyoto-u.ac.jp

の持つラベルが同じであるため、この証明だけではトークン整列問題の NP 困難性はいえない。

2. 準備

2.1 トークン整列問題

n 頂点のグラフを $G = (V, E)$ とする。ここで、 V は頂点の集合、 E は辺の集合である。各頂点にはそれぞれ異なるラベル v_1, \dots, v_n が振られている。 G は無向グラフかつ単純グラフであると仮定する。

異なるラベル v_1, \dots, v_n を持つ n 個のトークンを、 G の各頂点に 1 つずつ配置する。本稿では、頂点とトークンを同じ記号 v_1, \dots, v_n を用いて表し、証明中では「頂点 v_i 」、「トークン v_i 」という表現を用いる。1 対 1 写像 $f: V \rightarrow V$ を G 上のトークン配置と呼ぶ。意味としては、頂点 v_i にトークン $f(v_i)$ が配置されていると解釈し、また、トークン v_j が頂点 $f^{-1}(v_j)$ に配置されているとも解釈する。特に、 V から V への恒等写像を 目標トークン配置と呼び、 f_T と表記する。2 つのトークン配置 f, f' が隣接しているとは、以下が成り立つことと定義する。

- (i) $f'(v_i) = f(v_j)$ かつ $f'(v_j) = f(v_i)$ となる $\{v_i, v_j\} \in E$ が存在する。
- (ii) 各 $k = 1, \dots, n$ について、 $k \neq i, j$ ならば $f'(v_k) = f(v_k)$ が成り立つ。

このとき、トークン配置 f からトークン配置 f' を得る操作を、頂点 v_i, v_j 上のトークンを交換する、または、辺 $\{v_i, v_j\}$ 上で交換を行う、または、トークン $f(v_i), f(v_j)$ を交換すると表現する。また、このときトークン $f(v_i)$ ($f(v_j)$) は動くという。自然数 k と、トークン配置 f_1, \dots, f_k について、すべての $i = 1, \dots, k-1$ について f_i と f_{i+1} が隣接しているとき、トークン配置の列 $S = f_1 \dots f_k$ を f_1 と f_k の間のトークン交換列と呼ぶ。 $\text{len}(S) = k-1$ と定義し、これを S の長さと呼ぶ。トークン配置 f を f_T にするまでに必要な最小のトークン交換回数 $\text{OPT}(f)$ を

$$\text{OPT}(f) = \min_{S \in \mathcal{S}} \text{len}(S)$$

と定義する。ここで、 \mathcal{S} は f と f_T の間の任意のトークン交換列の集合である。トークン $v \in V$ とトークン交換列 $S = f_1 \dots f_k$ において、 $|\{i \mid f_i^{-1}(v) \neq f_{i+1}^{-1}(v)\}|$ を S においてトークン v が動いた回数と呼ぶ。 $\sum_{v \in V} |\{i \mid f_i^{-1}(v) \neq f_{i+1}^{-1}(v)\}| = 2 \text{len}(S)$ が成り立つ。

トークン整列問題とは、 f をグラフ G 上のトークン配置、 k を自然数とすると、インスタンス (G, f, k) に対して $\text{OPT}(f) \leq k$ か否かを判定する問題である。

2.2 3次元マッチング問題

m を自然数、 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$,

$Z = \{z_1, \dots, z_m\}$, $T \subseteq X \times Y \times Z$ とする。このとき、 $M \subseteq T$ が、 $|M| = m$ を満たし、かつ、任意の異なる 2 つの $m_1 = (x, y, z), m_2 = (x', y', z') \in M$ について、 $x \neq x'$ かつ $y \neq y'$ かつ $z \neq z'$ が成り立つとき、 M を T の 3次元マッチングという。3次元マッチング問題 (3DM) とは、インスタンス $((X, Y, Z), T)$ が与えられたとき、 T の 3次元マッチング M が存在するかどうかを答える問題である。3DM は NP 困難であることが知られている [3]。

B を自然数とする。任意の $x \in X$ について、 $|\{t \mid t = (x, y', z') \in T\}| \leq B$ であり、任意の $y \in Y$ について、 $|\{t \mid t = (x', y, z') \in T\}| \leq B$ であり、任意の $z \in Z$ について、 $|\{t \mid t = (x', y', z) \in T\}| \leq B$ が満たされているとき、 T の最大次数は B 以下に制限されているという。最大次数が B 以下に制限された 3次元マッチング問題 (3DM- B) とは、 T が最大次数 B 以下に制限されているようなインスタンス $((X, Y, Z), T)$ が与えられたとき、 T の 3次元マッチング M が存在するかどうかを答える問題である。3DM- B は $B \geq 3$ のとき MAX-SNP 困難であることが知られており [6]、そこから NP 困難であることがいえる [7]。

3. トークン整列問題の NP 完全性の証明

本節では、以下の定理を証明する。

定理 1. トークン整列問題は NP 完全である。

トークン整列問題がクラス NP に属することは知られている [8]。以下では、トークン整列問題の NP 困難性を、3次元マッチング問題からの還元によって証明する。3次元マッチング問題のインスタンスを $((X, Y, Z), T)$ とする。ここで、 m, n を自然数、 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$, $T = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq X \times Y \times Z$ とし、 $i = 1, \dots, n$ について、 $t(i) = (x_{p(i)}, y_{q(i)}, z_{r(i)}) \in X \times Y \times Z$ であり、 p, q, r は $\{1, \dots, n\}$ から $\{1, \dots, m\}$ への写像である。 $n < m$ のとき T は明らかに解を持たないので、 $n \geq m$ とする。

3次元マッチング問題のインスタンス $((X, Y, Z), T)$ からトークン整列問題のインスタンス $((V, E), f_0, k)$ を以下で構築する。

$$\begin{aligned} V = & \{x_1, \dots, x_m\} \cup \{y_1, \dots, y_m\} \cup \{z_1, \dots, z_m\} \\ & \cup \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m\} \cup \{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m\} \cup \{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_m\} \\ & \cup \{x^t \mid t \in T\} \cup \{y^t \mid t \in T\} \cup \{z^t \mid t \in T\} \\ & \cup \{\hat{x}^t \mid t \in T\} \cup \{\hat{y}^t \mid t \in T\} \cup \{\hat{z}^t \mid t \in T\}, \end{aligned}$$

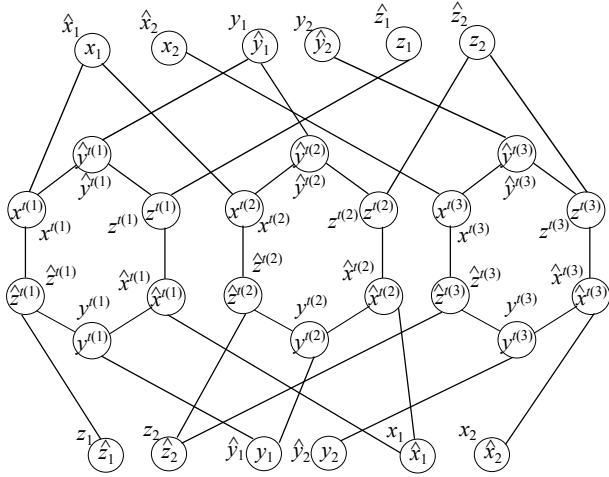


図 1 3次元マッチングのインスタンス $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$, $T = \{t(1) = (x_1, y_1, z_1), t(2) = (x_1, y_1, z_2), t(3) = (x_2, y_2, z_2)\}$ に対する (V, E) と f_0 の構築例。丸の中に書かれた記号が頂点、丸のそばの記号がトークンを表す。

$$E = \bigcup_{t \in T} \{ \{x^t, \hat{y}^t\}, \{\hat{y}^t, z^t\}, \{z^t, \hat{x}^t\}, \{\hat{x}^t, y^t\}, \{y^t, \hat{z}^t\}, \{\hat{z}^t, x^t\} \} \\ \cup \bigcup_{i=1}^n \{ \{x_{p(i)}, x^{t(i)}\}, \{y_{q(i)}, y^{t(i)}\}, \{z_{r(i)}, z^{t(i)}\}, \{\hat{x}_{p(i)}, \hat{x}^{t(i)}\}, \{\hat{y}_{q(i)}, \hat{y}^{t(i)}\}, \{\hat{z}_{r(i)}, \hat{z}^{t(i)}\} \}$$

また、トークン配置 f_0 を以下で定義する。各 $i = 1, \dots, m$ について、 $f_0(x_i) = \hat{x}_i$, $f_0(\hat{x}_i) = x_i$, $f_0(y_i) = \hat{y}_i$, $f_0(\hat{y}_i) = y_i$, $f_0(z_i) = \hat{z}_i$, $f_0(\hat{z}_i) = z_i$ と定義し、各 $t \in T$ について、 $f_0(x^t) = x^t$, $f_0(\hat{x}^t) = \hat{x}^t$, $f_0(y^t) = y^t$, $f_0(\hat{y}^t) = \hat{y}^t$, $f_0(z^t) = z^t$, $f_0(\hat{z}^t) = \hat{z}^t$ と定義する。 $k = 21m$ と定義する。 $|V| = 6m + 6n$, $|E| = 12n$ であるので、以上の構築は多項式時間でできる。

インスタンスの構築例を図 1 に示す。

以下の補題を証明する。

補題 2. T の 3次元マッチングが存在するならば、 (V, E) と f_0 について、長さ $21m$ の f_0 と f_T の間のトークン交換列が存在する。

証明. $21m$ 回のトークン交換手順を実際に示す。3DM のインスタンス T の解を $M = \{d(1), \dots, d(m)\} \subseteq T$ とする。ここで、 $i = 1, \dots, m$ について、 $d(i) = (x_{p'(i)}, y_{q'(i)}, z_{r'(i)}) \in X \times Y \times Z$ であり、 p', q', r' はそれぞれ $\{1, \dots, m\}$ から $\{1, \dots, m\}$ への 1対1写像である。以下の手順を、各 $i = 1, \dots, m$ について行う。最初に、辺 $\{x_{p'(i)}, x^{d(i)}\}$, $\{y_{q'(i)}, y^{d(i)}\}$, $\{z_{r'(i)}, z^{d(i)}\}$, $\{\hat{x}_{p'(i)}, \hat{x}^{d(i)}\}$, $\{\hat{y}_{q'(i)}, \hat{y}^{d(i)}\}$, $\{\hat{z}_{r'(i)}, \hat{z}^{d(i)}\}$ 上で交換を行い。次に、辺 $\{x^{d(i)}, \hat{y}^{d(i)}\}$, $\{z^{d(i)}, \hat{x}^{d(i)}\}$, $\{y^{d(i)}, \hat{z}^{d(i)}\}$ 上で交換を行い、 $\{\hat{y}^{d(i)}, z^{d(i)}\}$, $\{\hat{x}^{d(i)}, y^{d(i)}\}$, $\{\hat{z}^{d(i)}, x^{d(i)}\}$ 上で交換を行い、再び $\{x^{d(i)}, \hat{y}^{d(i)}\}$, $\{z^{d(i)}, \hat{x}^{d(i)}\}$, $\{y^{d(i)}, \hat{z}^{d(i)}\}$ 上で交換を

行う。最後に、最初と同じく $\{x_{p'(i)}, x^{d(i)}\}$, $\{y_{q'(i)}, y^{d(i)}\}$, $\{z_{r'(i)}, z^{d(i)}\}$, $\{\hat{x}_{p'(i)}, \hat{x}^{d(i)}\}$, $\{\hat{y}_{q'(i)}, \hat{y}^{d(i)}\}$, $\{\hat{z}_{r'(i)}, \hat{z}^{d(i)}\}$ 上で交換を行う。交換回数は $(6 + 3 + 3 + 3 + 6) \times m = 21m$ である。最後に、この交換によって正しく目標トークン配置になることを確認する。トークン $x_{p'(1)}, \dots, x_{p'(m)}$ はすべて異なることに注意する。トークン $x_{p'(i)}$ は、頂点 $\hat{x}_{p'(i)}$ から頂点 $\hat{x}^{d(i)}$, $z^{d(i)}$, $\hat{y}^{d(i)}$, $x^{d(i)}$ を通り、 $x_{p'(i)}$ に到達する。トークン $\hat{x}_{p'(i)}$, $y_{q'(i)}$, $\hat{y}_{q'(i)}$, $z_{r'(i)}$, $\hat{z}_{r'(i)}$ も同様に確認できる。トークン $x^{d(i)}$ は頂点 $x_{p'(i)}$ に動いた後、頂点 $x^{d(i)}$ に戻る。トークン $\hat{x}^{d(i)}$, $y^{d(i)}$, $\hat{y}^{d(i)}$, $z^{d(i)}$, $\hat{z}^{d(i)}$ も同様に確認できる。各 $t \in T \setminus M$ について、トークン $x^t, \hat{x}^t, y^t, \hat{y}^t, z^t, \hat{z}^t$ は動かないことが確認できる。 □

補題 2 の逆の証明の前に、以下の補題を証明する。

補題 3. (V, E) と f_0 について、長さ $21m$ 未満の f_0 と f_T の間のトークン交換列は存在しない。

証明. f_0 と f_T の間のトークン交換列 S を 1つ固定し、 S において各トークンが動いた回数の合計を数える。 $i = 1, \dots, m$ について、以下の議論を行う。頂点 \hat{x}_i から頂点 x_i への (V, E) 上での最短経路の長さは 5 なので、トークン x_i は S において少なくとも 5 回動く。トークン $\hat{x}_i, y_i, \hat{y}_i, z_i, \hat{z}_i$ も同様に少なくとも 5 回動く。また、 S においてトークン x_i が初めて動くときの移動先頂点を $x^{t(s(i))}$ とする。ここで、 s は単射写像 $s: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ である。頂点 $x^{t(s(i))}$ にあったトークン $x^{t(s(i))}$ は元の位置に戻る必要があるので、トークン $x^{t(s(i))}$ は少なくとも 2 回動く。トークン $\hat{x}^{t(\cdot)}, y^{t(\cdot)}, \hat{y}^{t(\cdot)}, z^{t(\cdot)}, \hat{z}^{t(\cdot)}$ についても同様の議論を行う。 $x^{t(s(1))}, \dots, x^{t(s(m))}$ がすべて異なることに気を付けると、各トークンの動く回数の合計は $(5 \times 6 + 2 \times 6) \times m = 42m$ である。1回の交換で全トークンの動く回数はちょうど 2 回なので、トークンの交換は少なくとも $21m$ 回必要である。 □

補題 2 の逆を証明する。

補題 4. (V, E) と f_0 について、長さ $21m$ の f_0 と f_T の間のトークン交換列が存在するならば、 T の 3次元マッチングが存在する。

証明. 長さ $21m$ の f_0 と f_T の間のトークン交換列 S を 1つ固定する。 S において、補題 3 の議論から以下の事実が言える。

- (i) 各 $i = 1, \dots, m$ について $x_i, \hat{x}_i, y_i, \hat{y}_i, z_i, \hat{z}_i$ はそれぞれちょうど 5 回動く。
- (ii) $\{x^{t(1)}, \dots, x^{t(n)}\}$ の中に、ちょうど 2 回動くトークンがちょうど m 個存在する。 $\{\hat{x}^{t(1)}, \dots, \hat{x}^{t(n)}\}$, $\{y^{t(1)}, \dots, y^{t(n)}\}$, $\{\hat{y}^{t(1)}, \dots, \hat{y}^{t(n)}\}$, $\{z^{t(1)}, \dots, z^{t(n)}\}$, $\{\hat{z}^{t(1)}, \dots, \hat{z}^{t(n)}\}$ についても同様である。

$x^{t(1)}, \dots, x^{t(n)}$ のうち、 S において少なくとも 1 回動く

トークンを (事実 (ii) からちょうど m 個存在するので) $x^{t(u(1))}, \dots, x^{t(u(m))}$ とする. ここで, u は単射写像 $u: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ である.

以下では, 各 $t \in T$ について, もし S において, トークン x^t が少なくとも 1 回動くなら, S において, トークン $\hat{x}^t, y^t, \hat{y}^t, z^t, \hat{z}^t$ も少なくとも 1 回動くことを証明する. 各 $i = 1, \dots, m$ について, トークン \hat{x}_i が頂点 x_i から頂点 \hat{x}_i に移動する際の経路を考え, それを P_i とする. 事実 (i) とグラフ (V, E) の形から, P_1, \dots, P_m はいずれも交わらない. さらに各 $i = 1, \dots, m$ について, P_i は必ずある $t' \in T$ に対して頂点 $x^{t'}$ を含む. 頂点 $x^{t'}$ 上にあるトークン $x^{t'}$ は (トークン \hat{x}_i が頂点 x_i から頂点 \hat{x}_i に移動する際に) 必ず動く. 動くトークンの集合 $\{x^{t(u(1))}, \dots, x^{t(u(m))}\}$ と, 経路集合 $\{P_1, \dots, P_m\}$ は 1 対 1 に対応する. 特に, トークン x^t は動くという仮定から, ある $j \in \{1, \dots, m\}$ が存在し, P_j は頂点 x^t を含む. したがって, P_j は頂点 \hat{x}^t も含むので, 頂点 \hat{x}^t 上にあるトークン \hat{x}^t は (トークン x_j が頂点 \hat{x}_j から頂点 x_j に移動する際に) 必ず動く. P_j は頂点 y^t, \hat{z}^t の両方か, または, 頂点 \hat{y}^t, z^t の両方を含む. 前者として一般性を失わない. (トークン配置 f_0 において頂点 y^t, \hat{z}^t 上にある) トークン y^t, \hat{z}^t はそれぞれ動くので, 同様の議論でトークン \hat{y}^t, z^t もそれぞれ動く. 以上より, 各 $t \in T$ について, もしトークン x^t が動くなら, トークン $\hat{x}^t, y^t, \hat{y}^t, z^t, \hat{z}^t$ も動くことが証明された.

m 個の 3 つ組からなる集合 $M' = \{(x_{p(u(1))}, y_{q(u(1))}, z_{r(u(1))}), \dots, (x_{p(u(m))}, y_{q(u(m))}, z_{r(u(m))})\} \subseteq T$ は T の 3 次元マッチングとなることを以下で示す. 動くトークンの集合 $\{x^{t(u(1))}, \dots, x^{t(u(m))}\}$ は経路集合 $\{P_1, \dots, P_m\}$ と 1 対 1 に対応し, したがって (P_i は x_i を含み, $j \neq i$ となる x_j を含まないことに注意すると), トークン集合 $\{x_1, \dots, x_m\}$ と 1 対 1 対応が存在する. したがって, $x_{p(u(1))}, \dots, x_{p(u(m))}$ は互いにすべて異なるトークンである. 上で示したことから, $x^{t(u(1))}, \dots, x^{t(u(m))}$ が動くならば, $y^{t(u(1))}, \dots, y^{t(u(m))}$ と $z^{t(u(1))}, \dots, z^{t(u(m))}$ はそれぞれ動くので, 同様にして, $y_{q(u(1))}, \dots, y_{q(u(m))}$ と $z_{r(u(1))}, \dots, z_{r(u(m))}$ はそれぞれ互いにすべて異なるトークンである. 以上より, M' は T の 3 次元マッチングとなることが示された. \square

補題 2 と 4 から, 3DM のインスタンス $((X, Y, Z), T)$ の答えと, トークン整列問題のインスタンス $((V, E), f_0, 21m)$ の答えは常に一致することがいえる. したがって定理 1 は証明された.

グラフ (V, E) は 2 部グラフである. インスタンス $((X, Y, Z), T)$ において, T の最大次数が 3 以下に制限されているとき, グラフ (V, E) の最大次数は高々 3 である. したがって, 以下の定理が成り立つ.

定理 5. 入力グラフが 2 部グラフで, かつ最大次数が高々 3 に制限されたトークン整列問題は NP 完全である.

4. 刺又グラフに対する多項式時間アルゴリズム

n を自然数とし,

$$V_n = \{-2, -1, 0, \dots, n\},$$

$$E_n = \{\{-1, 0\}, \{-2, 0\}\} \cup \{\{k, k+1\} \mid 0 \leq k < n\}$$

とする. このとき, グラフ $G_n = (V_n, E_n)$ を刺又グラフと呼ぶ. 本節では, 刺又グラフに対して多項式時間アルゴリズムを与える.

トークン配置 f に対する評価関数 Φ を以下で定める.

$$\Phi(f) = \begin{cases} \text{Inv}(f) & \text{if } f(-1) = -1 \text{ または} \\ & f(-2) = -2, \\ \text{Inv}(f) + 1 & \text{if } (f(-1) = -2 \text{ かつ} \\ & f(-2) \neq -1) \text{ または} \\ & (f(-1) \neq -2 \text{ かつ} \\ & f(-2) = -1), \\ \text{Inv}(f) + 3 & \text{if } f(-1) = -2 \text{ かつ} \\ & f(-2) = -1, \\ \text{Inv}(f) - \psi(f) & \text{if } \{f(-1), f(-2)\} \cap \{-1, -2\} \\ & -\pi(f) = \emptyset. \end{cases}$$

ここで, $\text{Inv}(f) = |\text{INV}(f)|$ で

$$\text{INV}(f) = \{(i, j) \mid i < j \text{ かつ } f(j) < f(i)\} \setminus \{(-2, -1)\}$$

である. また, $\psi(f)$ は, 頂点 $-1, -2$ に置かれているトークンのうち値の小さな方から頂点 $0, 1, 2, \dots, n$ 上のトークンを並べた系列について, 0 以上の数の最左優先単調減少列をとったときの長さである. より形式的には, 関数 σ を, 整数の列 $w = j_1 \dots j_k$ に対して

$$\sigma(i; w) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 0 \text{ または } j_1 < 0, \\ \sigma(i; j_2 \dots j_k) & \text{if } j_1 > i, \\ 1 + \sigma(j_1; j_2 \dots j_k) & \text{if } 0 \leq j_1 < i, \end{cases}$$

で定め, $\psi(f)$ を

$$\psi(f) = \sigma(\min\{f(-1), f(-2)\}; f(0) \dots f(n))$$

とする. さらに

$$\pi(f) = \begin{cases} 1 & \text{命題 } (P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge Q) \text{ が成り立つ} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. ここで P は, $\psi(f)$ が偶数であるという命題, Q は $f(-1) < f(-2) \iff f^{-1}(-1) < f^{-1}(-2)$ が成り立つという命題である. 任意のトークン配置 f について, $\Phi(f) \geq 0$ が成り立つ. また, $\Phi(f) = 0 \iff f = f_T$ が成

り立つ。

刺又グラフ G_n に対してトークン交換列を生成するアルゴリズムを Algorithm 1 に与える。

Algorithm 1 刺又グラフに対するアルゴリズム

入力: $V_n = \{-2, -1, 0, \dots, n\}$ と初期トークン配置 f_0
 f を現在のトークン配置とする (すなわち, トークンが交換されると f は更新される). f の初期値は f_0 とする.
for $k = n, n-1, \dots, 1, 0$ **do**
 while $f(0) < 0$ かつ $f^{-1}(k) < 0$ **do**
 u を頂点 $f(0)$ 上にあるトークンとする.
 トークン $f(0)$ と u を交換する.
 end while
 while $f^{-1}(k) < k$ **do** // トークン k を頂点 k に動かす.
 if $f^{-1}(k) = -2$ **then**
 トークン k と $f(0)$ を交換する.
 else
 トークン k と $f(f^{-1}(k) + 1)$ を交換する.
 end if
 end while
end for
if $f(-1) = -2$ かつ $f(-2) = -1$ **then**
 トークン -1 と 0 を交換し, トークン -2 と -1 を交換し,
 トークン -2 と 0 を交換する.
end if

以下の補題が成り立つ。

補題 6. 任意のトークン配置 f について, Algorithm 1 の生成するトークン交換列を S とすると, $\text{len}(S) = \Phi(f)$ が成り立つ。

証明. Algorithm 1 でトークンの交換が1度行われるたびに Φ がちょうど1減少することを示す. いまここで, k を0以上の自然数とし, k より大きな全てのトークンが目的頂点に移動済であるとする. 最初に, for ループでの挙動を検証する.

(Case 1) トークン k が負の頂点にいる場合. 一般性を失わずに $f(-1) = k$ と仮定する. トークン k より大きなトークンは移動済であるので $f(-2) < k$ である. トークン交換後の状態を f' とする.

(Case 1.1) $k > f(-2) > f(0) \geq 0$ のとき. トークン k と $f(0)$ が交換される. $\text{INV}(f') = \text{INV}(f) \setminus \{(-1, 0), (-2, 0)\}$ なので $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) - 2$ である. また,

$$\begin{aligned}\psi(f') &= \sigma(f(0); kf(1) \dots f(n)) = \sigma(f(0); f(1) \dots f(n)) \\ \psi(f) &= \sigma(f(-2); f(0)f(1) \dots f(n)) \\ &= 1 + \sigma(f(0); f(1) \dots f(n))\end{aligned}$$

したがって $\psi(f') = \psi(f) - 1$ である. ψ の偶奇が反転するとともに $f(-1), f(-2)$ の大小も反転するから, $\pi(f) = \pi(f')$ である. よって $\Phi(f') = \Phi(f) - 1$ である.

(Case 1.2) $k > f(0) > f(-2) \geq 0$ のとき. トークン k と $f(0)$ が交換される. $\text{INV}(f') = \text{INV}(f) \setminus \{(-1, 0)\}$ で $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) - 1$ である. また,

$$\begin{aligned}\psi(f') &= \sigma(f(-2); kf(1) \dots f(n)) = \sigma(f(-2); f(1) \dots f(n)) \\ \psi(f) &= \sigma(f(-2); f(0)f(1) \dots f(n)) \\ &= \sigma(f(-2); f(1) \dots f(n))\end{aligned}$$

であるので $\psi(f') = \psi(f)$ である. ψ の偶奇も $f(-1), f(-2)$ の大小も反転しないから, $\pi(f') = \pi(f)$ である. よって $\Phi(f') = \Phi(f) - 1$ である.

(Case 1.3) $k > f(-2) > f(0) = -1$ のとき. $f(0) < 0$ より $\psi(f) = 0$ であり, また $f(-1) = k > f(-2)$ と $f^{-1}(-1) = 0 < f^{-1}(-2)$ より $\pi(f) = 1$. したがって

$$\Phi(f) = \text{Inv}(f) - 1.$$

トークン k と $f(0)$ が交換される. $k > f(-2) > f(0)$ より $\text{INV}(f') = \text{INV}(f) \setminus \{(-2, 0), (-1, 0)\}$ である. 定義により $\Phi(f') = \text{Inv}(f')$ であるから,

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) - 2 = \Phi(f) - 1$$

が得られる.

(Case 1.4) $f(0) = -1$ かつ $f(-2) = -2$ のとき. トークン k と $f(0)$ が交換されて $\text{INV}(f') = \text{INV}(f) \setminus \{(-1, 0)\}$.

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) - 1 = \Phi(f) - 1.$$

(Case 1.5) $f(0) = -2$ かつ $f(-2) \geq 0$ のとき. $f(0) < 0$ より $\psi(f) = 0$ であり, また $f(-1) = k > f(-2)$ と $f^{-1}(-1) > f^{-1}(-2) = 0$ より $\pi(f) = 0$. すなわち $\Phi(f) = \text{Inv}(f)$. トークン $f(-2)$ と $f(0) = -2$ が交換されると, Inv が1減少する.

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) - 1 = \Phi(f) - 1.$$

(Case 1.6) $f(0) = -2$ かつ $f(-2) = -1$ のとき. 定義より $\Phi(f) = \text{Inv}(f) + 1$ である. トークン $f(0) = -2$ と $f(-2) = -1$ が交換されても, Inv は変化しない. $\Phi(f')$ の定義より

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) = \Phi(f) - 1.$$

(Case 2) トークン k が0以上の頂点にいる場合. トークン k が存在する頂点から頂点 k までの頂点上には値が k 以下のトークンしか存在しないので, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) - 1$ が成り立つ. $f(-1) = f'(-1)$ かつ $f(-2) = f'(-2)$ であるので, $\{f(-1), f(-2)\} \cap \{-1, -2\} \neq \emptyset$ ならば, ただちに $\Phi(f') = \Phi(f) - 1$ がいえる. $\{f(-1), f(-2)\} \cap \{-1, -2\} = \emptyset$ のときの ψ と π について, 一般に, $j_h > i$ のとき, $\sigma(i; j_1 \dots j_{h-1} j_h j_{h+1} \dots j_\ell) = \sigma(i; j_1 \dots j_{h-1} j_{h+1} j_h \dots j_\ell)$ であるので, $\psi(f') = \psi(f)$ がいえる. また, π の値に影響を与えない操作は行われていない. ゆえに $\Phi(f') = \Phi(f) - 1$ が成り立つ.

次に for ループを抜けたときのことを考える. このと

き, 全ての $k \geq 0$ について $f(k) = k$ が成り立ち, かつ $\text{Inv}(f) = 0$ である. もし $f(-1) = -1$ かつ $f(-2) = -2$ なら, $\Phi(f) = 0$ である. もし $f(-1) = -2$ かつ $f(-2) = -1$ なら, ここから次のような手順で Φ が 1 ずつ減っていくことが確認できる.

$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	INV	Φ
-1	-2	0	0	3
0	-2	-1	1	2
0	-1	-2	1	1
-2	-1	0	0	0

以上よりすべての場合について $\Phi(f') = \Phi(f) - 1$ がいえた. \square

補題 7. 任意のトークン配置 f, f' について, f と f' が隣接しているなら, $|\Phi(f) - \Phi(f')| = 1$ である.

証明. 0 以上の頂点に配置された 2 つのトークンの交換が行われる場合と, 少なくとも一方が負の頂点に配置されたトークンの交換が行われる場合の 2 通りを考える.

(Case 1) 0 以上のある自然数 k について, $f(k) = f'(k+1)$ かつ $f(k+1) = f'(k)$ が成り立つ場合. 以下, 一般性を失わずに $f(k) < f(k+1)$ と仮定する.

(Case 1.1) $\{f(k), f(k+1)\} = \{-1, -2\}$. このとき, Inv, ψ は変化しないが π が 1 だけ変化することが容易にわかる.

(Case 1.2) $f(k) < 0 \leq f(k+1)$. このとき, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 1$ である. 一般性を失わずに $f(k) = -1$ と仮定する. もし $f^{-1}(-2) \in \{-1, -2\}$ ならば, $\Phi(f') = \Phi(f) + 1$ であるので題意が成り立つ. そこで $f^{-1}(-2) \notin \{-1, -2\}$ を仮定する. $f^{-1}(-2) < k$ ならば $\psi(f) = \psi(f')$ であり, π も変化しない. よって, $\Phi(f') = \Phi(f) + 1$ である. $f^{-1}(-2) > k+1$ ならば, $\psi(f) \leq \psi(f') \leq \psi(f) + 1$ である. $\psi(f') = \psi(f)$ ならば π も変化しない. このとき $\Phi(f') = \Phi(f) + 1$ である. $\psi(f') = \psi(f) + 1$ ならば π が 1 だけ増加もしくは減少して, このとき $\Phi(f') = \Phi(f) + 1 - 1 \pm 1 = \Phi(f) \pm 1$ である.

(Case 1.3) $0 \leq f(k) < f(k+1)$. このとき, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 1$ である. もし $\{f(-1), f(-2)\} \cap \{-1, -2\} \neq \emptyset$ ならば, $\Phi(f') = \Phi(f) + 1$ であるので題意が成り立つ. そうでないとき, $\psi(f) \leq \psi(f') \leq \psi(f) + 1$ である. $\psi(f') = \psi(f)$ ならば π も変化しない. このとき $\Phi(f') = \Phi(f) + 1$ である. $\psi(f') = \psi(f) + 1$ ならば π が 1 だけ増加もしくは減少して, このとき $\Phi(f') = \Phi(f) + 1 - 1 \pm 1 = \Phi(f) \pm 1$ である.

(Case 2) $f(-1) = f'(0)$ かつ $f(0) = f'(-1)$ の場合 ($f(-2) = f'(0)$ かつ $f(0) = f'(-2)$ の場合も同様である).

(Case 2.1) $f(-1) = -1$ のとき, $\Phi(f) = \text{Inv}(f)$ である.

(Case 2.1.1) $f(0) = -2$ ならば,

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') + 1 = \text{Inv}(f) + 1 = \Phi(f) + 1.$$

(Case 2.1.2) $f(-2) = -2 < f(0)$ ならば,

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 1 = \Phi(f) + 1.$$

(Case 2.1.3) $0 \leq f(-2) < f(0)$ ならば, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 2$ であり, $\psi(f') = 0, \pi(f') = 1$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') - \psi(f') - \pi(f') = \text{Inv}(f) + 2 - 1 = \Phi(f) + 1.$$

(Case 2.1.4) $0 \leq f(0) < f(-2)$ ならば, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 1$ であり, $\psi(f') = 0, \pi(f') = 0$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') - \psi(f') - \pi(f') = \text{Inv}(f) + 1 = \Phi(f) + 1.$$

(Case 2.2) $f(-1) = -2$ のとき.

(Case 2.2.1) $f(0) = -1$ の場合は (Case 2.1.1) の逆操作である.

(Case 2.2.2) $f(-2) = -1 < f(0)$ ならば, $\Phi(f) = \text{Inv}(f) + 3$ であり, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 1$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') + 1 = \text{Inv}(f) + 1 + 1 = \Phi(f) - 1.$$

(Case 2.2.3) $0 \leq f(-2) < f(0)$ ならば, $\Phi(f) = \text{Inv}(f) + 1$ であり, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 2$ であり, $\psi(f') = 0, \pi(f') = 0$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') - \psi(f') - \pi(f') = \text{Inv}(f) + 2 = \Phi(f) + 1.$$

(Case 2.2.4) $0 \leq f(0) < f(-2)$ ならば, $\Phi(f) = \text{Inv}(f) + 1$ であり, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) + 1$ であり, $\psi(f') = 0, \pi(f') = 1$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') - \psi(f') - \pi(f') = \text{Inv}(f) + 1 - 1 = \Phi(f) - 1.$$

(Case 2.3) $f(-1) \geq 0$ のとき.

(Case 2.3.1) $f(0) = -1$ かつ $f(-2) = -2$ の場合は (Case 2.1.2) の逆操作である.

(Case 2.3.2) $f(0) \geq 0$ かつ $f(-2) = -2$ ならば, $\Phi(f) = \text{Inv}(f)$ であり, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) \pm 1$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) \pm 1 = \Phi(f) \pm 1.$$

(Case 2.3.3) $f(0) = -2$ かつ $f(-2) = -1$ の場合は (Case 2.2.2) の逆操作である.

(Case 2.3.4) $f(-2) = -1 < f(0)$ ならば, $\Phi(f) = \text{Inv}(f) + 1$ であり, $\text{Inv}(f') = \text{Inv}(f) \pm 1$ である. よって

$$\Phi(f') = \text{Inv}(f') + 1 = \text{Inv}(f) + 1 \pm 1 = \Phi(f) \pm 1.$$

(Case 2.3.5) $f(0) = -2$ かつ $f(-2) \geq 0$ の場合は (Case 2.2.3) または (Case 2.2.4) の逆操作である.

(Case 2.3.6) $f(0) = -1$ かつ $f(-2) \geq 0$ の場合は (Case 2.1.3) または (Case 2.1.4) の逆操作である.

(Case 2.3.7) $f(0) \geq 0$ かつ $f(-2) \geq 0$ のとき, $\Phi(f) =$

$\text{Inv}(f) - \psi(f) - \pi(f)$, $\Phi(f') = \text{Inv}(f') - \psi(f') - \pi(f')$ である。最初に $f(0) < f(-1) < f(-2)$ の場合を考える。トークン $f(0)$ と $f(-1)$ の交換によって Inv は 1 減る。 $\psi(f) = \sigma(f(-1); f(0)f(1)\dots f(n)) = 1 + \sigma(f(0); f(1)\dots f(n))$, $\psi(f') = \sigma(f'(-1); f'(0)f'(1)\dots f'(n)) = \sigma(f(0); f(-1)f(1)\dots f(n)) = \sigma(f(0); f(1)\dots f(n))$ であるので, ψ は 1 減る。 $f(-1) < f(-2) \iff f^{-1}(-1) < f^{-1}(-2)$ が真であることと $f'(-1) < f'(-2) \iff f'^{-1}(-1) < f'^{-1}(-2)$ が真であることは同値であり, $\psi(f)$ と $\psi(f')$ の偶奇は異なるため, $\pi(f) = 0$ のとき $\pi(f') = 1$ であり, $\pi(f) = 1$ のとき $\pi(f') = 0$ である。

$f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$ の大小関係がその他の場合も同様に計算できる。 $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$ の大小関係と $\Delta\text{Inv} = \text{Inv}(f') - \text{Inv}(f)$, $\Delta\psi = \psi(f') - \psi(f)$, $\Delta\pi = \pi(f') - \pi(f)$, $\Delta\Phi = \Phi(f') - \Phi(f)$ の値の関係を以下に示す。

大小関係	ΔInv	$\Delta\psi$	$\Delta\pi$	$\Delta\Phi$
$f(0) < f(-1) < f(-2)$	-1	-1	± 1	± 1
$f(0) < f(-2) < f(-1)$	-2	-1	0	-1
$f(-1) < f(0) < f(-2)$	1	1	± 1	± 1
$f(-1) < f(-2) < f(0)$	2	1	0	1
$f(-2) < f(0) < f(-1)$	-1	0	0	-1
$f(-2) < f(-1) < f(0)$	1	0	0	1

したがって, $\Phi(f') = \Phi(f) \pm 1$ である。

以上より, すべての場合で $\Phi(f') = \Phi(f) \pm 1$ がいえた。

□

補題 6 と 7 からただちに以下の補題が証明される。

補題 8. 任意のトークン配置 f について, $\text{OPT}(f) = \Phi(f)$ が成り立つ。

$\Phi(f)$ は多項式時間で計算できるので, 以下の定理が成り立つ。

定理 9. 入力グラフが刺又グラフに制限されたトークン整列問題に対して, 多項式時間アルゴリズムが存在する。

参考文献

- [1] A. Cayley, “Note on the theory of permutations,” *Philosophical Magazine*, vol. 34, no. 232, pp. 527-529, 1849.
- [2] T. M. Chan, M. Pătraşcu, “Counting Inversions, Offline Orthogonal Range Counting, and Related Problems,” *Proc. of the Twenty-first Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2010)*, pp. 161-173.
- [3] M. R. Garey, D. S. Johnson, “Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness” W. H. Freeman and Company, 1979.
- [4] L. S. Heath, J. P. C. Vergara, “Sorting by short swaps,” *Journal of Computational Biology*, vol. 10, pp. 775-789, 2003.
- [5] M. R. Jerrum, “The complexity of finding minimum-length generator sequence,” *Theoretical Computer Science*, vol. 36, pp. 265-289, 1985.
- [6] V. Kann, “Maximum bounded 3-dimensional matching is MAX SNP-complete,” *Information Processing Letters*,

vol. 37, no. 1, pp. 27-35, 1991.

- [7] C. H. Papadimitriou, M. Yannakakis, “Optimization, approximation, and complexity classes,” *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 43, no. 3, pp. 425-440, 1991.
- [8] K. Yamanaka, E. D. Demaine, T. Ito, J. Kawahara, M. Kiyomi, Y. Okamoto, T. Saitoh, A. Suzuki, K. Uchizawa, T. Uno, “Swapping labeled tokens on graphs,” *Theoretical Computer Science*, vol. 586, pp. 81-94, 2015.
- [9] K. Yamanaka, T. Horiyama, D. Kirkpatrick, Y. Otachi, T. Saitoh, R. Uehara, Y. Uno, “Swapping Colored Tokens on Graphs,” *Proc. of the 14th Workshop on Algorithms and Data Structure (WADS 2015)*, LNCS, vol.9214, pp. 619-628, 2015.