

7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法の最適化について†

田中正次^{††} 高山尚文^{†††} 山下茂^{††}

7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法については、1960 年代に Butcher, Lawson, Luther らがいくつかの公式を提案し、その後 Sarafyan も別の公式を発表している。しかし、公式の誘導それ自体がかなり困難なので、提案された公式は打ち切り誤差、安定性などの観点から十分最適化されているとはいえない。この研究においてわれわれは、Butcher のアイデアを参考にしながら著者たちが導いた、4 自由度をもつ 6 次の次数条件式群の解を利用する。また、公式の打ち切り誤差や安定性、丸め誤差などに関する特性を評価するための合理的な基準を導入する。ついで、打ち切り誤差、安定性、丸め誤差などが、これらの基準に照らして好ましい特性をもつように、解系に含まれる 4 個の自由パラメータを特殊化して公式を得た。その結果、これまで知られている公式よりその特性が著しくすぐれている公式が得られたので報告する。

1. はじめに

7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法については、1960 年代に Butcher¹⁾, Lawson²⁾, Luther³⁾ らがいくつかの公式を提案し、その後 Sarafyan⁴⁾ も別の公式を発表している。しかし、公式の誘導それ自体がかなり困難なので、提案された公式は打ち切り誤差、安定性などの観点から十分最適化されているとはいえない。この研究においてわれわれは、Butcher のアイデアを参考にしながら著者たちが導いた、4 自由度をもつ 6 次の次数条件式群の解を利用する。また、公式の打ち切り誤差や安定性、丸め誤差などに関する特性を評価するための合理的な基準を導入する。ついで、打ち切り誤差、安定性、丸め誤差などが、これらの基準に照らして好ましい特性をもつように、解系に含まれる 4 個の自由パラメータを特殊化して公式を得た。その結果、これまで知られている公式よりその特性が著しくすぐれている公式が得られたので報告する。

以下 2 章において 7 段階 6 次陽的 Runge-Kutta 法 (以下 7 段数 6 次法と略称する) について述べ、3 章において同法の打ち切り誤差とその大小の判定法について説明する。また 4 章において同法の安定性とその優劣の判定法および丸め誤差の粗い判定基準について述べる。5 章において、まずこれらの評価基準に照ら

して既知公式を評価し、ついで Butcher や Lawson の公式を打ち切り精度の面で改良する。また他の評価の観点にも注意しながら、打ち切り精度最良に近い公式、Lawson とは別の意味で安定な公式を提案する。6 章において、公式誘導の考え方と導出の過程に誤りがないことを立証するために数値例が示され、結果について考察が述べられる。また引用した Butcher, Lawson, Luther および Shanks による公式が付録に掲げられる。

2. 7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法

常微分方程式の初期値問題を

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

とする。ここで y, f はそれぞれ m 次元関数ベクトル、 y_0 は m 次元ベクトルである。また f は十分滑らかとしよう。

そのとき、 $x = x_n$ における解 y_n が与えられたとき $x = x_{n+1}$ における近似解 y_{n+1} を求める次の方法を、7 段数陽的 Runge-Kutta 法という。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= h_n f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h_n f(x_n + c_2 h_n, y_n + b_{21} k_1) \\ k_3 &= h_n f(x_n + c_3 h_n, y_n + b_{31} k_1 + b_{32} k_2) \\ k_4 &= h_n f(x_n + c_4 h_n, y_n + b_{41} k_1 + b_{42} k_2 \\ &\quad + b_{43} k_3) \\ k_5 &= h_n f(x_n + c_5 h_n, y_n + b_{51} k_1 + b_{52} k_2 \\ &\quad + b_{53} k_3 + b_{54} k_4) \\ k_6 &= h_n f(x_n + c_6 h_n, y_n + b_{61} k_1 + b_{62} k_2 \\ &\quad + b_{63} k_3 + b_{64} k_4 + b_{65} k_5) \\ k_7 &= h_n f(x_n + c_7 h_n, y_n + b_{71} k_1 + b_{72} k_2 \\ &\quad + b_{73} k_3 + b_{74} k_4 + b_{75} k_5 + b_{76} k_6) \\ y_{n+1} &= y_n + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4 \\ &\quad + a_5 k_5 + a_6 k_6 + a_7 k_7 \end{aligned} \right\} \tag{2.2}$$

† On the Optimization of Some Seven-Stage Sixth-Order Explicit Runge-Kutta Method by MASATSUGU TANAKA (Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University), NAOBUMI TAKAYAMA (Ogino Ltd.) and SHIGERU YAMASHITA (Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University).

†† 山梨大学工学部電子情報工学科
††† オギノ (株)

ここで a_i, b_{ij}, c_i は公式を特徴づける係数で, $h_n = x_{n+1} - x_n$ である.

(2.1)の理論解を $y(x)$ とすると, $y(x_n + h_n)$ の $x = x_n$ におけるテイラー展開が, $y_n = y(x_n)$ のときの (2.2)の y_{n+1} の右辺の $x = x_n$ におけるテイラー展開と, 与えられた微分方程式に関係なく h_n^6 の項まで正確に一致するとき, 公式(2.2)は6次法であるといわれる. ここでは公式(2.2)が6次法になるように係数パラメータ c_i, b_{ij}, a_i が選ばれた場合, すなわち7段数6次陽的 Runge-Kutta 法について考察する.

7段数6次法にはいくつかの既知公式があるが, それについては5章および付録に譲る. また, 7段数6次法(2.2)の表示は, 簡単のために慣用的に用いられる次の係数マトリックスによることにしよう.

c_2	b_{21}
c_3	$b_{31} \ b_{32}$
\vdots	$\dots\dots\dots$
c_7	$b_{71} \ b_{72} \ \dots\dots\dots \ b_{76}$
	$a_1 \ a_2 \ \dots\dots\dots \ a_6 \ a_7$

3. 打ち切り誤差とその大小の判定

文献 8) に示すように, われわれは7段数6次 Runge-Kutta 法の次数条件式群の c_2, c_3, c_6 および c_6 を自由パラメータとする一解系を得ているが, この解系に含まれる公式に対してその $x = x_{n+1}$ における局所打ち切り誤差 T_{n+1} は, 次のように表すことができる.

$$T_{n+1} = h_n^{48} \sum_{i=1}^{48} a_{6i} g_i(x_n, y_n) + O(h_n^5) \tag{3.1}$$

ここで a_{6i} は公式の係数のみの関数, $g_i(x, y)$ は微分方程式(2.1)の右辺の関数系 f に依存して定まる関数ベクトルで, この両者は根付き木 (rooted tree) の使用により導くことができる⁹⁾.

h_n が十分小さければ, T_{n+1} は(3.1)の第1項, すなわち打ち切り誤差の主項によって近似することができる. すなわち

$$T_{n+1} \approx \sum_{i=1}^{48} a_{6i} g_i(x_n, y_n) \tag{3.2}$$

ここで a_{6i} は以下のように定義される.

$$a_{61} = (\sum_i a_i c_i^4 - 1/7)/720$$

$$a_{62} = (\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^4 - 1/14)/24$$

$$a_{63} = (\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^2 c_i^2 - 1/21)/12$$

$$a_{64} = (\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^3 c_i^2 - 1/28)/12$$

$$a_{65} = (\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^4 c_i - 1/35)/24$$

$$a_{66} = (\sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j^5 - 1/42)/120 \tag{3.3}$$

$$a_{67} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 c_j c_i - 1/105)/2$$

$$a_{68} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^4 - 1/210)/24$$

$$a_{69} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 c_i^2 - 1/840)/6$$

$$a_{610} = (\sum_{i,j,k,l,m} a_j b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m^2 - 1/2520)/2$$

$$a_{611} = (\sum_{i,j,k,l,m,n} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} c_n - 1/5040)$$

$$a_{612} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_j^2 b_{ik} c_k^2 - 1/63)/8$$

$$a_{613} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_j b_{ik} c_k^2 - 1/28)/4$$

$$a_{614} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_j^2 b_{jk} c_k c_i - 1/70)/2$$

$$a_{615} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} c_j^2 b_{ik} c_k - 1/56)/6$$

$$a_{616} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} c_j b_{ik} b_{kl} c_l c_i - 1/56)/6$$

$$a_{617} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{jl} c_l c_i - 1/140)/2$$

$$a_{618} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l c_i c_j - 1/112)$$

$$a_{619} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^3 - 1/42)/6$$

$$a_{620} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 - 1/84)/6$$

$$a_{621} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k c_i^2 - 1/56)/2$$

$$a_{622} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 c_i - 1/70)/2$$

$$a_{623} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 - 1/84)/4$$

$$a_{624} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 c_j^2 - 1/126)/4$$

$$a_{625} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^3 c_i - 1/140)/6$$

$$a_{626} = (\sum_{i,j,k} a_i b_{ij} b_{jk} c_k^2 c_j - 1/168)/6$$

$$a_{627} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 c_i^2 - 1/168)/2$$

$$a_{628} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 - 1/252)/2$$

$$a_{629} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 - 1/420)/2$$

$$a_{630} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l c_j c_i - 1/210)$$

$$a_{631} = (\sum_{i,j,k,l} a_j b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l c_k c_j - 1/280)$$

$$a_{632} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l c_k c_j - 1/336)$$

$$a_{633} = (\sum_{i,j,k,l} a_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2 c_i - 1/420)/2$$

$$a_{634} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_k b_l c_i^2 c_j - 1/504 \right) / 2$$

$$a_{635} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_j b_i b_j b_k b_l c_i^2 c_k - 1/630 \right) / 2$$

$$a_{636} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_i - 1/840 \right)$$

$$a_{637} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_j - 1/1008 \right)$$

$$a_{638} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_k - 1/1260 \right)$$

$$a_{639} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_l - 1/1680 \right)$$

$$a_{640} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_l - 1/840 \right) / 2$$

$$a_{641} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_m - 1/504 \right)$$

$$a_{642} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_m - 1/336 \right)$$

$$a_{643} = \left(\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_j b_k b_l b_m c_m c_m - 1/252 \right) / 2$$

$$a_{644} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_k b_l c_i b_j c_i c_j - 1/168 \right) / 2$$

$$a_{645} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_k b_l c_i c_i c_i c_l - 1/84 \right)$$

$$a_{646} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_k b_l c_i c_i^2 - 1/252 \right) / 2$$

$$a_{647} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_k b_l c_i^2 c_l - 1/168 \right) / 2$$

$$a_{648} = \left(\sum_{i,j,k,l} a_i b_j b_k b_l c_i c_l^2 - 1/126 \right) / 2$$

ここで $i \leq j$ ならば $b_{ij} = 0$ とする。また $c_1 = 0$ であることに注意しよう。

われわれは、与えられた微分方程式に独立な、局所打ち切り誤差の大小を判定するための尺度として、次式によって定義される数量 A_{62} および A_{63} を使用する。

$$A_{62} = \sum_{i=1}^{48} |a_{6i}| \tag{3.4}$$

$$A_{63} = \sum_{i=1}^{48} a_{6i}^2 \tag{3.5}$$

[定義 1]

A_{62} および A_{63} を 7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の打ち切り精度判定基準という。

上記の打ち切り精度判定基準の有効性については多くの実績がある^{6),7)}。

4. 安定性とその優劣の判定および丸め誤差特性の評価

7 段数 6 次法 (2.2) を、テスト方程式

$$y' = \lambda y \quad (\text{ここで } \lambda \text{ は } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \text{ であるような複素定数である}) \tag{4.1}$$

に適用し、次数条件式を用いて整理すると、

$$y_{n+1} = P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7) y_n \tag{4.2}$$

が得られる。ただし、 $P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7)$ は次式によって定義される $h_n \lambda$ の多項式である。

$$P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7) = 1 + h_n \lambda + \frac{(h_n \lambda)^2}{2!} + \frac{(h_n \lambda)^3}{3!} + \frac{(h_n \lambda)^4}{4!} + \frac{(h_n \lambda)^5}{5!} + \frac{(h_n \lambda)^6}{6!} + \gamma_7 \frac{(h_n \lambda)^7}{7!} \tag{4.3}$$

ここで γ_7 は、

$$\gamma_7 = c_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 a_7 \cdot 7! \tag{4.4}$$

で定義される安定性を支配するパラメータである。

[定義 2]

(4.3) によって定義される $h_n \lambda$ の多項式 $P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7)$ を、7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の安定多項式という。

[定義 3]

$|P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7)| < 1$ であるとき、7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) は、その $h_n \lambda$ に対して絶対安定であるといわれる。

[定義 4]

次式によって定義される領域 S の内点の集合を、7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の絶対安定領域という。

$$S = \{h_n \lambda \mid |P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7)| \leq 1, h_n \lambda \in \mathbb{C}\} \tag{4.5}$$

また、 S の原点を含む単連結な閉領域の内点の集合から、 $\operatorname{Re}(h_n \lambda) \geq 0$ を満足する $h_n \lambda$ を除いた集合を、有効絶対安定領域とよび S_e で表すことにする。

有効絶対安定領域は、絶対安定領域の中で数値解の安定性にとって有効な領域である。

[定義 5]

有効絶対安定領域 S_e と実軸 R との交り、 S_i 、すなわち

$$S_i = S_e \cap R = (-\alpha, 0.0) \tag{4.6}$$

を、7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法 (2.2) の絶対安定区間という。ここで、 α は絶対安定区間の長さを表す数量になっている。

いま $x = x_n$ において実際に得られる数値解 (丸め誤差を含む) を \tilde{y}_n としよう。そのとき

$$\tilde{y}_{n+1} = P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7) \tilde{y}_n + r_{n+1} \tag{4.7}$$

と表すことができる。ここで r_{n+1} は、(4.7) の右辺の第一項の計算の際に発生する丸め誤差である。次に (4.2) の y_n および y_{n+1} に、それぞれ $y(x_n)$ および $y(x_{n+1})$ を代入すると、

$$y(x_{n+1}) = P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7) y(x_n) - T_{n+1} \tag{4.8}$$

が得られる。ここで T_{n+1} は $f = \lambda y$ としたときの局所打ち切り誤差である。いま (4.7) から (4.8) を辺々引

き算し,

$$e_n = y_n - y(x_n) \tag{4.9}$$

$$E_{n+1} = r_{n+1} + T_{n+1} \tag{4.10}$$

とおけば,

$$e_{n+1} = P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7) e_n + E_{n+1} \tag{4.11}$$

が得られる. 勿論 E_{n+1} は局所誤差である.

(4.11)式から [定義3] の絶対安定の意味がはっきりしてくる. テスト方程式(4.1)を7段数6次法(2.2)を用いて積分するとき, 安定多項式 $P_{76}(h_n \lambda, \gamma_7)$ は, 集積誤差 e_n の次のステップへの伝播率になっている. 公式(2.2)がある $h_n \lambda$ に対して絶対安定であるとは, そのような刻み幅 h_n で積分するとき, 集積誤差 e_n は縮小されて次のステップに伝播されることを意味する.

この研究においてわれわれは, 安定性の優劣を比較するために次のような尺度を使用する.

- (i) 有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$
 $A(S_e)$ の大きい公式程安定性がよいとする.
- (ii) 有効絶対安定領域 S_e の包含関係
- (iii) 絶対安定区間の長さ α
- (iv) 安定多項式の絶対値の大小

公式 A および B の安定多項式をそれぞれ $P_{76}(h_n \lambda, \gamma^A)$ および $P_{76}(h_n \lambda, \gamma^B)$ とするとき,

$$|P_{76}(h_n \lambda, \gamma^A)| < |P_{76}(h_n \lambda, \gamma^B)| \tag{4.12}$$

ならば, その $h_n \lambda$ に対して公式 A は公式 B より安定性がよいとする.

打ち切り精度, 安定性などを極限まで追求しようとすると, しばしば丸め誤差特性の著しい劣化という現象に遭遇する. したがって, 打ち切り誤差や安定性について最適化を試みる際には, 丸め誤差に関する性質の変化に注意を払わなければならない. このような目的のためにわれわれは, 次式で定義される数量 R を使用する.

$$R = \sum_{i=1}^7 |a_i| + \sum_{i=2}^7 \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \tag{4.13}$$

[定義6]

R を7段数陽的 Runge-Kutta 法の丸め誤差特性判定基準という.

一般に R は小さいほど好ましいのは勿論であるが, 常微分方程式の数値解は倍精度で求めることが多いので, R が著しく大きくない限りその大小にあまり神経質になる必要はないだろう.

5. 7段数6次法の最適化

5.1 7段数6次法の特性

5.1.1 安定特性

既述のように, われわれは7段数6次法の次数条件式群を c_2, c_3, c_5 および c_6 を自由パラメータとして

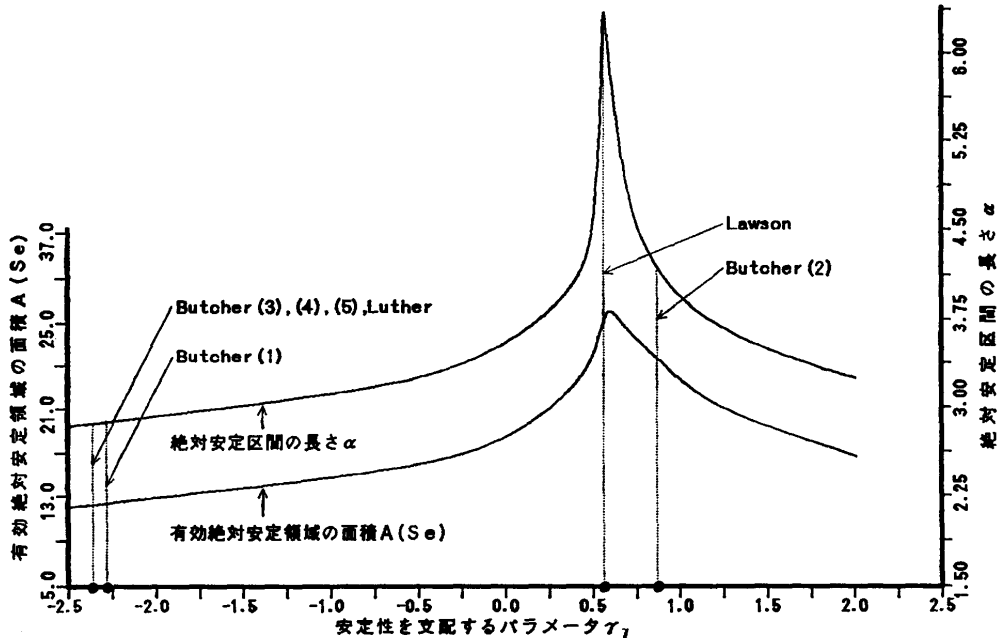


図1 γ_7 と有効絶対安定領域の面積および絶対安定区間の関係
Fig. 1 The relation among γ_7 , the area of the effective absolute stability region and the length of the interval of absolute stability.

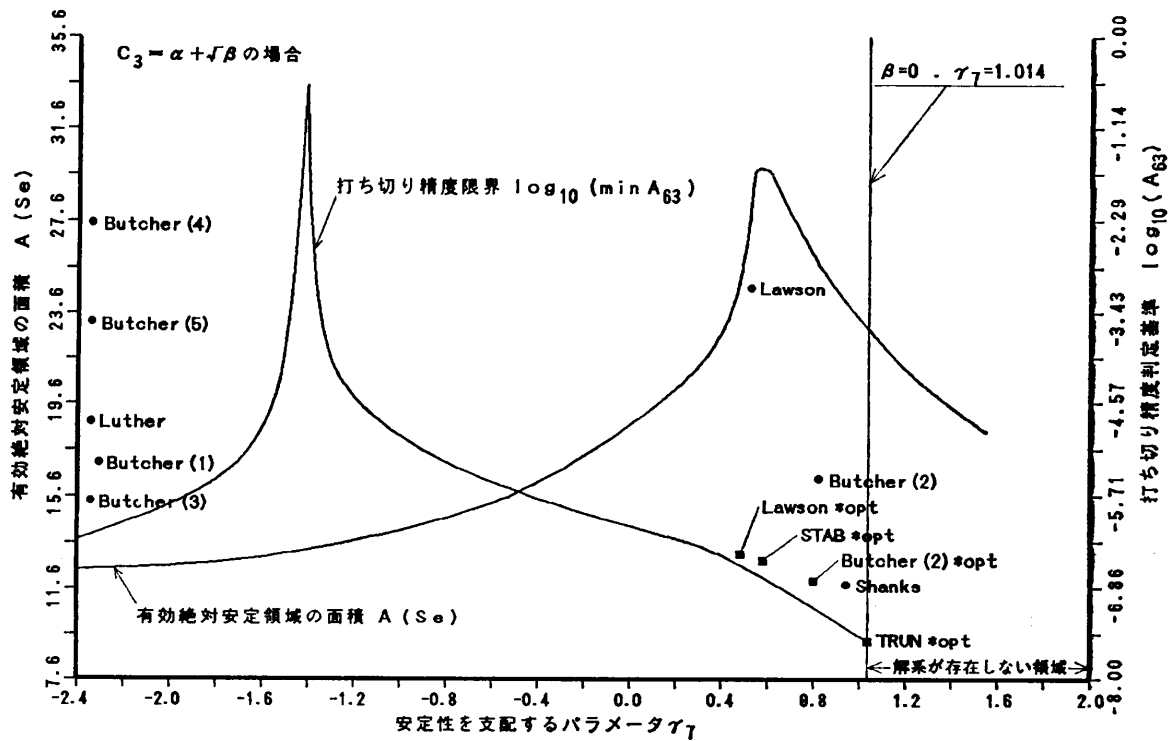


図 2 打ち切り精度と安定性の関係
Fig. 2 The relation between truncation error and stability.

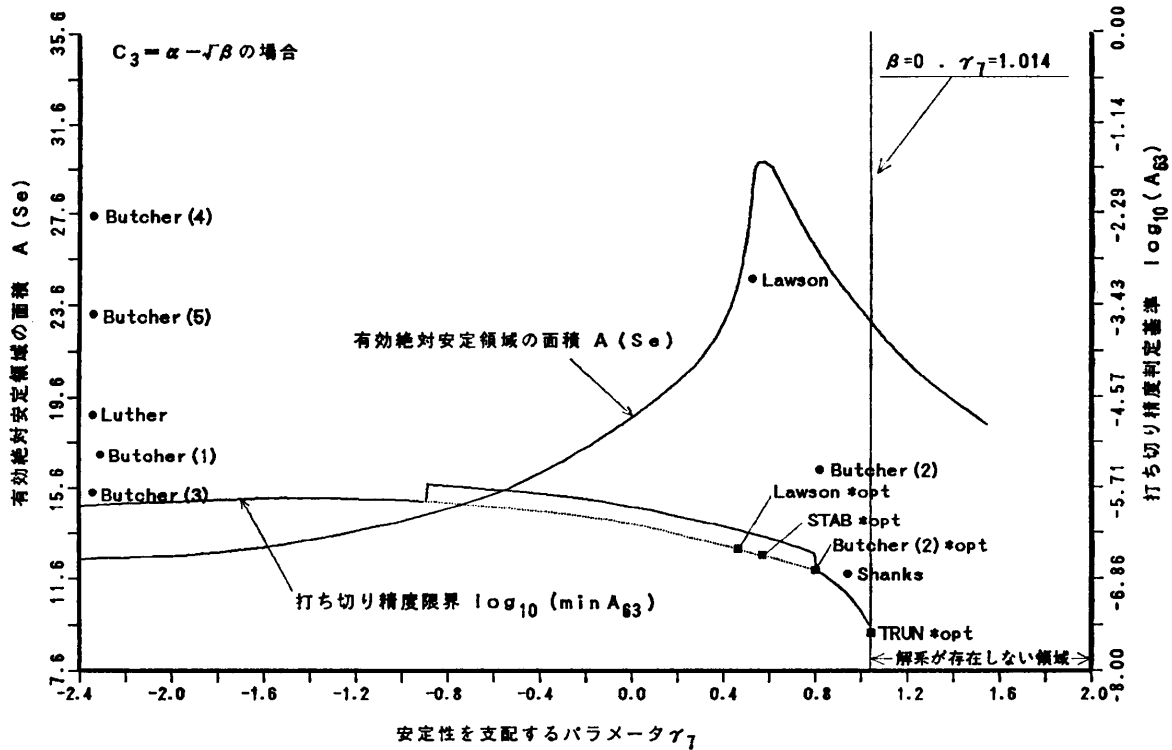


図 3 打ち切り精度と安定性の関係
Fig. 3 The relation between truncation error and stability.

表 1 最適化公式 1: Butcher (2)^{opt} の係数
Table 1 Optimum formula 1: the coefficients in Butcher (2)^{opt}.

88639		88639					
2619732		2619732					
152483		-309553	1119988				
827533		975054	2232231				
713503		214283	-4	508237			
2581478		3101130	52492273	2451758			
501791	1+	449222	-1-	246849	-1-	339803	1+
816935		1153929		1012909		3454117	
649236		1640		1902526		806232	
845923	-1-	1333253		2099163		1705577	-1-
						241448	
						2763061	
						1630911	
						778064	
						1144771	
1	1+	653491	-1511407	923179	-3-	2428381	3+
		1189133	1605381	2428381			
						860759	
						1042147	
						1675769	
						1346252	
						82383	
			0	15211		281240	
				295334		812579	
						242872	
						1452501	
						793589	
						2827616	
						380549	
						4958871	

表 2 最適化公式 2: Lawson^{opt} の係数
Table 2 Optimum formula 2: the coefficients in Lawson^{opt}.

-858444		-858444					
2467085		2467085					
351225		270094	-12615				
2711189		1757717	523111				
1855		201635	-12493	8981			
13693		1318292	521423	1386296			
754479		457600	28666	823376	-60-	286397	
1259705		620251	557773	1608595		890444	
59841		290097	-5021	621473	59+	1599683	
79781	-1-	475108	250303	1615646		3163682	
						363932	
						725401	
						492462	
						578725	
						1708613	
						2298323	
1	3+	829451	-2743	556991	101+	716143	
		4823956	2439329	652179		1243950	
						142229	
						224478	
						139569	
						694465	
						516034	
						1814007	
						92574	
						1107961	
						679326	
			0	-8-	570914	8+	
				1463875		224478	

解いたが⁹⁾, 打ち切り精度と安定性の両面から公式の制御ができるように, c_3 を自由パラメータから外し, その代わりに安定性を支配するパラメータ γ_7 を自由パラメータに入れる. γ_7 と係数パラメータの関係を示す(4.4)式と, 次数条件式群の解⁹⁾から得られる次の関係式

$$\gamma_7 = \frac{7c_3(1-3c_3)}{15c_3^2 - 10c_3 + 2} = 7c_3(1-3c_3) \quad (5.1)$$

より, c_3 は γ_7 の関数として次のように表される.

すなわち

$$c_3 = \frac{7 + 10\gamma_7 \pm \sqrt{(-20\gamma_7^2 - 28\gamma_7 + 49)}}{2(15\gamma_7 + 21)} \quad (5.2)$$

(5.2)式より c_3 を自由パラメータから外し, その代わりに γ_7 を自由パラメータに入れることが可能になる. 一つの γ_7 に対して c_3 には二つの場合, $c_3 = \alpha + \sqrt{\beta}$ および $c_3 = \alpha - \sqrt{\beta}$ が考えられる. β が

表 3 各公式の打ち切り精度判定基準と丸め誤差特性判定基準
Table 3 Criteria of truncation error and roundoff error in 7-stage 6th-order methods.

公 式	A_{**}	A_{**}	R
Butcher (1)	8.883973E-03	5.626540E-06	15.3767
Butcher (2)	5.323707E-03	3.087794E-06	31.7284
Butcher (3)	6.751209E-03	2.255901E-06	13.5204
Butcher (4)	1.619681E-01	4.448444E-03	80.5262
Butcher (5)	1.513051E-02	2.444330E-05	11.9095
Lawson	1.966941E-02	1.936299E-04	208.125
Luther	1.889974E-02	2.048358E-05	32.0679
Shanks	1.804269E-04	2.108041E-08	2355.2985 (5次に非零項あり)
Butcher (2) ^{opt}	1.19834313E-03	8.22231944E-08	23.7464
Lawson ^{opt}	1.86204240E-03	2.67658504E-07	2554.6198
TRUN ^{opt}	1.01854281E-03	4.43632504E-08	7.6650
STAB ^{opt}	1.79268189E-03	2.4467283E-07	441.741

非負でなければならないことから, 解系が存在するために γ_7 は

$$\frac{-7-\sqrt{294}}{10} \leq \gamma_7 \leq \frac{-7+\sqrt{294}}{10} \quad (5.3)$$

なる値をとるように制限される。

γ_7 が(5.3)に示すような範囲で変動するとき、7 段数 6 次法(2.2)の有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ と絶対安定区間の長さ α は、図 1 のように変動する。図 1 は横軸に γ_7 をとり、それぞれ左側の縦軸に有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ 、右側の縦軸に絶対安定区間の長さ α を目盛り、 $A(S_e)$ と α が γ_7 の変動に伴ってどのように変動するかを示したものである。また、図中には Butcher, Lawson, Luther などの既知公式の γ_7 が・で記入され、その $A(S_e)$ や α がどのような値をとるか読み取りやすいように点線が書き込まれている。この図の観察から Lawson の公式は絶対安定区間が最大であることがわかる。また有効絶対安定領域に着目すると、別の最適公式が得られるだろう。既知公

表 4 各公式の安定特性
Table 4 The area of the effective region of absolute stability and the length of the interval of absolute stability.

公 式	γ_7	$A(S_e)$	α
Butcher (1)	-2.265248	12.2946485	2.8655822
Butcher (2)	0.865248	25.1097866	4.2060975
Butcher (3)	-2.3333	12.2166349	2.8560718
Butcher (4)	-2.3333	12.2166349	2.8560718
Butcher (5)	-2.3333	12.2166349	2.8560718
Lawson	0.549750	28.0327890	6.4628437
Luther	-2.3333	12.2166349	2.8560718
Shanks	$\gamma_7 = -0.602151$ $\gamma_7 = 0.934588$	11.78280906	2.7732375
Butcher (2) ^{opt}	0.865248	25.109786	4.2060974
Lawson ^{opt}	0.549750	28.032790	6.4628437
TRUN ^{opt}	1.00000	23.210255	3.9539207
STAB ^{opt}	0.58000	29.794539	5.9398450

表 5 最適化公式 3: TRUN^{opt} (打ち切り精度判定基準最小) の係数
Table 5 Optimum formula 3: the coefficients in TRUN^{opt} (formula with minimum criterion for the size of truncation error).

343509	343509					
1912259	1912259					
2	105089	151883				
9	1239704	1104983				
3	306598	-3929612	1053			
7	3088071	8967501	1372			
1083410	445305	-679510	6437	1496626		
1555463	1927606	3764313	710733	2349633		
1219689	-16693	725467	1144502	-285851	138831	
1574330	208210	1613784	6493049	3716102	453664	
1	612041	-658363	794618	1068356	-112342	265344
	2687398	1260212	1686081	2036115	267607	369305
	21410	0	359539	82579	52099	1003705
	294301		1249603	436250	380200	4209344
						331541
						4434825

表 6 最適化公式 4: STAB^{opt} (有効絶対安定領域最大) の係数
Table 6 Optimum formula 4: the coefficients in STAB^{opt} (formula with maximum effective region of absolute stability).

-332478	-332478					
1008541	1008541					
29503	297605	-15822				
224417	1887418	603587				
243301	40697	-31123	11279			
1748152	260101	1200170	1305118			
576061	721073	2527	277508	44+	186637	
960827	1149518	45249	1096597	-45-	1101230	
847279	547693	-158257	672791	35+	688061	1938
1128813	1068409	7091280	1192360	-33-	882851	3871
1	8097	-2611	48270	76+	38735	-1678819
	909514	21403133	279389	-78-	655512	2251926
	514912	0	1006462	6+	688643	259141
	2881155		4408975		1429195	1294748
						423013
						1488352
						217759
						2612422

式の中で次に安定特性のすぐれている公式は Butcher (2) で, Butcher (1), Butcher (3), Butcher (4), Butcher (5) および Luther は, 前記の 2 公式に比べると安定性が著しく劣ることがわかる.

5.1.2 打ち切り誤差特性

7 段数 6 次法の $(c_2, \gamma_7, c_5, c_6)$ を自由パラメータとする解系において, まず図 1 のように γ_7 を横軸にとつて解系が存在する範囲で変動させ, 有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ のグラフを描く. ついで, 個々の γ_7 の値に対して, A_{63} で表される打ち切り精度が最良になるように三つの自由パラメータ c_2, c_5 および c_6 を最適化し, $\log_{10}\{\min_{c_2, c_5, c_6} A_{63}(\gamma_7)\}$ のグラフを $A(S_e)$ のグラフと同一画面上に描く. として $c_3 = \alpha + \sqrt{\beta}$ に対応するグラフを図 2, $c_3 = \alpha - \sqrt{\beta}$ に対応するグラフを図 3 とする. 図 2 および図 3 において, それぞれ左側の縦軸に有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$, 右側の縦軸に打ち切り精度判定基準の常用対数 $\log_{10} A_{63}$ が目盛り

られる. また, 各既知公式の γ_7 および $\log_{10} A_{63}$ を両座標とする点 $(\gamma_7, \log_{10} A_{63})$ を \cdot で, 図 2 および図 3 に記入し, それに公式の提案者名を併記する. 図 3 における点線は, $\log_{10}\{\min_{c_2, c_5, c_6} A_{63}(\gamma_7)\}$ のグラフがあるいはそこまで落ちるのではないかと推定される曲線 (実際には達せられなかったが) である.

図 2 および図 3 の観察から, 既知公式の中では Shanks の公式の打ち切り精度が最良であるように見える. 実際数値実験においても好ましい結果が得られることが多い. しかしこの公式は厳密には 5 次法で, 打ち切り誤差の主項は h^6 のオーダーの項である. ただ主項の絶対値が著しく小さく, h^7 のオーダーの打ち切り誤差項の絶対値と同等またはそれ以下の大きさをもつので, 実質的には高精度 6 次法として機能する. また, 後述するよう

にこの公式の丸め誤差特性は既知公式中最悪である. Butcher (1), Butcher (2), Butcher (3), Luther などが, 既知公式中では Shanks に次ぐ打ち切り精度をもつ. Butcher (4), Butcher (5) および Lawson は, 打ち切り精度がよくない.

5.2 7 段数 6 次法の最適化

5.2.1 既知公式の改良

図 2 および図 3 の観察から, 既知公式中 Butcher (2) と Lawson は, 安定性にすぐれ打ち切り精度の

表 7 単一初期値問題
Table 7 Single initial value problems.

初期値問題		理論解
1	$y' = -y$ $y(0) = 1$	$y = e^{-x}$
2	$y' = 2\sqrt{(y-1)}/x$ $y(1) = 5$	$y = (\log_e x + 2)^2 + 1$
3	$y' = -y^2 - (2x-1)y - x^2 + x - 1$ $y(0) = 1/2$	$y = -x + 1/(1 + e^{-x})$
4	$y' = -x^2 y^2/3$ $y(2) = 1$	$y = 9/(x^2 + 1)$
5	$y' = \sqrt{y} - y/x$ $y(1) = 16/9$	$y = (x/3 + 1/\sqrt{x})^2$
6	$y' = (x+y)/y$ $y(1) = 1$	$y = x(\log_e x + 1)$
7	$y' = x^2 + y/x$ $y(1) = 0$	$y = (x^3 - x)/2$
8	$y' = \sin(x) - y$ $y(0) = 1/2$	$y = (\sin(x) - \cot(x))/2 + e^{-x}$
9	$y' = 1 - y^2$ $y(0) = 0$	$y = \tanh(x)$
10	$y' = e^{-x} - y$ $y(0) = 1$	$y = e^{-x}(x+1)$

表 8 公式 Butcher (2) による数値実験結果
Table 8 Numerical results by Butcher (2).

問題 No.	第 1 ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.2428376943975 d -11	0.1218431144824 d -13	0.9873046824538 d -11
2	0.2302338319993 d -09	0.1144550232368 d -08	0.1144550232368 d -08
3	0.3417585658916 d -11	0.2575717417130 d -13	0.3137513859830 d -10
4	0.2543961249990 d -08	0.8875911073833 d -12	0.4192789004875 d -08
5	0.2566558077177 d -09	0.5481608500446 d -09	0.5481608500446 d -09
6	0.5886499065966 d -09	0.1369578850330 d -07	0.1369578850330 d -07
7	0.2111266578231 d -09	0.7045116490190 d -08	0.7045116490190 d -08
8	0.2716833702454 d -11	0.6939608609979 d -11	0.1949342076646 d -10
9	0.8822755893922 d -09	0.2359223927328 d -15	0.4225334346297 d -08
10	0.8594097655745 d -12	0.5600053298686 d -13	0.4659814201169 d -11

表 9 公式 Lawson による数値実験結果
Table 9 Numerical results by Lawson's formula.

問題 No.	第 1 ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.2230220175203 d -10	0.1119006027840 d -12	0.9067401690599 d -10
2	0.8184974920056 d -10	0.6399769603149 d -11	0.1244211400575 d -09
3	0.5571446082264 d -12	0.1457660658843 d -09	0.1457660658843 d -09
4	0.1542212524214 d -06	0.5284318252072 d -10	0.2546061348557 d -06
5	0.1923350367861 d -10	0.1435251917314 d -09	0.1435251917314 d -09
6	0.1014460737636 d -10	0.3561779315930 d -08	0.3561779315930 d -08
7	0.8807087871487 d -10	0.2537868226682 d -07	0.2537868226682 d -07
8	0.1733803378645 d -10	0.2249582811698 d -10	0.7240970323341 d -10
9	0.7171456657684 d -10	0.1484923295436 d -14	0.1352503696539 d -07
10	0.1023070517192 d -10	0.5025761030215 d -12	0.3766250505910 d -10

面でも十分改良可能であることがわかる。一方その他の公式は、安定性があまりよくないし、打ち切り精度の面でもそれを償うような改良は望めない。したがって、ここでは Butcher (2) と Lawson の 2 公式の安定性を支配するパラメータをそれぞれそのまま固定し、丸め誤差特性を悪化させないように注意しながら、打ち切り精度判定基準 A_{63} が可能な限り小さくなるように自由パラメータ c_2, c_5 および c_6 を決定した。ついでこれらのパラメータを解系に代入し、得られた係数を打ち切り精度を損なわない程度の精度をもつ分数で近似した。(この取扱いは次章の最適公式の導出についても同様である。) このようにして得られた公式 Butcher (2)^{opt} および Lawson^{opt} の係数マトリックスを表 1 および表 2 に示す。

既知公式と Butcher (2)^{opt}, Lawson^{opt} などのわれわれによって得られた公式の、打ち切り誤差および丸め誤差の特性値が表 3 に、安定特性値が表 4 に示される。また、われわれによって新規に得られた公式は、既知公式と同様な仕方で図 2 および図 3 に記入される。

5.2.2 打ち切り精度ほぼ最良の公式

図 2 および図 3 の観察から、次数条件族群の解が存在する γ_7 の上限付近で打ち切り精度ほぼ最良の公式が得られることがわかる。また、この解系によって 7 次の精度を達成することは不可能であることがわかる。したがって、この解系からは実質 7 段数 7 次の公式は得られない。

打ち切り精度ほぼ最良の公式 TRUN^{opt} は、 $\gamma_7=1.0$ とし、丸め誤差特性の劣化に注意しながら、打ち切り精度判定基準 A_{63} がほぼ最小になるように自由パラメータ c_2, c_5 および c_6 を決定することによって得られた。このよ

うにして得られた TRUN^{opt} の係数を表 5 に示す。またその特性値は表 3 および表 4 に示される。TRUN^{opt} は、他の諸公式と同様な仕方で図 2 および図 3 に記入される。

5.2.3 有効絶対安定領域の面積 $A(S_e)$ ほぼ最大の公式

絶対安定区間ほぼ最大の公式は Lawson によって得られているが、有効絶対安定領域の面積ほぼ最大の

表 10 公式 Shanks による数値実験結果
Table 10 Numerical results by Shanks's formula.

問題 No.	第 1 ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.1057154364048 d -11	0.5304194007573 d -14	0.4298041089701 d -11
2	0.1109742298055 d -09	0.6007034869526 d -09	0.6007034869526 d -09
3	0.3542305337945 d -13	0.4551914400963 d -13	0.9380135557180 d -12
4	0.8401514206557 d -10	0.7878138245931 d -14	0.1358685802755 d -09
5	0.4660105634713 d -11	0.2566169499119 d -10	0.2566169499119 d -10
6	0.9197254069448 d -10	0.2475447402617 d -08	0.2475447402617 d -08
7	0.2089907656655 d -09	0.7980290206433 d -08	0.7980290206433 d -08
8	0.1167586860529 d -11	0.1487313744386 d -11	0.1239222613414 d -10
9	0.9462243488745 d -11	0.4163336342344 d -16	0.2370209584157 d -10
10	0.2302477652982 d -11	0.1470346197227 d -13	0.7677108948556 d -11

表 11 公式 Butcher (2)^{opt} による数値実験結果
Table 11 Numerical results by Butcher (2)^{opt}.

問題 No.	第 1 ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.2428390821763 d -11	0.1218441309219 d -13	0.9873102335689 d -11
2	0.2533129261906 d -10	0.5971090288881 d -10	0.5971090288881 d -10
3	0.2196853809977 d -13	0.5551115123126 d -14	0.1953437411828 d -11
4	0.1087981232883 d -09	0.2112481196914 d -13	0.1316013131802 d -09
5	0.8002448703692 d -10	0.1758568846100 d -09	0.1758568846100 d -09
6	0.3125696923512 d -10	0.7241593991125 d -09	0.7241593991125 d -09
7	0.1599000272468 d -10	0.5084359600005 d -09	0.5084359600005 d -09
8	0.1504858737622 d -11	0.3180561022886 d -10	0.3603155968035 d -10
9	0.5992399285115 d -11	0.1249000902703 d -15	0.2685133643210 d -09
10	0.1150921025150 d -10	0.2565967729094 d -14	0.4261473118827 d -10

表 12 公式 Lawson^{opt} による数値実験結果
Table 12 Numerical results by Lawson^{opt}.

問題 No.	第 1 ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.8689701735953 d -11	0.4360038907334 d -13	0.3532971137865 d -10
2	0.3157762940020 d -10	0.3436895212872 d -10	0.3832945072446 d -10
3	0.1051173037503 d -12	0.9769962616701 d -14	0.3493400013710 d -11
4	0.1537573193766 d -08	0.6046026309811 d -12	0.2624150952091 d -08
5	0.1293930795843 d -09	0.2827649225878 d -09	0.2827649225878 d -09
6	0.8099260151440 d -10	0.1870340327059 d -08	0.1870340327059 d -08
7	0.3742466406220 d -11	0.1093241053240 d -09	0.1093241053240 d -09
8	0.3409515725306 d -11	0.3113083055228 d -10	0.5209662562455 d -10
9	0.2737635985961 d -10	0.3053113317719 d -15	0.4761652738772 d -09
10	0.2028965884193 d -10	0.1140192947653 d -12	0.6852184097905 d -10

公式は未だ知られていない。そこでそのような公式を求めることにする。図1によれば、 $\max_{\gamma} A(S_{\gamma})$ は $\gamma=0.58$ 付近で得られるので、 γ を 0.58 に固定し、丸め誤差特性の劣化に注意しながら他の自由パラメータ c_2, c_5 および c_6 を、 A_{63} がほぼ最小になるように決定した。このようにして得られた公式 STAB^{opt} の係数を表6に示す。STAB^{opt} も他の諸公式と同様な仕方で図2および図3に記入される。またその特性値が表3および表4に示される。

6. 数値例と結果の考察

最適化が正しく行われたかどうかを調査するため、多数の例題について数値実験を行った。実験には最適化の対象となった既知公式 Butcher (2) および Lawson と、それぞれの最適化公式 Butcher^{opt} および Lawson^{opt}、新規に得られた二つの最適化公式 TRUN^{opt} および STAB^{opt}、さらに打ち切り精度最良な Shanks の公式が用いられた。

実験は、前記の各公式を用いて刻み幅 0.1 と 0.05 で各 100 ステップ積分し、第1ステップおよび最終ステップの誤差、最大誤差を調査することにより行われた。とり上げた例題単一微分方程式 10 例、安定性に特徴をもつ単一微分方程式 3 例および連立微分方程式 4 例については、何れの問題についても数値解の優劣が全く同様に相互に矛盾する結果が観察されなかった。ここでは表7に示す単一微分方程式を、刻み幅 0.1 で積分した結果のみを表8~表14に示す。

次に安定性を評価するための特性値が正しく得られているかどうか、また安定性の観点から最適化が誤りなく実行されているかどうかを検証するために、下記の弱 stiff 問題を解き、その結果を表15に示した。

[弱 stiff 問題]

$$y' = 100(\sin x - y) \quad y(0) = 0 \quad (6.1)$$

(理論解 $y = (\sin x - 0.01 \cos x + 0.01e^{-100x})/1.0001$)

表 13 公式 STAB^{opt} による数値実験結果
Table 13 Numerical results by STAB^{opt}.

問題No.	第1ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.8088418823604 d -11	0.4058346947345 d -13	0.3288512517852 d -10
2	0.3223921130058 d -10	0.4272893150414 d -10	0.4272893150414 d -10
3	0.9975353876257 d -13	0.1354472090043 d -13	0.3364031275765 d -11
4	0.1382700204333 d -08	0.5501366506441 d -12	0.2368774773553 d -08
5	0.1245451242138 d -09	0.2721236569414 d -09	0.2721236569414 d -09
6	0.7412442881716 d -10	0.1712212593930 d -08	0.1712212593930 d -08
7	0.3627941697060 d -11	0.1152216100309 d -09	0.1152216100309 d -09
8	0.2919095520859 d -11	0.3131536349676 d -10	0.4928123881198 d -10
9	0.2616788903620 d -10	0.4163336342344 d -15	0.4595301361654 d -09
10	0.1945442418272 d -10	0.1032763013564 d -12	0.6603977087405 d -10

表 14 公式 TRUN^{opt} による数値実験結果
Table 14 Numerical results by TRUN^{opt}.

問題No.	第1ステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差
1	0.2453176550787 d -12	0.1230882867962 d -14	0.9973966097476 d -12
2	0.2351674410761 d -11	0.4238698281256 d -10	0.4238698281256 d -10
3	0.5814793091474 d -14	0.2220446049250 d -14	0.7107092692138 d -12
4	0.8748319152430 d -09	0.2650132717441 d -12	0.1398887922166 d -08
5	0.3250621993800 d -10	0.7389844292049 d -10	0.7389844292049 d -10
6	0.5423939075655 d -10	0.1251542869340 d -08	0.1251542869340 d -08
7	0.5141763230465 d -10	0.1642703750804 d -08	0.1642703750804 d -08
8	0.2917333041808 d -11	0.2688460218336 d -10	0.3718436669686 d -10
9	0.1709904787206 d -11	0.1387778780781 d -16	0.1052110343291 d -09
10	0.5843880934719 d -11	0.3541397318625 d -13	0.2420823264071 d -10

表 15 弱 stiff 問題の数値実験結果
Table 15 Numerical results for a mild stiff problem.

公 式	第一ステップ	最終ステップ	最大誤差
Butcher (2)	0.40485594 d -01	0.13692662 d +11	0.13692662 d +11
Butcher (2) ^{opt}	0.40511031 d -01	0.13694645 d +11	0.13694645 d +11
Lawson	0.83962891 d -02	0.35021648 d -02	0.83962891 d -02
Lawson ^{opt}	0.84024408 d -02	0.54157902 d -02	0.84024408 d -02
Shanks	0.51255518 d -01	0.15263577 d +13	0.15263577 d +13
STAB ^{opt}	0.37113706 d -02	0.16631608 d -02	0.37113706 d -02
TRUN ^{opt}	0.61395724 d -01	0.56675936 d +14	0.56675936 d +14

を、刻み幅 0.05 で 20 ステップ積分する。

引用したグラフ、特性値の表、多くの数値実験結果から、われわれは次のような結論を引き出すことができる。

(1) Butcher (2) を打ち切り誤差の観点から最適化した Butcher (2)^{opt} は、特性値の表や数値実験結果などから打ち切り精度が著しく改良されていることがわかる。この公式は安定特性は不変でも丸め誤差特性は却って良くなっているため、Butcher (2) の代りに使用して有利である。

(2) Lawson を打ち切り誤差の観点から最適化した Lawson^{opt} は、特性値の表や数値実験結果などから打ち切り精度が著しく改良されていることがわかる。しかし丸め誤差特性がかなり悪化している（安定特性は不変であるが）ので、 R に対する制限を少し厳しくして探索をやり直す必要がある。

(3) 有効絶対安定領域の面積が最大になるように最適化された公式 STAB^{opt} は、特性値の表や数値実験結果などから Lawson^{opt} と比較して安定性については甲乙がつけ難く、打ち切り精度は勝るとも劣らず、丸め誤差特性は著しくすぐれているので、Lawson や Lawson^{opt} の代りに用いて有利である。

(4) 打ち切り誤差の観点から最適化された公式 TRUN^{opt} は、 h^7 のオーダの打ち切り精度判定基準こそ Shanks のそれにやや劣るが、厳密な意味で 6 次法であるし (Shanks の 5 次法であるのに対し)、Shanks の公式に比べて丸め誤差特性と安定性において著しく勝っている。したがって、Butcher (2), Butcher (2)^{opt} および Shanks の代りに用いて有利である。

7. おわりに

この研究においてわれわれは、7 段数 6 次法の次数条件式群の一解系を導き、打ち切り誤差、丸め誤差、安定性の三つの観点を総合的に考慮しながら特色あるいくつかの公式を導いた。得られた公式は性能的に既知公式に勝っており、十分存在理由のあるものである。このような研究は、7 段数 6 次法の次数条件式群の解系ごとに可能であって、研究の一つのひな型を示すものである。

付録 7 段数 6 次法の既知公式

Butcher の公式

BUTCHER (1), BUTCHER (2) (複号同順)

$\frac{5 \mp \sqrt{5}}{10}$	$\frac{5 \mp \sqrt{5}}{10}$						
$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$	$\frac{\mp \sqrt{5}}{10}$	$\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{10}$					
$\frac{5 \mp \sqrt{5}}{10}$	$\frac{-15 \pm 7\sqrt{5}}{20}$	$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$	$\frac{15 \mp 7\sqrt{5}}{12}$				
$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$	$\frac{5 \mp \sqrt{5}}{60}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{15 \pm 7\sqrt{5}}{60}$			
$\frac{5 \mp \sqrt{5}}{10}$	$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{60}$	0	$\frac{9 \mp 5\sqrt{5}}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-5 \pm 3\sqrt{5}}{10}$		
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-55 \pm 25\sqrt{5}}{12}$	$\frac{-25 \mp 7\sqrt{5}}{12}$	$5 \mp 2\sqrt{5}$	$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$	
	$\frac{1}{12}$	0	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

この研究で残された課題は、その成果を実用に結びつけることである。たとえば好ましい高次のうめ込み型公式の導出がそれである。

謝辞 有益な助言をいただいた中央大学田口東教授ならびにレフェリーの皆様に感謝する。

参考文献

- 1) Butcher, J. C.: On Runge-Kutta Processes of High Order, *J. Austral. Math. Soc.*, Vol. 4, pp. 179-194 (1964).
- 2) Lawson, J. D.: An Order Six Runge-Kutta Process with Extended Region of Stability, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 4, pp. 620-625 (1967).
- 3) Luther, H. A.: An Explicit Sixth-Order Runge-Kutta Formula, *Math. Comp.*, Vol. 22, No. 102, pp. 434-436 (1968).
- 4) Sarafyan, D.: Improved Sixth-Order Runge-Kutta Formulas and Approximate Continuous Solution of Ordinary Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 40, pp. 436-445 (1972).
- 5) Butcher, J. C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge-Kutta and General Linear Methods*, John Wiley & Sons (1987).
- 6) Hull, T. E. and Johnston, R. L.: Optimum Runge-Kutta Methods, *Math. Comp.*, Vol. 18, pp. 306-310 (1964).
- 7) 田中正次: Runge-Kutta 法の打ち切り誤差に関する研究, 博士論文 (東京大学) (1972).
- 8) 田中正次, 高山尚文: 7 段数 6 次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解について, Vol. 33, No. 6, pp. 812-816 (1992).

BUTCHER (3)

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{8}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	
1	$\frac{9}{44}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{63}{44}$	$\frac{18}{11}$	0	$-\frac{16}{11}$
<hr/>						
	$\frac{11}{120}$	0	$\frac{27}{40}$	$\frac{27}{40}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$
						$\frac{11}{120}$

BUTCHER (4)

1	1					
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{12}$			
$-\frac{1}{3}$	$\frac{151}{36}$	$\frac{29}{9}$	$-\frac{7}{4}$	-6		
$\frac{4}{3}$	$-\frac{112}{9}$	$-\frac{116}{9}$	$\frac{32}{3}$	18	-2	
1	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{29}{23}$	$\frac{397}{276}$	$\frac{152}{69}$	$-\frac{10}{69}$	$\frac{1}{69}$
<hr/>						
	$\frac{23}{160}$	0	$\frac{29}{80}$	$\frac{29}{80}$	$-\frac{1}{160}$	$-\frac{1}{160}$
						$\frac{23}{160}$

BUTCHER (5)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{12}$			
$\frac{5}{6}$	$-\frac{35}{144}$	$-\frac{55}{36}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$		
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{360}$	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	
1	$-\frac{41}{260}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$
<hr/>						
	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$
						$\frac{13}{200}$

Lawson

- $c_1=0.20227664489814063493$ d 0
- $c_2=0.30341496734721095240$ d 0
- $c_3=0.87500000000000000000$ d 0
- $c_4=0.50000000000000000000$ d 0
- $c_5=0.12500000000000000000$ d 0
- $c_7=1.00000000000000000000$ d 0
- $b_{11}=0.20227664489814063493$ d 0
- $b_{21}=0.07585374183680273810$ d 0
- $b_{31}=0.22756122551040821430$ d 0
- $b_{41}=1.35928221728330031725$ d 0
- $b_{51}=-5.23788570262880661565$ d 0
- $b_{61}=4.75360348534550629840$ d 0
- $b_{71}=-0.32109200225802168471$ d 0
- $b_{81}=1.65135312792238238129$ d 0
- $b_{91}=-0.90528667676372049327$ d 0
- $b_{101}=0.07502555109935979670$ d 0
- $b_{111}=0.29232183934936356571$ d 0
- $b_{121}=-0.74826938608982951652$ d 0
- $b_{131}=0.59247084496648503998$ d 0
- $b_{141}=-0.03955453884914362030$ d 0
- $b_{151}=0.02803124062312453111$ d 0
- $b_{161}=-20.66276189490408518863$ d 0
- $b_{171}=63.85232094633211874324$ d 0
- $b_{181}=-74.15175094768883424861$ d 0
- $b_{191}=0.86411764437338439521$ d 0
- $b_{201}=14.50548165929482370619$ d 0
- $b_{211}=16.59259259259259259259$ d 0
- $a_1=0.01428571428571428571$ d 0
- $a_2=0.00000000000000000000$ d 0
- $a_3=0.00000000000000000000$ d 0
- $a_4=0.27089947089947089947$ d 0
- $a_5=0.42962962962962962962$ d 0
- $a_6=0.27089947089947089947$ d 0
- $a_7=0.01428571428571428571$ d 0

Luther の公式

Luther

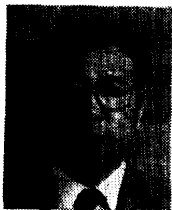
1	1							
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$						
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$					
$\frac{7-\sqrt{21}}{14}$	$\frac{3(-7+3\sqrt{21})}{392}$	$\frac{8(-7+\sqrt{21})}{392}$	$\frac{48(7-\sqrt{21})}{392}$	$\frac{3(-21+\sqrt{21})}{392}$				
$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{-5(231+51\sqrt{21})}{1960}$	$\frac{-40(7+\sqrt{21})}{1960}$	$\frac{-320\sqrt{21}}{1960}$	$\frac{3(21+121\sqrt{21})}{1960}$	$\frac{392(6+\sqrt{21})}{1960}$			
1	$\frac{15(22+7\sqrt{21})}{180}$	$\frac{120}{180}$	$\frac{40(-5+7\sqrt{21})}{180}$	$\frac{63(2-3\sqrt{21})}{180}$	$\frac{-14(49+9\sqrt{21})}{180}$	$\frac{70(7-\sqrt{21})}{180}$		
	$\frac{9}{180}$	0	$\frac{64}{180}$	0	$\frac{49}{180}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{9}{180}$	

Shanks の公式 (精度の高い 7 段数 5 次法)

Shanks

$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{192}$						
$\frac{1}{6}$	$\frac{-15}{6}$	$\frac{16}{6}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{4867}{186}$	$\frac{-5072}{186}$	$\frac{298}{186}$				
1	$\frac{-19995}{31}$	$\frac{20896}{31}$	$\frac{-1025}{31}$	$\frac{155}{31}$			
$\frac{5}{6}$	$\frac{-469805}{5022}$	$\frac{490960}{5022}$	$\frac{-22736}{5022}$	$\frac{5580}{5022}$	$\frac{186}{5022}$		
1	$\frac{914314}{2604}$	$\frac{-955136}{2604}$	$\frac{47983}{2604}$	$\frac{-6510}{2604}$	$\frac{-558}{2604}$	$\frac{2511}{2604}$	
	$\frac{14}{300}$	0	$\frac{81}{300}$	$\frac{110}{300}$	0	$\frac{81}{300}$	$\frac{14}{300}$

(平成 3 年 11 月 5 日受付)
(平成 4 年 6 月 12 日採録)



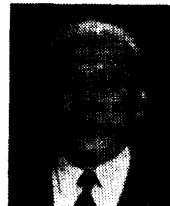
田中 正次 (正会員)

昭和 2 年生。昭和 32 年東北大学理学部数学科卒業。昭和 36 年同大学大学院理学研究科修士課程修了。同年富士電機(株)研究部に入社。昭和 37 年同社を退職し、山梨大学講師となる。現在は同大学電子情報工学科教授。専門は数値解析、主として常微分方程式の数値解法に関する研究に携わる。日本数学会、日本応用数理学会各会員。



高山 尚文 (正会員)

1962 年生。1985 年山梨大学計算機科学科卒業。1987 年同大学院工学研究科修士課程修了。同年(株)オキノ入社。POS システム、業務システムの開発に従事。1992 年(有)シンク情報システム設立。現在、同社代表取締役。数値解析、オペレーションズリサーチ、応用ソフトウェアの研究開発に従事。日本オペレーションズリサーチ学会会員。



山下 茂

昭和 18 年生。昭和 37 年山梨工業高等学校デザイン科卒業。現在は文部技官として山梨大学工学部電子情報工学科に勤務。