

高品位な自由曲面形状の生成とその形状制御†

今野 晃 市** 高村 禎 二** 千代倉 弘 明***

複雑な自由曲面形状を定義するための一般的な手法として曲面の境界曲線を定義し、その境界曲線を自由曲面で内挿する手法がある。入力された境界曲線は、設計したい物体の大まかな形状を表している。よって、この曲線に囲まれた領域を自由曲面で内挿する場合には、設計者の意図どおりの自由曲面が生成されることが重要である。しかし、曲線メッシュの形状によっては、うねった曲面が生成されることがある。また、設計する形状によっては、生成される自由曲面は G^1 連続になることが要求される。そこで本論文では、このような問題を解決した自由曲面の内挿法を提案する。本手法では、境界曲線が G^2 連続である場合に、 G^2 連続なパッチで曲線メッシュを内挿する。また、このように内挿されたパッチに対して、 G^2 連続性を保ったままでパッチの形状を変更する方法について述べる。

1. はじめに

近年、家電、自動車など複雑な自由曲面形状を持った製品が数多く生産されている。このような製品は、その形状の持つ機能を満たすだけでなく同じ機能を持つ他の製品とデザイン上の差別化をはかっていることが多い。このような製品形状では、従来の機能優先のデザインに加えて、人間の感性に訴えている部分も多い。このような背景で、より複雑で高品位な曲面形状をデザインできる CAD システムが望まれている。

計算機上で曲面形状を表現するための一つの方法として、曲面形状の境界曲線を入力し、その境界曲線のメッシュ(曲線メッシュ)を自由曲面で内挿するというものがある。設計者は曲線の生成、修正を行うことで、曲面形状を生成する。これは、曲面形状を直接デザインするよりも設計者の負担が少ないという利点がある。この曲線メッシュは立体の大まかな形状を表し、この曲線メッシュが設計者の意図どおりに内挿されることが重要になってくる。

定義された曲線メッシュ上に生成する曲面の研究が数多く行われている^{3),4),6),8)}。特に、NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) 曲面は、2次曲面、回転面などさまざまな曲面形状を一つの曲面式で表現できる利点がある⁷⁾。しかし、NURBS 曲面は、制御点と形状との関係がつかみにくいので、制御点を動かすことによって直観的に形状を変形することが困難で

ある。

一方、千代倉らは、Gregory パッチを用いた曲線メッシュの内挿法について提案している^{1),2)}。Gregory パッチは、境界曲線を横切る微分ベクトル関数(境界横断導関数³⁾)を各境界方向で独立に定義できる。したがって、たとえば曲線メッシュで囲まれた領域が非四辺形となるような不規則な曲線メッシュ¹⁾に対して、 G^1 連続になるようにパッチを生成することができる。

高井らは、Gregory パッチを拡張し、 G^2 連続となるパッチを提案している^{9),10)}。このパッチを用いることによって、隣接する二つのパッチ間を G^2 連続になるように内挿することができる。このパッチの表現式では、Gregory パッチと比較して高品位のパッチが生成できる。

このような曲面式によって、曲線メッシュを G^1 または G^2 連続に内挿することができる。しかし、曲面形状は CAD システム内で内挿してしまうので、その曲面形状が設計者の意図した形状になるとは限らない。このような場合には、設計者が曲面形状を容易に変更できることが重要である。従来、曲線メッシュを変更することによって曲面形状を変形することができた。しかしこの方法では、形状を変形したい曲面上に、新たに曲線を生成しなければならないので手間がかかる上に、曲面の微小な変形は困難である。今野らは、Gregory パッチを用いて内挿された曲線メッシュに対して、曲線メッシュを変更せずに、曲面形状を変形する方法を示した⁵⁾。しかし、この方法は、Gregory パッチを用いているために、 G^2 連続になるような高品位曲面に対して同様な形状変形ができるかどうかは述べられていない。

そこでわれわれは、曲面形状の微小な変形ができ、

† A Control Method of Free-Form Surfaces with Curvature Continuity by KOUICHI KONNO, TEIJI TAKAMURA (Software Division, RICOH Company Ltd.) and HIROAKI CHYOKURA (Faculty of Environmental Information, Keio University).

** (株)リコーソフトウェア事業部

*** 慶応義塾大学環境情報学部

なおかつ G^2 連続になるような曲面内挿法を提案する。以下では、この曲面式を G^2 -Gregory パッチと呼ぶ。この方法では、境界曲線の次数よりも3次高い次数の G^2 -Gregory パッチを生成する。このようにすると、曲線メッシュを変更せずに曲面形状の微小な変形が可能となる。また、 G^2 -Gregory パッチの形状と制御点との関係を明確にし、制御点を容易にしかも直観的に動かすことで、曲面形状を局所的に変更するための方法を示す。

2. 従来の内挿法の問題点

曲線メッシュを内挿するための曲面式として Gregory パッチを用いる手法がある。Gregory パッチは、一階境界横断導関数を各境界方向で独立に定義できるので、不規則な曲線メッシュに対して、 G^1 連続を保ったままで曲線メッシュを内挿することが可能である。しかし、設計者が G^2 連続になるような高品位曲面を要求する場合には、Gregory パッチでは、曲面式として不十分である。

一方、Gregory パッチを拡張し G^2 連続で曲線メッシュを内挿することができる G^2 -Gregory パッチを用い、境界曲線におけるパッチの連続性を G^1 連続から G^2 連続にすることによって、より高品位な曲面を生成することができる。しかし、高井らの提案した内挿法では、意図した形状ができるとは限らない。たとえば図1は、シンプルな曲線メッシュを高井らの方法で内挿し、その断面線を表示したものである。この図からもわかるように、内挿された曲面は歪んでいる。このような歪んだ曲面が生成される理由として、次のようなことが考えられる。曲線メッシュを内挿する場合には、まず各境界曲線における境界横断導関数を定義する。この境界横断導関数は、境界曲線につながっている曲線から設定される。例えば、図2のように境

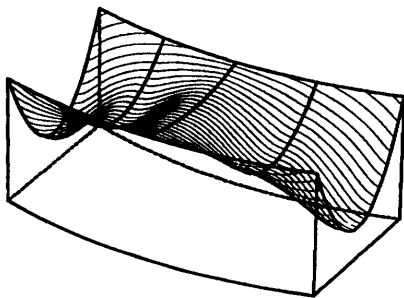


図1 曲線メッシュと断面線

Fig. 1 Curve meshes and cross sections.

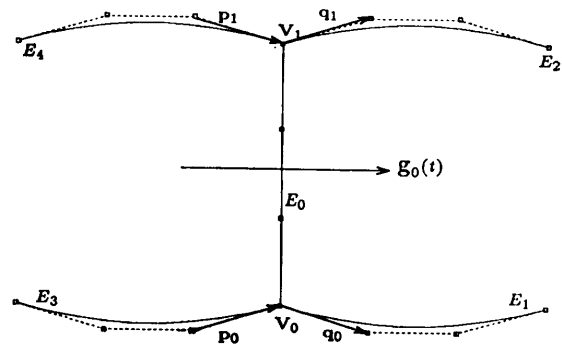


図2 境界横断導関数の設定
Fig. 2 Set cross boundary derivative.

界曲線 E_0 上での一階境界横断導関数 $g_0(t)$ を決定する場合には、境界曲線 E_0, E_1, E_2 を参照することによって決定される。ただし、境界曲線をはさんだ2枚の曲面が G^2 連続に接続される必要があるときには、さらに、 E_3, E_4 も考慮し一階境界横断導関数を決定する。この一階境界横断導関数は、生成される曲面の境界を横切る一階微分ベクトルを表し、曲面形状に大きな影響を与える。この一階境界横断導関数 $g(t)$ は、

$$g(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \mathbf{a}_i$$

のように2次の Bézier 多項式で定義される。境界曲線の端点 V_0, V_1 では、その端点につながる Bézier 曲線の制御点間ベクトル $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$ が得られる。これは、端点につながっている曲線の微分ベクトルの方向を表している。従来は、この一階境界横断導関数の項 \mathbf{a}_i ($i=0, 1, 2$) を次のように設定した²⁾。

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{p}_0 + \mathbf{q}_0}{|\mathbf{p}_0 + \mathbf{q}_0|}, \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1}{|\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1|}, \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_2|}. \quad (3)$$

同様に二階境界横断導関数も境界曲線とつながる曲線から設定される。パッチの制御点は、この境界横断導関数から求められる¹⁰⁾。

式(3)は、境界横断導関数を線形関数として指定することを意味する。しかし、図1のようなケースでは、線形な境界横断導関数を設定すると良い結果にはならないことを示している。境界横断導関数は、ベクトルの方向と長さという二つの要素からなり、なめらかな曲面を生成するためには、この二つの要素を適切に決定しなければならない。図1は、ベクトルの方向

が適切ではない例である。したがって、歪みのない曲面形状を生成するためには、この境界横断導関数をいかに指定するかを考えなければならない。

また、曲面形状を変形する場合には、境界曲線の形状を変形することになるので、曲面形状の微妙な変形が困難である。そこで、曲面形状の微妙な変形ができ、なおかつ G^2 連続に曲線メッシュを内挿するための方法を示す。

3. G^2 -Gregory パッチによる自由曲面の内挿

本章では、 G^2 -Gregory パッチを用いた曲面内挿法について説明する。 G^2 -Gregory パッチは、Gregory パッチの特徴を継承しかつ曲線メッシュを G^2 連続に内挿することができる曲面表現式である。われわれの内挿法では境界曲線上の任意の点における微分ベクトルを指定し、これらのベクトルを用いて曲線メッシュを内挿する。

3.1 G^2 -Gregory パッチの表現式

双 n 次の G^2 -Gregory パッチの表現式は次のようになる。図 3 では、双 6 次の G^2 -Gregory パッチを示す。

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) Q_{ij}(u, v). \quad (4)$$

ただし、
 $i=1, 2; j=1, 2$ のとき

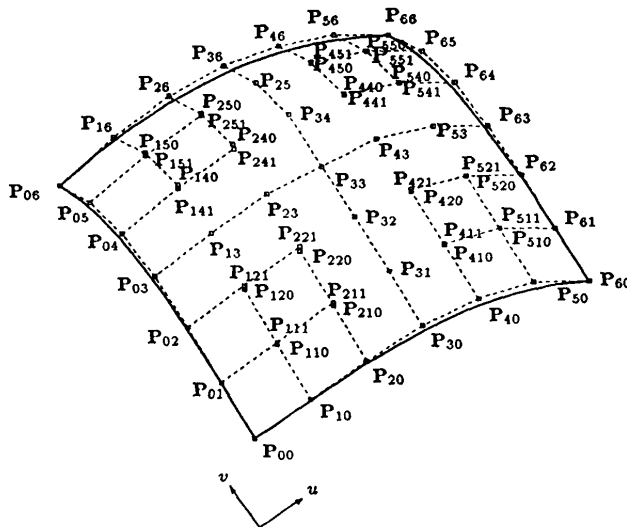


図 3 G^2 -Gregory パッチ
Fig. 3 G^2 -Gregory patch.

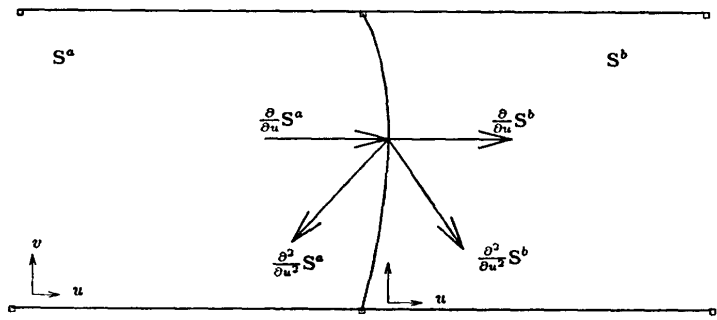


図 4 G^2 連続の条件
Fig. 4 Continuity condition of G^2 -Gregory patch.

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{u^2 P_{ij0} + v^2 P_{ij1}}{u^2 + v^2},$$

$i=1, 2; j=n-1, n-2$ のとき

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{u^2 P_{ij0} + (1-v)^2 P_{ij1}}{u^2 + (1-v)^2},$$

$i=n-1, n-2; j=1, 2$ のとき

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{(1-u)^2 P_{ij0} + v^2 P_{ij1}}{(1-u)^2 + v^2},$$

$i=n-1, n-2; j=n-1, n-2$ のとき

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{(1-u)^2 P_{ij0} + (1-v)^2 P_{ij1}}{(1-u)^2 + (1-v)^2},$$

$i \neq 1, 2, n-1, n-2; j \neq 1, 2, n-1, n-2$ のとき

$$Q_{ij}(u, v) = P_{ij}$$

である。また、 $B_i^n(u)$ 、 $B_j^n(v)$ は、Bernstein 多項式で、次のように表される。

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i. \quad (5)$$

式(4)を各パラメタで微分することによって、各境界における微分ベクトルは独立に定義できることがわかる。

3.2 G^2 連続の判定

図 4 のように、共通の境界曲線を持つ二つのパッチ $S^a(u, v)$ 、 $S^b(u, v)$ があるときに、この二つのパッチが G^2 連続になるためには、まず境界曲線で G^1 連続の条件を満たさなければならない。

二つのパッチが G^1 連続になるための関係式は次のようになる。

$$\frac{\partial S^b(0, v)}{\partial u} = k(v) \frac{\partial S^a(1, v)}{\partial u}. \quad (6)$$

式(6)は、一階境界横断導関数が境界曲線上のすべての点で、同一直線上にあることを示している。さらに、 G^2 連続の条件は、

$$\frac{\partial^2 S^a(0, v)}{\partial u^2} = k(v) \frac{\partial^2 S^a(1, v)}{\partial u^2} + l(v) \frac{\partial S^a(1, v)}{\partial u} \quad (7)$$

となる。ただし、 $k(v)$, $l(v)$ は任意のスカラー関数であるとする。これらの条件式を用いて G^2 -Gregory パッチの接続式を導くことにする。

3.3 G^2 -Gregory パッチ間の接続

式(4)で示されるパッチ式に対して、式(6), 式(7)を適用する。境界を横切る方向に微分したものは、境界曲線を表す制御点と、それにつながっている制御点との関係から導くことができる。図5は、二つのパッチ S^a , S^b が共有する境界曲線につながる制御点間ベクトルを表している。境界曲線上の制御点とその一つ内側の点の間に定義されるベクトルを a_i , b_i ($i=0, \dots, n$), さらに内側の点とつながっている点の間に定義されるベクトルを c_i , d_i ($i=0, \dots, n$) とする。ここで、端点 V_0 , V_1 に対して、式(6)と式(7)を適用すると、次式が得られる。

$$b_0 = k_0 a_0, \quad (8)$$

$$b_n = k_2 a_n, \quad (9)$$

$$d_0 - b_0 = (k_0)^2 (a_0 - c_0) + l_0 a_0, \quad (10)$$

$$d_n - b_n = (k_2)^2 (a_n - c_n) + l_2 a_n. \quad (11)$$

ただし、 k_0 , k_2 , l_0 , l_2 は、実数とする。

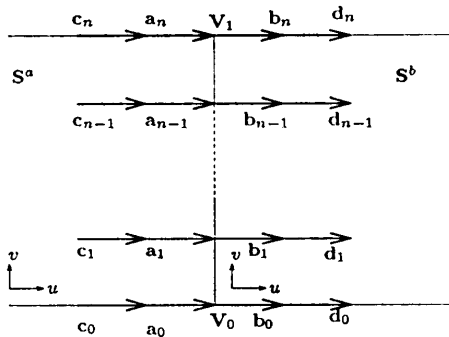


図5 制御点間ベクトル
Fig. 5 Vectors between control points.

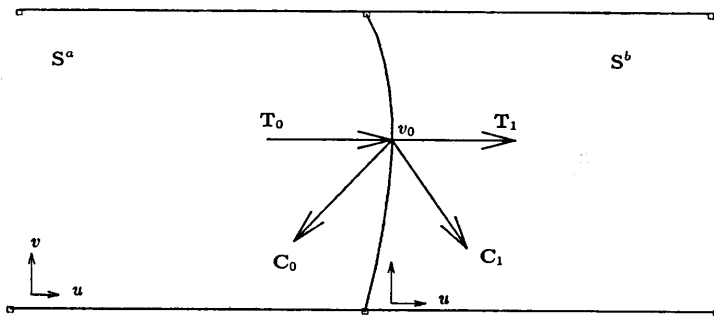


図6 境界曲線上に設定されるベクトル
Fig. 6 Vectors across the boundary curve.

また図6のように、境界曲線上の任意の点 (パラメータ値 v_0) における、一階微分、二階微分ベクトルをそれぞれ、 T_0 , T_1 , C_0 , C_1 とすれば、式(6), 式(7)から

$$T_1 = k(v_0) T_0, \quad (12)$$

$$C_1 = k(v_0)^2 C_0 + l(v_0) T_0 \quad (13)$$

が得られる。以後、境界曲線上の任意の点における一階微分、二階微分ベクトルを、それぞれ一階制御ベクトル、二階制御ベクトルと呼ぶことにする。

ここで、式(8)から式(13)までを満たすために、スカラー関数 $k(v)$, $l(v)$ は、次のような2次式で表す必要がある。

$$k(v) = k_0(1-v)^2 + 2k_1(1-v)v + k_2v^2. \quad (14)$$

$$l(v) = l_0(1-v)^2 + 2l_1(1-v)v + l_2v^2. \quad (15)$$

ただし、 k_0 , k_1 , k_2 , l_0 , l_1 , l_2 は、実数とする。係数 k_0 , k_2 , l_0 , l_2 は、式(8)から式(11)によって決定される。また、係数 k_1 , l_1 は、式(12)と式(13)から求めた $k(v_0)$, $l(v_0)$ から得られる。

ここで、式(6)と式(7)の次数について考えてみる。たとえば、境界曲線が3次の Bézier 曲線でパッチ S^a の次数が3次であるとすれば、一階境界横断導関数、二階境界横断導関数はともに3次の関数として表される。式(6)においては、左辺の次数は3次で、右辺の次数は5次になっている。ここでは、パッチ S^a にパッチ S^b を接続するので、3次のパッチ S^a にパッチ S^b を接続する場合、パッチ S^b の次数は5次になる。このことは、パッチ間を滑らかに接続する場合の対称性がないことを意味している。よって、パッチの一階境界横断導関数 $\partial S^a / \partial u$ が3次式の場合には、これを2次式で表すことができるという拘束条件をつける。この拘束条件によって、境界曲線が3次の Bézier 曲線のときには、左辺の次数はいつも4次になる。同様の議論から、式(7)においても、 $\partial^2 S^a / \partial u^2$ を

2次式で表すことができる、という拘束条件をつけると、左辺は6次の式になる。これらの関係から、境界曲線が3次の Bézier 曲線であるときに、二つの式の最大次数が6次になる。したがって、一階境界横断導関数と二階境界横断導関数を2次式で表すことができるという拘束をつければ、6次の G^2 -Gregory パッチが生成されることになる。一般には、境界曲線が m 次の場合には $m+3$ 次のパッチが生成さ

れる。

上述したように曲線、曲面の次数を考慮し、パッチの接続式を求める。いま生成されるパッチの次数を n 次とする。最初に、式(6)から \mathbf{b}_i を求める。ここで拘束条件は、一階境界横断導関数 $\partial S^0/\partial u$ が $n-2$ 次で表現できることである。よって、

$$\sum_{i=0}^n B_i^*(v)\mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{*-2}(v)\mathbf{a}'_i \quad (16)$$

が成り立つ。この一階境界横断導関数を用いると、内部制御点は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= k_0 \frac{n-2}{n} \mathbf{a}'_1 + 2k_1 \frac{1}{n} \mathbf{a}'_0, \\ \mathbf{b}_i &= k_0 \frac{(n-i)(n-1-i)}{n(n-1)} \mathbf{a}'_i + 2k_1 \frac{(n-i)i}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{i-1} \\ &\quad + k_2 \frac{i(i-1)}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{i-2}, \\ \mathbf{b}_{n-1} &= 2k_1 \frac{1}{n} \mathbf{a}'_{n-2} + k_2 \frac{n-2}{n} \mathbf{a}'_{n-3}. \end{aligned} \quad (17)$$

次に、式(7)から \mathbf{d}_i を求める。ここでの拘束条件は、二階境界横断導関数 $\partial^2 S^0/\partial u^2$ が $n-4$ 次で表現できることである。ここで、 $\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i$ 、 $\mathbf{B}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{b}_i$ ($i=0, \dots, n$) とおくと、

$$\sum_{i=0}^n B_i^*(v)\mathbf{A}_i = \sum_{i=0}^{n-4} B_i^{*-4}(v)\mathbf{A}'_i \quad (18)$$

が成り立つ。したがって内部制御点は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{(n-4)k_0^2}{n} \mathbf{A}'_1 + \frac{4k_0k_1}{n} \mathbf{A}'_0 + \frac{(n-2)l_0}{n} \mathbf{a}'_1 + \frac{2l_1}{n} \mathbf{a}'_0, \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{(n-4)(n-5)k_0^2}{n(n-1)} \mathbf{A}'_2 + \frac{8(n-4)k_0k_1}{n(n-1)} \mathbf{A}'_1 \\ &\quad + \frac{4(k_0k_2 + 2k_1^2)}{n(n-1)} \mathbf{A}'_0 + \frac{(n-2)(n-3)l_0}{n(n-1)} \mathbf{a}'_2 \\ &\quad + \frac{4(n-2)l_1}{n(n-1)} \mathbf{a}'_1 + \frac{2l_2}{n(n-1)} \mathbf{a}'_0, \\ \mathbf{B}_3 &= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)k_0^2}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_3 \\ &\quad + \frac{12(n-4)(n-5)k_0k_1}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_2 \\ &\quad + \frac{12(n-4)(k_0k_2 + 2k_1^2)}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_1 + \frac{24k_1k_2}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_0 \\ &\quad + \frac{(n-3)(n-4)l_0}{n(n-1)} \mathbf{a}'_3 + \frac{6(n-3)l_1}{n(n-1)} \mathbf{a}'_2 \\ &\quad + \frac{6l_2}{n(n-1)} \mathbf{a}'_1, \\ \mathbf{B}_i &= \frac{(n-i)(n-1-i)(n-2-i)(n-3-i)k_0^2}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \mathbf{A}'_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{4i(n-i)(n-1-i)(n-2-i)k_0k_1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \mathbf{A}'_{i-1} \\ &+ \frac{2i(i-1)(n-i)(n-1-i)(k_0k_2 + 2k_1^2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \mathbf{A}'_{i-2} \\ &+ \frac{4i(i-1)(i-2)(n-i)k_1k_2}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \mathbf{A}'_{i-3} \\ &+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)k_2^2}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \mathbf{A}'_{i-4} \\ &+ \frac{(n-i)(n-1-i)l_0}{n(n-1)} \mathbf{a}'_i + \frac{2i(n-i)l_1}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{i-1} \\ &+ \frac{i(i-1)l_2}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{i-2}, \\ \mathbf{B}_{n-3} &= \frac{24k_0k_1}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_{n-4} \\ &\quad + \frac{12(n-4)(k_0k_2 + 2k_1^2)}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_{n-5} \\ &\quad + \frac{12(n-4)(n-5)k_1k_2}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_{n-6} \\ &\quad + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)k_2^2}{n(n-1)(n-2)} \mathbf{A}'_{n-7} \\ &\quad + \frac{6l_0}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{n-3} + \frac{6(n-3)l_1}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{n-4} \\ &\quad + \frac{(n-3)(n-4)l_2}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{n-5}, \\ \mathbf{B}_{n-2} &= \frac{4(k_0k_2 + 2k_1^2)}{n(n-1)} \mathbf{A}'_{n-4} + \frac{8(n-4)k_1k_2}{n(n-1)} \mathbf{A}'_{n-5} \\ &\quad + \frac{(n-4)(n-5)k_2^2}{n(n-1)} \mathbf{A}'_{n-6} + \frac{2l_0}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{n-2} \\ &\quad + \frac{4(n-2)l_1}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)l_2}{n(n-1)} \mathbf{a}'_{n-4}, \\ \mathbf{B}_{n-1} &= \frac{4k_1k_2}{n} \mathbf{A}'_{n-4} + \frac{(n-4)k_2^2}{n} \mathbf{A}'_{n-5} \\ &\quad + \frac{2l_1}{n} \mathbf{a}'_{n-3} + \frac{(n-2)l_2}{n} \mathbf{a}'_{n-4}. \end{aligned} \quad (19)$$

以上の式から \mathbf{B}_i が求まり、その結果 \mathbf{d}_i を求めることができる。

3.4 基礎パッチ法による接続

前節では、隣合う二枚のパッチ間を G^2 連続に接続するための式を示した。しかし、曲線メッシュを自由曲面で内挿する場合には、境界曲線の情報と境界曲線上の一階制御ベクトル、二階制御ベクトルのみが存在するだけで、図5に示されるような制御点間ベクトル $\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i$ ($i=1, \dots, n-1$) は、存在しない。そこで、このような場合には、なんらかの方法で、これらのベクトルを設定しなければならない。われわれは、基礎パッチ法によって、これらのベクトルを設定している。基

礎パッチ法では、二枚のパッチを接続する場合に、その境界曲線上に仮想的な一階境界横断導関数、二階境界横断導関数を設定し、それを使って各パッチの制御点を決定する。二つのパッチ間で同じ一階境界横断導関数、二階境界横断導関数を設定しそれぞれのパッチの制御点を求めることによって、 G^2 連続にパッチを内挿することができる。

以下に、曲線メッシュを内挿する場合の一階境界横断導関数、二階境界横断導関数の決め方を示す。ここでは、境界曲線の次数は3次であるとする。

1. 一階境界横断導関数の決定

図7は、2枚のパッチ S^a , S^b の境界曲線の端点につながる制御点間ベクトルを表している。各曲線の制御点間ベクトルを $p_0, q_0, r_0, s_0, p_1, q_1, r_1, s_1$ とする。ここで、一階境界横断導関数の最低次数を2次と仮定すると、

$$\frac{\partial S^a}{\partial u} = \sum_{i=0}^2 B_i^2(v) a_i \tag{20}$$

のように表される。ただし、 $B_i^2(v)$ は、式(5)で示される Bernstein 多項式である。

ここで、式(20)の項 a_i ($i=0, 2$) を

$$a_0 = \frac{p_0 + q_0}{|p_0 + q_0|} \tag{21}$$

$$a_2 = \frac{p_1 + q_1}{|p_1 + q_1|} \tag{22}$$

とし、さらに図6で示される一階制御ベクトル T_0, T_1 から、

$$a_1 = \frac{T_0 + T_1}{|T_0 + T_1|} - \frac{(B_0^2(v_0)a_0 + B_2^2(v_0)a_2)}{B_1^2(v_0)} \tag{23}$$

を設定する。これは、2次であるので、パッチを生成するときに $n-2$ 次の式に次数を上げる。

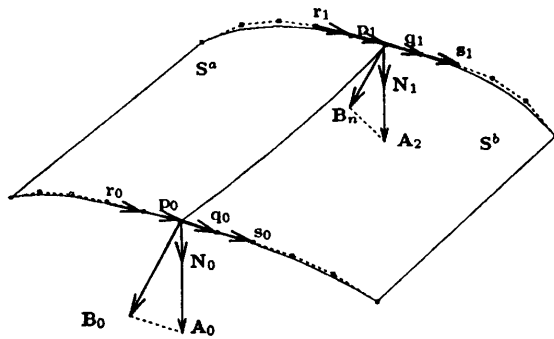


図7 基礎パッチの設定
Fig. 7 Set basis patch.

2. 二階境界横断導関数の決定

式(10)と式(11)から、境界曲線につながる曲線同士が G^2 連続であることがわかる。ここで、二階境界横断導関数の最低次数を2次と仮定すると、

$$\frac{\partial^2 S^a}{\partial u^2} = \sum_{i=0}^2 B_i^2(v) A_i \tag{24}$$

で表される。ただし、 $B_i^2(v)$ は、式(5)で示される Bernstein 多項式である。

図7から、端点 V_0 につながっている曲線の曲率の方向ベクトル N_0 は、

$$N_0 = \frac{(p_0 \times (p_0 - r_0)) \times p_0}{|(p_0 \times (p_0 - r_0)) \times p_0|}$$

で表される。ここで、式(24)の項 A_0 を次のように設定する。

$$A_0 = \frac{(B_0 \cdot N_0)}{k_0^2} N_0 \tag{25}$$

同様に、頂点 V_1 の周りでは、 A_2 を

$$A_2 = \frac{(B_2 \cdot N_1)}{k_2^2} N_1 \tag{26}$$

のように設定する。また、図6に示される二階制御ベクトル C_0, C_1 から、

$$N' = \frac{(T_0 \times (T_0 - C_0)) \times T_0}{|(T_0 \times (T_0 - C_0)) \times T_0|} \tag{27}$$

が得られる。よって、項 A_1 は、次のような式から導くことができる。

$$A_1 = \frac{\frac{(C_1 \cdot N')}{k(v_0)^2} N' - (B_0^2(v_0)A_0 + B_2^2(v_0)A_2)}{B_1^2(v_0)} \tag{28}$$

式(24)は2次式なので、パッチを生成するときに $n-4$ 次の式に次数を上げる。

以上のように、一階境界横断導関数と二階境界横断導関数を設定し、式(12)と式(13)を次のように置き換える。

$$T_1 = k(v_0) \sum_{i=0}^2 B_i^2(v_0) a_i \tag{29}$$

$$C_1 = k(v_0)^2 \sum_{i=0}^2 B_i^2(v_0) A_i + l(v_0) \sum_{i=0}^2 B_i^2(v_0) a_i \tag{30}$$

その後、式(17)から式(19)までの式を使って、制御点を生成することができる。

4. G^2 -Gregory パッチの制御点

図3は、双6次の G^2 -Gregory パッチの制御点を表している。境界曲線を表している制御点はパッチの境界を表している制御点と一致している。内部制御点は

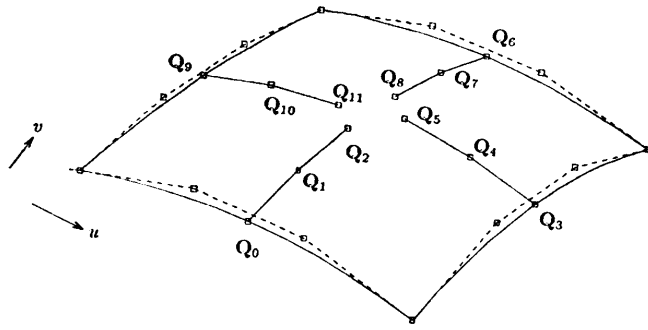


図 8 G^1 -Gregory パッチの制御点
Fig. 8 New control point layout of G^1 -Gregory patch.

3章で説明したような方法によって生成される。パッチの境界を表す制御点を動かすことによって曲面形状を変形することは容易である。これは、境界曲線の形状と制御点との関係が、Bézier 曲線の形状変形と同様に明確であるからである。しかし、内部制御点では、たしかにこれらの点を動かすことによって形状は変形されるが、形状と制御点との関係が明確ではない。さらに内部制御点は隣接するパッチとの接続を考慮して生成されているので、一方のパッチの内部制御点のみを動かすことはできない。つまり、これらの点は形状を定義している定義点であり設計者が形状変形のために動かすことのできない点である。よってわれわれはこれらの点を定義点と呼ぶことにする。

われわれの内挿法では、境界曲線上の任意の点における一階制御ベクトルと二階制御ベクトルを指定することができる。これらのベクトルは内挿されたパッチの境界上の点における微分ベクトルになる。よって、これらのベクトルを設計者が指定できれば曲面形状を容易に変形することができる。図 8 は、われわれが提案する制御点を表している。境界曲線を表す制御点は定義点と一致している。しかし、一階制御ベクトル、二階制御ベクトルを表す内部制御点は 12 点で表される。たとえば、点 Q_0 は、境界曲線上のパラメタ値 $u=0.5$ における、境界曲線上の点を表している。また、点 Q_0, Q_1 で表される一階制御ベクトルは、パラメタ値 0.5 における一階微分ベクトルを表している。さらに、点 Q_0, Q_1, Q_2 で表される二階制御ベクトルはパラメタ値 0.5 における二階微分ベクトルを表している。この他の点も同様の方法で定義点から計算される。このような制御点によって形状と制御点の関係が明確になる。つまり、制御点 $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ から定義される 5 次の曲線を考えてみる。この曲線は曲面上のパラメタ値 $u=0.5$ における断面形状と似たような

曲線である。パラメタ値 $v=0.5$ においても同様の曲線が定義できる。これらの曲線の制御点を自由に動かすことによって曲線形状を変形でき、曲面形状を変形するための手助けとなる。これらの曲線形状の変形は Bézier 曲線の形状変形になるので、設計者は直観的に曲面形状を変形することが可能となる。

5. G^2 -Gregory パッチの形状制御

4章で述べたような制御点を用いて、自由曲面の形状を変形する方法について述べる。これらの制御点は、境界曲線上のパラメタ値 0.5 の点における接ベクトルと曲率ベクトルを表している。設計者は、一階制御ベクトルと二階制御ベクトルを各境界ごとに指定することによって、曲面形状を変形することができる。よって、本章では、これらのベクトルを用いた曲面形状の変形方法について説明する。

5.1 一階制御ベクトルによる形状制御

一階制御ベクトルは曲面の境界曲線を横断するようなベクトルである。これは境界曲線にそった方向の一階微分ベクトルと共に曲面の接平面を表している。設計者はこのベクトルを動かすことによって、曲面の境界曲線における接平面を制御することができる。例えば、図 9 に示される制御点 Q_0, Q_1 によって得られるベクトルを \vec{d} だけ動かすことによって制御点 Q_1 の位置を変える。この操作で、境界曲線上の点 Q_0 における接平面の方向が変わる。ここで、新たに指定された一階制御ベクトルを用いて、パッチを生成し直すことによって、曲面形状は変形される。このとき、隣接するパッチが G^2 連続のときには、境界における連続性を保つために、制御点 Q_3 を式 (6) を満たすように新しい接平面上に移動しなければならない。また、制御点 Q_1 を動かすことによって、点 Q_0 における曲率ベ

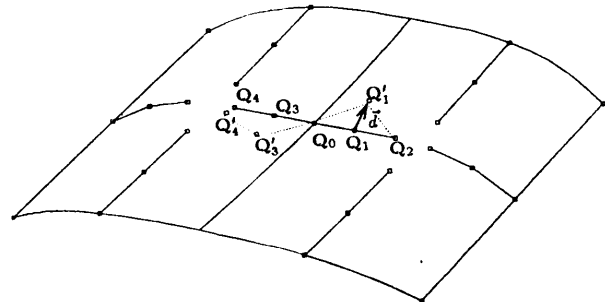


図 9 一階制御ベクトルによる形状制御
Fig. 9 Shape control using 1st control vector.

クトルが変化している。接平面の変更は、曲面形状に大きく影響するので、これまで設定されていた二階制御ベクトルは、再設定する必要がある。ここでは、これまで点 Q_0 における曲率を定義していた制御点 Q_2 は、境界曲線の情報から補間しなおすことにする。隣接する制御点 Q_4 は、式(7)を満たすように設定しなおせばよい。

上述したように、一階制御ベクトルを任意の方向に移動する場合には、隣接するパッチとの連続性を保つために隣接するパッチの制御点も同時に更新する必要がある。

5.2 二階制御ベクトルによる形状制御

二階制御ベクトルを用いた形状制御方法は、いくつか考えられる。ここでは、境界上のパラメタ値 0.5 における曲率を指定した場合の形状制御について述べる。

一階制御ベクトルと二階制御ベクトルを設定した点における曲率ベクトルは、式(31)で表される。一階制御ベクトルと二階制御ベクトルから定義される曲線の次数は5次なので、

$$T = 5(Q_1 - Q_0),$$

$$C = 20(Q_2 - 2Q_1 + Q_0)$$

とすれば、

$$Kn = \frac{(C \cdot n)n}{|T|^2} \tag{31}$$

となる。ただし、 K は曲率、 n は単位法線ベクトルとする。接線ベクトル T を固定すれば曲率ベクトルの方向 n は変わらない。よって、移動できる制御点は Q_2 だけになる。これは、曲率ベクトルの大きさは、変更できるが方向は変更できないことを意味する。曲率ベクトルの方向は、一階制御ベクトルの方向を変えることによって変更することができる。

図10は、式(31)のベクトルの関係を示している。

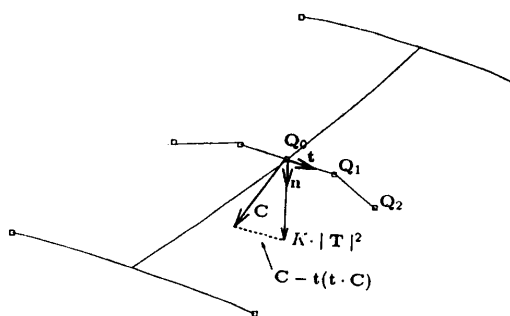


図10 二階制御ベクトルによる形状制御
Fig. 10 Shape control using 2nd control vector.

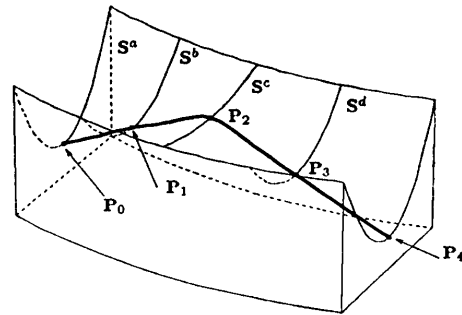


図11 大域的な形状制御
Fig. 11 Global shape control.

曲率ベクトルが指定されている場合、制御点 Q_2 は、 $C-t(t \cdot C)$ で定義される直線上の任意の点をとることができる。よって、ここでは、ベクトル C と n とのなす角を変えないという拘束条件をつける。これによって、点 Q_0 における曲率を指定した場合には、制御点 Q_2 は、一意に決まる。

この操作によって、境界上の点における曲率を指定することで、曲面形状を変形することが可能である。

5.3 大域的な形状制御

上で説明した二つの操作によって、曲面形状を局所的に変形し、歪みを補正することができる。しかし、歪みが複数の曲面にまたがっているときには、局所的に形状を変形するのは手間がかかる。このような場合には、複数のパッチをひとまとまりの曲面として考えて一度に形状を変形するほうが形状変形が容易である。図11は、歪みのあるパッチ S^a, S^b, S^c, S^d を示している。このような場合には、各パッチの境界曲線上の点 $P_i (i=0, \dots, 4)$ を通過するような G^2 連続な曲線を生成し、その曲線をガイドとして一階制御ベクトル、二階制御ベクトルを境界曲線に指定すればよい。その後、曲面を内挿しなおすことで、歪みを補正することができる。

6. G^2 -Gregory パッチの生成例

図12は、従来の手法で内挿された曲面の制御点と断面線を示している。まず、制御点 Q_1 を動かして、点 Q_0 における接平面を変更する。この操作によって、曲面形状が変形される。図13は、変形された曲面の制御点と断面線を示している。この図から、形状が変形されていることがわかる。

さらに図14は、図13の制御点 Q_0 における曲率をゼロにし、形状を変形した例である。 Q_0 につながっている制御点が一直線になっているので、この点にお

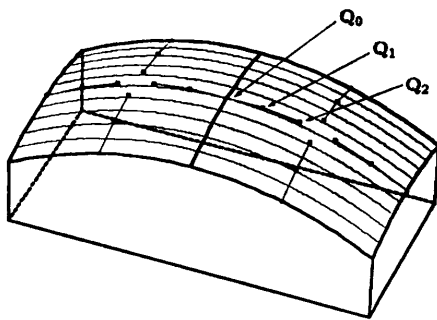


図 12 変形前の曲面形状
Fig. 12 Original surface shape.

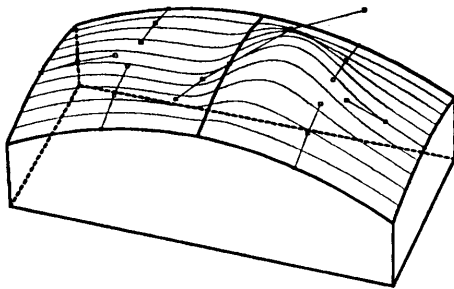


図 13 一階制御ベクトルによる形状の変形例
Fig. 13 Example of shape control using 1st control vector.

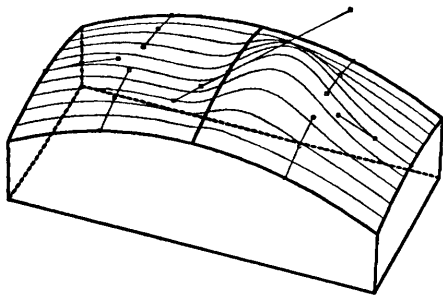


図 14 二階制御ベクトルによる形状の変形例
Fig. 14 Example of shape control using 2nd control vector.

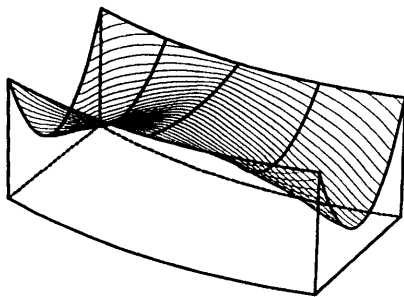


図 15 大域的制御による形状の変形例
Fig. 15 Example of global shape control.

ける曲率がゼロになっていることがわかる。

図 15 は、大域的な形状制御によって歪みを補正したパッチの断面線を示している。図 1 と比べると歪みが補正されていることがわかる。

7. おわりに

本論文では、 G^2 連続な曲線メッシュを G^2 -Gregory パッチで内挿する方法を示した。 G^2 -Gregory パッチは、境界曲線における一階境界横断導関数と二階境界横断導関数を独立に定義できる。よって、曲線メッシュが不規則な場合でも G^2 連続に内挿することができる。

われわれの内挿法では、境界曲線上の任意の点における一階制御ベクトルと二階制御ベクトルを指定する。 G^2 -Gregory パッチを生成するときには、これらのベクトルが指定された点における一階微分ベクトルと二階微分ベクトルとなる。よって、従来曲線メッシュのみからパッチを生成していた場合に比べて、より複雑な曲面形状を生成することができるようになった。

また、一階制御ベクトル、二階制御ベクトルを基本にした新しい制御点のレイアウトを提案した。これらの制御点を使った曲面形状の変形方法について述べた。設計者は、これらの制御点を動かすことによって、境界曲線の形状を変形しないで曲面形状を変形することが可能となるので、曲面形状を微妙に変更する場合には非常に有効である。

本論文で述べた曲面形状の制御方法を、リコーで開発しているソリッドモデラ DESIGNBASE にインプリメントし、その効果を確認した。

謝辞 本研究を行う上で、多大なご指導、ご援助をいただいた(株)リコーソフトウェア事業部 國井秀子 事業部長に深謝いたします。

参考文献

- 1) Chiyokura, H.: Localized Surface Interpolation for Irregular Meshes, *Advanced Computer Graphics (Proc. Computer Graphics Tokyo '86)*, Kunii, T. L. ed., pp. 3-19, Springer-Verlag, Tokyo (1986).
- 2) Chiyokura, H.: *Solid Modelling with DESIGNBASE*, Addison-Wesley, Reading, MA (1988).
- 3) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, San Diego, California (1988).
- 4) Faux, I. D. and Pratt, M. J.: *Computational*

Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood Limited, London (1979).

- 5) Konno, K. and Takamura, T. and Chiyokura, H.: A New Control Method for Free-Form Surfaces with Tangent Continuity and Its Applications, *Scientific Visualizations of Physical Phenomena (Proc. CGI '91)*, Patrikalakis, N. M. ed., pp. 435-456, Springer-Verlag, Hong Kong (1991).
- 6) Rogers, D.F. and Adams, J. A.: *Mathematical Elements for Computer Graphics*, Second ed., McGraw-Hill, New York (1990).
- 7) Piegl, L.: On NURBS: A Survey, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 11, No. 1, pp. 55-71 (1991).
- 8) Sarraga, R. F.: G^1 Interpolation of Generally Unrestricted Cubic Bézier Curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, No. 1-2, pp. 23-39 (1987).
- 9) Takai, K. and Wang, K.K.: Curvature Continuous Gregory Patch: A Modification of Gregory Patch for Continuity of Curvature, *Proceedings of the Japan-U. S. A. Symposium on Flexible Automation*, ASME, pp. 1205-1211 (1990).
- 10) Takai, K. and Wang, K.K.: C^2 Gregory Patch, *EUROGRAPHICS 91*, Post, F. H. and Barth, W. eds., pp. 481-492, North-Holland, Amsterdam (1991).

(平成3年10月30日受付)
(平成4年7月10日採録)

今野 晃市

昭和37年11月4日生。昭和60年筑波大学第三学群情報学類卒業。

(株)リコーソフトウェア事業部に勤務。ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。レンダリングアルゴリズム, 自由曲面の生成手法, 曲線・曲面の形状制御などに興味をもつ。

高村 禎二 (正会員)

昭和35年2月21日生。昭和57年東京大学理学部情報科学科卒業。

(株)リコーソフトウェア事業部に在り, ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。レイトレーシング, 自由曲面間の干渉計算, 曲面の内挿, 曲線・曲面の形状制御などに興味を持つ。理学博士。ACM, IEEE 各会員。

千代倉弘明 (正会員)

昭和29年4月11日生。昭和54年慶応義塾大学工学部数理工学科卒業。昭和56年同大学修士課程修了。

昭和59年東京大学工学部精密機械博士課程修了。同年, (株)リコーに

入社。ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。平成2年慶応義塾大学環境情報学部助教授。著書に「ソリッドモデリング」(工業調査会), 「Solid Modelling with DESIGNBASE」(Addison-Wesley), 「3次元 CAD の基礎と応用」(共立出版)がある。ACM 会員。