Vol. 33 No. 10 情報処理学会論文誌 Oct. 1992

複素変数 z のエアリー関数 $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ の数値計算†

吉田 年雄††

複素変数 z のエアリー関数 $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, および, その微分 $\mathrm{Ai}'(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ の能率的な数値計算法を提案している. $|z|$ が小さい値の場合には, テイラー展開を用い, $|z|$ が大きい値の場合には漸近展開を用いる. $|z|$ が中間の値の場合には, 変数が $\zeta=(2/3)z^{3/2}$ の第1種変形ベッセル関数 $I_{\pm 1/3}(\zeta)$, $I_{\pm 2/3}(\zeta)$ を漸化式を用いる方法により計算し, 次式

$$\mathrm{Ai}(z)=(\sqrt{z}/3)[I_{-1/3}(\zeta)-I_{1/3}(\zeta)]$$
$$\mathrm{Bi}(z)=\sqrt{z/3}[I_{-1/3}(\zeta)+I_{1/3}(\zeta)]$$
$$\mathrm{Ai}'(z)=-(z/3)[I_{-2/3}(\zeta)-I_{2/3}(\zeta)]$$
$$\mathrm{Bi}'(z)=(z/\sqrt{3})[I_{-2/3}(\zeta)+I_{2/3}(\zeta)]$$

により関数値を求める. 第1種ベッセル関数の計算においては, 桁落ち, 解析接続の観点から, 適当な工夫, 注意が必要であることを述べている. また, ある ζ の領域では, 上式の減算において, 桁落ちが生ずるので, そこでは,

$$\mathrm{Ai}(z)=\pi^{-1}\sqrt{z/3}K_{1/3}(\zeta)$$
$$\mathrm{Ai}'(z)=-\pi^{-1}(z/\sqrt{3})K_{2/3}(\zeta)$$

により, 第2種変形ベッセル関数 $K_{1/3}(\zeta)$ および $K_{2/3}(\zeta)$ の計算に帰着させる. この第2種変形ベッセル関数の計算には, 微分方程式の一解法である C. Lanczos の τ 法を適用する.

1. はじめに

複素変数 z のエアリー関数 $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, および, その微分 $\mathrm{Ai}'(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ の計算法としては, Z. Schulten, D.G.M. Anderson および R.G. Gordon の数値積分を用いた方法[1]が報告されている. 本論文では, テイラー展開による方法, 漸化式を用いる方法[2] および C. Lanczos の τ 法[3]を領域により使い分けることにより, 与えられた z に対して, エアリー関数 $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, および, その微分 $\mathrm{Ai}'(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ を, 同時に, 能率的に計算する方法を提案する.

$\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$ は微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}-zw=0 \tag{1}$$

の1次独立な解である. 原点 $z=0$ は正則点であり, その点まわりのテイラー展開[4]は次式にて与えられる.

$$\mathrm{Ai}(z)=c_f f(z)-c_g g(z) \tag{2}$$

$$\mathrm{Bi}(z)=\sqrt{3}(c_f f(z)+c_g g(z)) \tag{3}$$

ただし,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)z^{3k}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(3k)!} \tag{4}$$

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}3^k\frac{\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)z^{3k+1}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(3k+1)!} \tag{5}$$

$$c_f=3^{-2/3}/\Gamma(2/3),\quad c_g=3^{-1/3}/\Gamma(1/3) \tag{6}$$

である.

本論文では, 次の関係式

$$\overline{\mathrm{Ai}(z)}=\mathrm{Ai}(\bar{z}),\quad \overline{\mathrm{Bi}(z)}=\mathrm{Bi}(\bar{z}) \tag{7}$$

を考慮して, z は複素平面の上半面 $(0\leq\arg z\leq\pi)$ に限定することにする.

2. ベッセル関数による表現

次式で与えられる変数変換

$$\zeta=\frac{2}{3}z^{3/2} \tag{8}$$

を用いると, $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$ は,

$$\mathrm{Ai}(z)=(\sqrt{z}/3)[I_{-1/3}(\zeta)-I_{1/3}(\zeta)] \tag{9}$$

$$=\pi^{-1}\sqrt{z/3}K_{1/3}(\zeta) \tag{10}$$

$$\mathrm{Bi}(z)=\sqrt{z/3}[I_{-1/3}(\zeta)+I_{1/3}(\zeta)] \tag{11}$$

と表される[4]. ここで, $I_\nu(\zeta)$ は ν 次の第1種変形ベッセル関数, $K_\nu(\zeta)$ は ν 次の第2種変形ベッセル関数

---

† Computation of Airy Functions $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$ and $\mathrm{Bi}'(z)$ with Complex Argument z by TOSHIO YOSHIDA (College of Business Administration and Information Science, Chubu University).

†† 中部大学経営情報学部経営情報学科

である．Ai′(z), Bi′(z) については，

$$\mathrm{Ai}'(z)=-(z/3)[I_{-2/3}(\zeta)-I_{2/3}(\zeta)] \qquad (12)$$

$$=-\pi^{-1}(z/\sqrt{3})K_{2/3}(\zeta) \qquad (13)$$

$$\mathrm{Bi}'(z)=(z/\sqrt{3})[I_{-2/3}(\zeta)+I_{2/3}(\zeta)] \qquad (14)$$

と表される[4]．

3. 漸近展開式

式(1)の不確定特異点 $z=\infty$ まわりの展開式，すなわち漸近展開式は，2章でのベッセル関数による表式を，ベッセル関数の漸近展開式[5]で表せば得られる．

$$\mathrm{Ai}(z)\sim\frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{-1/4}e^{-\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\zeta^{-k} \quad (|\arg z|<\pi) \qquad (15)$$

$$\mathrm{Ai}(-z)\sim\pi^{-1/2}z^{-1/4}\left[\cos\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{2k}\zeta^{-2k}-\sin\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right] \quad (|\arg z|<2\pi/3) \qquad (16)$$

$$\mathrm{Bi}(z)\sim\pi^{-1/2}z^{-1/4}\left[e^{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k\zeta^{-k}+\frac{i}{2}e^{-\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\zeta^{-k}\right] \quad (-\pi/3<\arg z<\pi) \qquad (17)$$

$$\mathrm{Bi}(-z)\sim-\pi^{-1/2}z^{-1/4}\left[\sin\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{2k}\zeta^{-2k}+\cos\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right] \quad (|\arg z|<2\pi/3) \qquad (18)$$

$$\mathrm{Ai}'(z)\sim-\frac{1}{2}\pi^{-1/2}z^{1/4}e^{-\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}d_k\zeta^{-k} \quad (|\arg z|<\pi) \qquad (19)$$

$$\mathrm{Ai}'(-z)\sim\pi^{-1/2}z^{1/4}\left[\sin\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_{2k}\zeta^{-2k}+\cos\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right] \quad (|\arg z|<2\pi/3) \qquad (20)$$

$$\mathrm{Bi}'(z)\sim\pi^{-1/2}z^{1/4}\left[e^{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_k\zeta^{-k}-\frac{i}{2}e^{-\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}d_k\zeta^{-k}\right] \quad (-\pi/3<\arg z<\pi) \qquad (21)$$

$$\mathrm{Bi}'(-z)\sim\pi^{-1/2}z^{1/4}\left[\cos\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_{2k}\zeta^{-2k}-\sin\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_{2k+1}\zeta^{-2k-1}\right] \quad (|\arg z|<2\pi/3) \qquad (22)$$

ただし，

$$c_k=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)}{k!2^k\Gamma\left(\frac{5}{6}-k\right)} \qquad (23)$$

$$d_k=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}+k\right)}{k!2^k\Gamma\left(\frac{7}{6}-k\right)} \qquad (24)$$

である．

4. 計　算　法

本論文では，相対精度 10^{-8} 用と 10^{-18} 用（以下，それぞれ，8D 用，18D 用と略す）のプログラムの作成のための計算法を与える．

4.1 |z| が小さい値の場合の計算法

$|z|$ が小さいときには，$z=0$ のまわりのテイラー展開(2)，(3)，および，その微分形を用いればよい．ここでは，

$$|z|\leq 0.5 \qquad (25)$$

のときに，それらにより計算することにする．

4.2 |z| が大きい値の場合の計算法

$|z|$ が大きいときには，漸近展開式を利用すればよい．ここでは，8D 用では，

$$|z|\geq 18.5^{2/3} \quad (|\zeta|\geq 9), \qquad (26)$$

18D 用では，

$$|z|\geq 31.5^{2/3} \quad (|\zeta|\geq 21) \qquad (27)$$

において，漸近展開式を用いることにする．ただし，$0\leq\arg z\leq 2\pi/3$ では，式(15)，(17)，(19)，(21)を用い，$2\pi/3<\arg z\leq\pi$ では，式(16)，(18)，(20)，(22)を用いることにする．ただし，漸近展開式の級数の部分に対して，その和は，8D では 10^{-8} 以下，18D では 10^{-18} 以下の絶対値の項が現れるまで加えることにする（上述の $|z|$ の領域では，このような項は必ず存在する．）

4.3 |z| が中間の値の場合の計算法

残りの領域では，2章で記したベッセル関数による表現を用いる．変数が $\zeta=(2/3)z^{3/2}$ の第1種変形ベッセル関数 $I_{\pm 1/3}(\zeta)$，$I_{\pm 2/3}(\zeta)$ を，4.3.1 項で述べるように，漸化式を用いる方法により計算し，式(9)，(11)，(12)，(14)により関数値を求める．ただし，式(9)および(12)では，ある ζ の領域では，その右辺の減算において桁落ちが生ずるので，そこでは式(10)および(13)により，第2種変形ベッセル関数 $K_{1/3}(\zeta)$ および

$K_{2/3}(\zeta)$ の計算に帰着させる．その計算については，4.3.2 項で述べる．また $\arg z$ は，$0\le\arg z\le\pi$ に限定しているので，式(8)より，$\arg\zeta$ は $0\le\arg\zeta\le3\pi/2$ に限定することになる．

4.3.1 漸化式を用いる方法

$I_{1/3}(\zeta)$, $I_{-1/3}(\zeta)$, $I_{2/3}(\zeta)$ および $I_{-2/3}(\zeta)$ の計算について考える．以下では，1/3 あるいは 2/3 の値を便宜的に ν で表すことにする．$I_\nu(\zeta)$ に対して，漸化式を用いる方法[2),6)]を適用する．そのとき以下で示すように，適当な工夫および注意が必要である．変形ベッセル関数 $I_\mu(\zeta)$ は，漸化式

$$G_{\mu-1}(\zeta)=\frac{2\mu}{\zeta}G_\mu(\zeta)+G_{\mu+1}(\zeta) \tag{28}$$

を満足する．Mを適当な大きさの正の整数，また $\alpha(\neq0)$ を任意定数とし，

$$G_{\nu+M+1}(\zeta)=0,\quad G_{\nu+M}(\zeta)=\alpha \tag{29}$$

を出発値として，漸化式(28)を繰り返し用い，$G_{\nu+k}(\zeta)$ $(0\le k\le M-1)$ を求めると，ある $N(\ll M)$ に対して，$0\le n\le N$ のとき，

$$G_{\nu+n}(\zeta)\sim\xi I_{\nu+n}(\zeta) \tag{30}$$

なる比例関係が成り立つ．この比例定数 ξ は展開式[7)]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+k)\Gamma(2\nu+k)}{k!}I_{\nu+k}(\zeta)=\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu e^\zeta \tag{31}$$

によって，

$$\xi\sim\xi_M \tag{32}$$

として求められる．ただし，

$$\xi_M=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu}e^{-\zeta}\sum_{k=0}^{M}\frac{(\nu+k)\Gamma(2\nu+k)}{k!}G_{\nu+k}(\zeta) \tag{33}$$

である．この ξ_M を用いれば，$I_{\nu+n}(\zeta)$ は，

$$I_{\nu+n}(\zeta)\sim G_{\nu+n}(\zeta)/\xi_M \tag{34}$$

により計算することができる．ここで注意しなければならないことは，上式は $0\le\arg\zeta\le\pi/2$ において有効であるということである．$\pi/2<\arg\zeta\le3\pi/2$ では，式(33)の和の計算では $|\zeta|$ の小さいときを除いて桁落ちを起こす．そのため，そこでは，式(31)の代わりに，別の展開式[7)]

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu+k)\Gamma(2\nu+k)}{k!}I_{\nu+k}(\zeta)=\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu e^{-\zeta} \tag{35}$$

を用いれば，$I_{\nu+n}(\zeta)$ は，

$$I_{\nu+n}(\zeta)\sim G_{\nu+n}(\zeta)/\xi'_M \tag{36}$$

により，桁落ちなしに計算することができる．ただし，

$$\xi'_M=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu}e^{\zeta}\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{(\nu+k)\Gamma(2\nu+k)}{k!}G_{\nu+k}(\zeta) \tag{37}$$

である．なお，式(36)に対して，実際のプログラミングでは，$(\zeta/2)^\nu$ の計算に注意を払わなければならない．与えられた z に対して，$\zeta=(2/3)z^{3/2}$ の計算値を ν 乗すると，$\arg z=(2/3)\pi$ で解析接続が崩れる．それを避けるために，$(\zeta/2)^\nu=(1/3^\nu)z^{3\nu/2}$ であることに注目して，z を $3\nu/2$ 乗するという形で計算を行うことが必要である．

このようにして，$I_\nu(\zeta)$ が計算できる．$N\ge1$ ならば，$I_{\nu+1}(\zeta)$ も求められ，漸化式

$$I_{\nu-1}(\zeta)=\frac{2\nu}{\zeta}I_\nu(\zeta)+I_{\nu+1}(\zeta) \tag{38}$$

より，$I_{\nu-1}(\zeta)$ を求めることができる．ν の2通りの場合について，漸化式を用いる方法を適用すれば，$\nu=1/3$ の場合には，$I_{1/3}(\zeta)$ と $I_{-2/3}(\zeta)$ が求められ，$\nu=2/3$ の場合には，$I_{2/3}(\zeta)$ と $I_{-1/3}(\zeta)$ が求められることになる．

［桁落ちの有無］

以上のようにして，$I_\nu(\zeta)$ と $I_{-\nu}(\zeta)$ の値を求めることができる．ここで，式(9)，(11)，(12)および(14)の右辺の2項の加算あるいは減算において，桁落ちの有無を調べよう．

$I_\nu(\zeta)$ の漸近展開式[5)]は，2つの級数の和で表されるが，それぞれの初項のみ考えると，$-\pi/2<\arg z<3\pi/2$ では，

$$I_\nu(\zeta)\sim e^\zeta/(2\pi\zeta)^{1/2}+e^{-\zeta+(1/2+\nu)\pi i}/(2\pi\zeta)^{1/2} \tag{39}$$

となる．これは，関数 $I_\nu(\zeta)$ に対して，$|\zeta|$ の大きいときの大まかな様子を示している．$0\le\arg\zeta<\pi/2$ では，上式第1項が主要項であり，減算 $I_{-\nu}(\zeta)-I_\nu(\zeta)$ では桁落ちの可能性があるが，加算 $I_{-\nu}(\zeta)+I_\nu(\zeta)$ では桁落ちはない．$\pi/2<\arg\zeta<3\pi/2$ では，上式第2項が主要項になるので，加算 $I_{-\nu}(\zeta)+I_\nu(\zeta)$ および減算 $I_{-\nu}(\zeta)-I_\nu(\zeta)$ で桁落ちは生じない．

具体的に，数値実験により，10進1桁以上の桁落ちが生ずる ζ の範囲を調べると，桁落ちは，加算 $I_{-\nu}(\zeta)+I_\nu(\zeta)$ では予想どおり現れず，減算 $I_{-\nu}(\zeta)-I_\nu(\zeta)$ で，ζ 平面の線分 $\mathrm{Re}(\zeta)=1.4$ 付近より右の部分で生ずることが分かった．そこで，本方法は，

$$\mathrm{Re}(\zeta)\le1.4 \tag{40}$$

において用いることにする．

このようにして，$\mathrm{Bi}(z)$, $\mathrm{Bi}'(z)$ を計算することがで

き，また，式(40)の領域では，$\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$ を計算することができる．

［M の与え方］

文献 8) の誤差評価式(31)を用いて，$I_{1/3}(\zeta)$ および $I_{2/3}(\zeta)$ を所要の精度（10進 p 桁の精度）で計算するための式(29)の M を求めよう．

$$|\Phi_{\nu,m}(\zeta)|<0.5\times10^{-p} \tag{41}$$

を満足する最小の m を M_ν とする．ただし，$0<\arg\zeta\le\pi/2$ では，

$$\Phi_{\nu,m}(\zeta)=\frac{\Gamma(2\nu+m+1)\Gamma(\nu+1)}{(m+1)!\,\Gamma(2\nu+1)e^{\zeta}K_{\nu+m+1}(\zeta)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu} \tag{42}$$

であり，$\pi/2<\arg\zeta\le3\pi/2$ では，

$$\Phi_{\nu,m}(\zeta)=\frac{\Gamma(2\nu+m+1)\Gamma(\nu+1)}{(m+1)!\,\Gamma(2\nu+1)e^{-\zeta}K_{\nu+m+1}(-\zeta)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu}e^{-\nu\pi i} \tag{43}$$

である．そのとき，式(29)の M を，

$$M=\max(M_{1/3},\ M_{2/3}) \tag{44}$$

とすれば，$I_{1/3}(\zeta)$ および $I_{2/3}(\zeta)$ は，少なくとも10進 p 桁の精度で計算できることになる．この2つの関数を所要の精度で，なるべく速く計算するためには，あらかじめ，いろいろな ζ の点で計算された M を基にして，M を ζ の実部および虚部の簡単な関数として近似式を作成しておき，実際の計算ではその近似式を計算することにより M の値を求めるとよい．式(44)の M は，$0\le\arg z\le\pi$ において正の虚軸に関して対称であり，$\pi/2\le\arg z\le3\pi/2$ において負の実軸に関して対称であるので，

$$x=|\mathrm{Re}(\zeta)| \text{ および } y=|\mathrm{Im}(\zeta)| \tag{45}$$

を変数とした近似式を考えることにする．

次に，実際に作成した近似式を示す．

［1］ 8D 用

$0\le x<9$, $0\le y<9$ で，

$$M=(-0.123x+1.67)y+1.22x+9.9 \tag{46}$$

［2］ 18D 用

$0\le x\le10$, $0\le y\le10$ では，

$$M=(-0.16x+2.3)y+1.8x+16.9 \tag{47}$$

$0\le x\le10$, $10<y<21$ では，

$$M=(-0.0545x+1.73)y+0.845x+21.6 \tag{48}$$

$10<x<21$, $0\le y<10$ では，

$$M=(-0.0364x+1.06)y+1.18x+23.1 \tag{49}$$

$10<x<21$, $10<y<21$ では，

$$M=(-0.0413x+1.6)y+1.23x+17.8 \tag{50}$$

4.3.2 τ 法

式(40)以外の領域では，$\mathrm{Ai}(z)$ および $\mathrm{Ai}'(z)$ に対して，式(9)および式(12)の右辺はそのまま減算を行うと桁落ちを生ずるので，そこでは，式(10)および式(13)に注目する．$K_\nu(\zeta)$ ($\nu=1/3$ または $2/3$) は，

$$K_\nu(\zeta)=\left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{1/2}e^{-\zeta}f_\nu\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{51}$$

と置くと，$f_\nu(t)$ は，微分方程式

$$t^2f_\nu''(t)+2(t+1)f_\nu'(t)-\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)f_\nu(t)=0 \tag{52}$$

を満足する ($t=1/\zeta$)．上式に，以下に述べる τ 法[3),9)]を適用し，$f_\nu(t)$ に対する近似式を作り，式(51)により $K_\nu(\zeta)$ を計算することにしよう．複素平面の $t=0$ と $t=\eta$ を結ぶ直線上での近似を行うために，式(52)の右辺に，$\tau_mP_m^*(t/\eta)$ を加えた形の式

$$t^2f_{\nu m}''(t)+2(t+1)f_{\nu m}'(t)-\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)f_{\nu m}(t)=\tau_mP_m^*(t/\eta) \tag{53}$$

を考える．ただし，$P_m^*(t)$ は，ずらしルジャンドル多項式

$$P_m^*(t)=\sum_{k=0}^{m}P_{mk}^*t^k=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\frac{(m+k)!}{(k!)^2(m-k)!}t^k \tag{54}$$

である．式(53)は，次の形の m 次の多項式を特解としてもつ．

$$f_{\nu m}(t)=-\tau_m\sum_{k=0}^{m}\frac{P_{mk}^*\sum_{l=0}^{k}a_lt^l}{2(k+1)a_{k+1}\eta^k} \tag{55}$$

ただし，

$$a_0^{(\nu)}=1$$

$$a_k^{(\nu)}=\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\cdots(4\nu^2-(2k-1)^2)}{k!\,8^k}\quad(k\ge1) \tag{56}$$

である．$f_\nu(0)=1$ であるので，初期条件として，$f_{\nu m}(0)=1$ を採用すると，τ_m は，

$$\tau_m=-\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P_{mk}^*}{2(k+1)a_{k+1}^{(\nu)}\eta^k}} \tag{57}$$

と決められ，$0\le t\le\eta$ での $f_\nu(t)$ の近似式

$$f_{\nu m}(t)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P_{mk}^*\sum_{l=0}^{k}a_l^{(\nu)}t^l}{(k+1)a_{k+1}^{(\nu)}\eta^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P_{mk}^*}{(k+1)a_{k+1}^{(\nu)}\eta^k}} \tag{58}$$

が得られる．文献 9) で述べた理由により，上式において，t と η を置く（端点近似）．その式において，η は任意の値をとることができるので，あらためて，その η を t とすれば，

$$f_{\nu m}(t)=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P_{mk}^{*}\sum_{l=0}^{k}a_l^{(\nu)}t^l}{(k+1)a_{k+1}^{(\nu)}t^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{P_{mk}^{*}}{(k+1)a_{k+1}^{(\nu)}t^k}} \tag{59}$$

となる．上式を整理し，有理式の形にすれば，式(10)および(13)を用いて，$\mathrm{Ai}(z)$ および $\mathrm{Ai}'(z)$ の計算式

$$\mathrm{Ai}(z)=z^{-1/4}e^{-\zeta}\frac{\dfrac{b_m}{\zeta^m}+\dfrac{b_{m-1}}{\zeta^{m-1}}+\cdots+\dfrac{b_{m-j}}{\zeta^{m-j}}+\cdots+b_0}{\dfrac{c_m}{\zeta^m}+\dfrac{c_{m-1}}{\zeta^{m-1}}+\cdots+\dfrac{c_{m-j}}{\zeta^{m-j}}+\cdots+c_0} \tag{60}$$

$$\mathrm{Ai}'(z)=z^{1/4}e^{-\zeta}\frac{\dfrac{d_m}{\zeta^m}+\dfrac{d_{m-1}}{\zeta^{m-1}}+\cdots+\dfrac{d_{m-j}}{\zeta^{m-j}}+\cdots+d_0}{\dfrac{e_m}{\zeta^m}+\dfrac{e_{m-1}}{\zeta^{m-1}}+\cdots+\dfrac{e_{m-j}}{\zeta^{m-j}}+\cdots+e_0} \tag{61}$$

が得られる．ただし，

$$b_i=\lambda\frac{\pi^{-1/2}}{2}\sum_{k=0}^{i}\frac{P_{m,m-i+k}^{*}a_k^{(1/3)}}{(m+1-i+k)a_{m+1-i+k}^{(1/3)}} \tag{62}$$

$$c_i=\lambda\frac{P_{m,m-i}^{*}}{(m-i+1)a_{m-i+1}^{(1/3)}} \tag{63}$$

$$d_i=\lambda'\frac{\pi^{-1/2}}{2}\sum_{k=0}^{i}\frac{P_{m,m-i+k}^{*}a_k^{(2/3)}}{(m+1-i+k)a_{m+1-i+k}^{(2/3)}} \tag{64}$$

$$e_i=\lambda'\frac{P_{m,m-i}^{*}}{(m-i+1)a_{m-i+1}^{(2/3)}} \tag{65}$$

である．λ および λ' は，それぞれ，$b_m=1$ および $d_m=1$ となるように選ばれた定数である．

[m の決定]

$\mathrm{Re}(\zeta)>1.4$ において用いる式(60)および(61)の m を決めなければならない．m をいろいろ変えて精度を調べた結果，8D 用では，

$$m=7 \tag{66}$$

18D 用では，

$2.25\cdot[\mathrm{Re}(\zeta)]^2+[\mathrm{Im}(\zeta)]^2<21^2$ のとき，

$$m=21 \tag{67}$$

それ以外のとき，

$$m=10 \tag{68}$$

とすることにした（言うまでもないが，4.2 節で述べたように，式(26)あるいは式(27)の領域では，漸近展開式を使う）．

能率的な計算のためには，b_i, c_i, d_i および e_i ($i=0,1,\cdots,m$) は，あらかじめ，多倍長計算により求めておき，表としておくとよい．

[τ 法の誤差解析]

式(52)および(53)より，式(55)の $f_{\nu m}(t)$ の絶対誤差 $E_{\nu m}(t)=f_{\nu m}(t)-f_\nu(t)$ は次の微分方程式

$$t^2E_{\nu m}''(t)+2(t+1)E_{\nu m}'(t)-\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)E_{\nu m}(t)=\tau_m P_m^{*}\left(\frac{t}{\eta}\right) \tag{69}$$

を満足する．ただし，上式の右辺および以下の τ_m は，式(57)で与えられたものとする．上式の一般解は，式(52)の独立な解が，

$$f_\nu(t)=\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2}e^{1/t}K_\nu\left(\frac{1}{t}\right) \tag{70}$$

$$g_\nu(t)=\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2}e^{1/t}I_\nu\left(\frac{1}{t}\right) \tag{71}$$

であることより，定数変化法を用いて，

$$\begin{aligned}E_{\nu m}(t)=&Af_\nu(t)+Bg_\nu(t)\\&-f_\nu(t)\tau\int_0^t\frac{P_m^{*}(u/\eta)g_\nu(u)}{u^2\Delta(u)}du\\&+g_\nu(t)\tau\int_0^t\frac{P_m^{*}(u/\eta)f_\nu(u)}{u^2\Delta(u)}du\end{aligned} \tag{72}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}\Delta(u)&=f_\nu(u)g_\nu'(u)-f_\nu'(u)g_\nu(u)\\&=-2/(\pi u^2)e^{2/u}\end{aligned} \tag{73}$$

であり，A および B は初期条件によって決定される定数である．初期条件 $E_{\nu m}(0)=0$ は，

$$A\lim_{t\to0}f_\nu(t)+B\lim_{t\to0}g_\nu(t)=0 \tag{74}$$

と表される．ただし，$0\le\arg t<\pi/2$ とする．$\lim_{t\to0}f_\nu(t)=1$ であるが，$\lim_{t\to0}g_\nu(t)$ は存在しない（発散する）ので，上式が成り立つためには，

$$A=B=0 \tag{75}$$

でなければならない．したがって，式(46)の $f_{\nu m}(t)$ の絶対誤差 $E_{\nu m}(t)$ は，

$$\begin{aligned}E_{\nu m}(t)=&\tau_m t^{-1/2}e^{1/t}\\&\times\int_0^t\left(I_\nu\left(\frac{1}{u}\right)K_\nu\left(\frac{1}{t}\right)-I_\nu\left(\frac{1}{t}\right)K_\nu\left(\frac{1}{u}\right)\right)\\&\times u^{-1/2}e^{-1/u}P_m^{*}(u/\eta)du\end{aligned} \tag{76}$$

と表される．

ある与えられた η に対して，u は $0\le u/\eta\le t/\eta\le1$ であるので，$|P_m^{*}(u/\eta)|\le1$ である．また，$0\le\arg t<\pi/2$ であるので，被積分関数において，$P_m^{*}(u/\eta)$ を除いた部分は有界である．したがって，積分の上限 t

が有限である限り，積分部分は有界である．上式には，式(57)で定義された τ_m を含んでいるが，これは，

$$\tau_m=\frac{(-1)^m\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{F(m,\nu,\eta)} \tag{77}$$

と表すことができる．ただし，$F(m,\nu,\eta)$ は一般化された超幾何級数

$$F(m,\nu,\eta)={}_2F_2\left(\begin{matrix}-m,\ m+1\\ \frac{3}{2}-\nu,\ \frac{3}{2}+\nu\end{matrix}\,\middle|\, -\frac{2}{\eta}\right) \tag{78}$$

である．Y. L. Luke[10] によれば，$m\to\infty$ のときの $F(m,\nu,\eta)$ の漸近展開式は，

$$\begin{aligned}F(m,\nu,\eta)&\sim(2\pi\sqrt{3})^{-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\\&\quad\times(m^2+m)^{-2/3}\left(\frac{2}{\eta}\right)^{-2/3}\\&\quad\times\exp\left\{3\left(\frac{2m^2+2m}{\eta}\right)^{1/3}-\frac{2}{3\eta}\right\}\\&\quad|\arg(1/\eta)|\le\pi-\epsilon \qquad \epsilon>0\end{aligned} \tag{79}$$

と表される．これより，$m\to\infty$ のとき，$|F(m,\nu,\eta)|$ は，$|\eta|=\infty$ を除いて，∞ となることがわかる．したがって，式(76)の $E_{\nu m}(t)$ の絶対値は，t が有限であり，かつ，$0\le\arg t<\pi/2$ であれば，$m\to\infty$ のとき，一様に零に収束する．

5. おわりに

本論文では，複素変数 z のエアリー関数 $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Ai}'(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$ および $\mathrm{Bi}'(z)$ に対して，テイラー展開による方法，漸化式を用いる方法および τ 法を領域により適当に使い分けることにより，能率的に計算できることを示した．

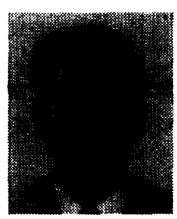
最後に τ 法に触れておく．τ 法で得られた式(60)および(61)の有理式の部分は，部分分数展開に分解すれば，$w_0+\sum_{i=1}^{m} w_i/(x_i+\zeta)$ という形に書け，定数項 w_0 を除いて，Schulten らの方法と同じ形の計算式にすことができる．両者の方法を比較すると，同じ計算量では，τ 法のほうが，Schulten らの方法より精度がよるい．本方法では，部分分数展開せず，有理式の形で計算式を与えている．これは，現在，浮動小数点の除算は乗算に比べて，かなりの計算時間を要するので，有理式のままで計算する方が能率的と考えられるからである．

謝辞 日頃，有益なご助言をいただく本学二宮市三教授に深謝します．

参考文献

1) Schulten, Z., Anderson, D. G. M. and Gordon, R. G.: An Algorithm for the Evaluation of the Complex Airy Functions, *J. Comput. Phys.*, Vol. 31, No. 1, pp. 60-75 (1979).
2) 吉田年雄，浅野道雄，梅野正義，三木七郎：漸化式を用いる複素変数のベッセル関数 $I_n(z)$ の数値計算，情報処理，Vol. 14, No. 1, pp. 23-29 (1973).
3) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, pp. 464-507, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1956).
4) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, pp. 446-452, Dover, New York (1968).
5) 森口繁一，宇田川久，一松　信：数学公式III，岩波全書，p. 173，岩波書店，東京 (1968).
6) Goldstein, M. and Thaler, R. M.: Recurrence Techniques for the Calculation of Bessel Functions, *MTAC*, Vol. 13, No. 66, pp. 102-108 (1959).
7) Watson, G. N.: *A Treatize on the Theory of Bessel Functions*, p. 369, Cambridge University Press (1966).
8) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数 $I_\nu(x)$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol. 31, No. 8, pp. 1159-1167 (1990).
9) 吉田年雄，二宮市三：τ-method による複素変数のベッセル関数 $K_n(z)$ の数値計算，情報処理，Vol. 14, No. 8, pp. 569-575 (1973).
10) Luke, Y. L.: *The Special Function and Their Approximations*, Vol. 1, p. 41, pp. 261-263, Academic Press, New York (1969).

(平成4年2月 5 日受付)
(平成4年7月10日採録)



吉田　年雄（正会員）
昭和19年名古屋市生．昭和43年慶応義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和45年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和48年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和60年同講師．昭和61年中部大学工学部助教授，昭和63年同経営情報学部に配置換．平成2年同教授．数値解析の研究に従事．特殊関数とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味をもっている．工学博士．電子情報通信学会会員．