多段階誤り制御を伴う *Stop-and-Wait* ARQ 方策の評価†

安井一民†† 中川覃夫†† 小池慎一†††

コンピュータ・ネットワークの著しい進展とともに，データ伝送に対する高信頼化の要求が増大している．ARQ 方式は，誤り制御が比較的簡単であることから２地点間データ伝送システムに幅広く用いられており，スループット改善の観点から，いろいろな方法が提案されている．代表的なものとして，(1)*stop-and-wait* 方式，(2)*go-back-N* 方式，(3)*selective-repeat* 方式がある．ここでは，*stop-and-wait* ARQ 方式における多段階誤り制御方策について考察する．すなわち，送信側からある一定量の情報を単位ブロックとして送信する際，当該ブロックのいくつかのコピーをセットとして送信し，受信側からの各ブロックに対する誤り検証結果の応答を待つ．その結果，一定時間後に当該ブロックを再送するかまたは直ちに次の単位ブロックの送信に移行するかを決定するデータ伝送モデルを設定する．そのとき，３つの方式を考え，単位ブロックの送信が成功するまでの平均時間を求め，それを最小にする単位ブロックの送信個数や再送回数等を種々議論する．最後に，数値例による比較と考察を行い，通常のブロック誤り確率のもとでは一定個数方式による方策が最良であることなどを示す．

1. はじめに

コンピュータ・ネットワークの著しい進展とともに，データ伝送に対する高信頼化の要求が増大している．一般にデータ伝送においては，通信回線が受ける瞬断・雑音・歪みなどの妨害により，データ誤りの発生を避けることができない[1]．このため，高品質のデータを必要とする通信システム[2]では，データ誤りの検出・訂正を行う誤り制御が不可欠であり，高信頼化の視点から諸種の方法が考案されている．特に，ARQ (automatic-repeat-request) 方式は，誤り制御が比較的簡単であることから２地点間データ伝送システムに幅広く用いられている[3)~6)]．

ARQ 方式には，データ伝送におけるスループット改善の観点から，いろいろな方法が提案されているが，代表的なものとして，(1)*stop-and-wait* 方式[7),8)]，(2)*go-back-N* 方式[9)]，(3)*selective-repeat* 方式[3)]がある．(1)は，いわば半二重通信方式であり，送信側がデータを送信後，受信側からの ACK (acknowledgement：肯定応答) または NAK (negative acknowledgement：否定応答) を待つ．ACK の場合は次データを送信し，NAK またはタイムアウト（一定時間内に応答がない）の場合は当該データの再送を行う．(2)は，送信側が受信側からの ACK または NAK を待つことなく，次々と連続してデータを送信する方式であり，あるデータの NAK を受信した時点またはタイムアウト発生時点で，その当該データ以降の送信済みデータについて再送を行う．この方式の典型例として，HDLC (high-level data link control)[2),10)]がある．(3)は，(2)において，NAK を受信またはタイムアウトとなったデータのみを再送する方式であるが，(2)に比べてスループットが向上する反面，受信側における受け入れデータの順序等に関して再整列が必要とされる．

ここでは，２地点間データ伝送に有用な *stop-and-wait* ARQ 方式における多段階誤り制御方策について考察する．すなわち，送信側からある一定量の情報を単位ブロックとして送信する際，当該ブロックのいくつかのコピーをセットとして送信し，受信側からの各ブロックに対する誤り検証結果の応答を待つ．その結果，一定時間後に当該ブロックを再送するかまたは直ちに次の単位ブロックの送信に移行するかを決定するデータ伝送モデルを設定する．そのとき，３つの方式を考え，単位ブロックの送信が成功するまでの平均時間を求め，それを最小にする単位ブロックの送信個数や再送回数等を種々議論する．最後に，数値例による比較と考察を行い，通常のブロック誤り確率のもとでは一定個数方式による方策が最良であることなどを示す．

2. データ伝送のモデルと解析

ここでは，ある一定量の情報を単位ブロックと呼び，送信側から受信側へ単位ブロックを順次送信す

† Reliability Evaluations of *Stop-and-Wait* ARQ Policies for a System with Multi-Stage Error Control by KAZUMI YASUI, TOSHIO NAKAGAWA (Department of Industrial Engineering, Aichi Institute of Technology) and SHIN-ICHI KOIKE (Computing Center, Aichi Institute of Technology).
†† 愛知工業大学経営工学科
††† 愛知工業大学計算センター

る．最初に単位ブロックのコピー m_1 個を送信する．そのとき，各ブロックには独立に確率 p_1 でデータ誤りが発生する．

（1） 受信側では，m_1 個の単位ブロックの各々に対してデータ誤りチェックを実施し，個々のブロックごとに誤りなしの場合は ACK を，誤りありの場合は NAK を，送信側へ返送する．このとき，ACK であるブロックが1個以上存在するならば，そのブロックを正常な単位ブロックとして受け入れ処理を行う（送信成功）．

（2） 送信側では，返送された m_1 個の ACK または NAK（タイムアウトを含む）を受取り，もしすべてのブロックが NAK ならば，平均 l 時間後に当該ブロックのコピー m_2 個を再送する．そのとき，各ブロックには独立に確率 p_2 でデータ誤りが発生する．受信側では（1）と同様にデータ誤りチェックを実施し，個々のブロックごとに ACK または NAK を返送する．もし1個以上が ACK ならば，次の単位ブロックの送信に移行する（送信成功）．

（3） 送信側では，もしすべてのブロックが NAK ならば，平均 l 時間後に j $(j=1,2,\cdots,N-1)$ 回目の再送を行い，m_{j+1} 個の単位ブロックのコピーを送信する．このとき，各ブロックには独立に確率 p_{j+1} でデータ誤りが発生する．受信側は（1）と同様にデータ誤りチェックの実施と各ブロックごとに ACK または NAK を返送する．もし1個以上のブロックが ACK であるならば，そのブロックを正常な単位ブロックとして受け入れ処理を行う（送信成功）．

（4） 単位ブロックの N 回の送信がすべて NAK であったならば（送信失敗と呼ぶ），伝送系を点検・保守し，単位ブロックの送信を初期状態からやり直すものとする．

1個のブロックの送信に要する時間 C は任意の分布 $C(t)$（平均 c）に従い，ブロックの編集に要する時間，伝送に要する時間，誤りチェックに要する時間および ACK または NAK を返送する時間等をすべて含むものとする．また，各段階において再送開始までの経過時間 L は，任意の分布 $L(t)$（平均 l）に従い，送信失敗に伴う伝送系の点検・保守時間 V は任意の分布 $V(t)$（平均 v）に従うものとする．ここで，C，L，V は確率変数であり，互いに独立と仮定する．また，一般に，確率変数 V の期待値を $E(V)\equiv\int_0^\infty t\,dV(t)=v$ とおく．なお，上記以外に要する時間は便宜上無視できるものとする．

以上のような仮定のもとで，単位ブロックの送信が成功するまでの平均時間を求めよう．ここでは，送信側が最初の単位ブロックのコピー m_1 個を送信してから，送信失敗，すなわち伝送系の点検・保守を実施して，送信やり直しとなるまでの一連の処理過程を単位送信処理と呼び，次のような記号を導入する．

T：単位ブロックの送信が成功するまでの所要時間を表す確率変数．

R_k：$(k-1)$ 回の単位送信処理の後，k 回目の単位送信処理において送信成功となる事象 $(k=1,2,\cdots)$．

S_j：ある単位送信処理において，第 j 回目に m_j 個の単位ブロックを送信し，送信成功となる事象 $(j=1,2,\cdots,N)$．ここで，S_j は R_k $(k=1,2,\cdots)$ とは独立であると仮定する．

一般に，事象 X が生起するという条件のもとで，Y の条件付確率を $P(Y|X)$，Y の条件付期待値を $E(Y|X)$ とおく．最初の単位送信処理において，単位ブロックの送信が成功するまでの平均時間 $E(T|R_1)$ は，

$$E(T|R_1)=\sum_{j=1}^{N}E(T|S_j\cap R_1)P(S_j|R_1), \qquad (1)$$

と表すことができる．ここで，単位ブロックの送信に要する時間 C と再送開始までの経過時間 L は，S_j $(j=1,2,\cdots,N)$ および R_1 とは独立であると仮定すると，（1）式を次のように展開することができる．

$$\begin{aligned}E(T|R_1)&=m_1c+p_1^{m_1}(l+m_2c+p_2^{m_2}(l+m_3c+\cdots\\&\quad+p_{N-1}^{m_{N-1}}(l+m_Nc))\cdots)\\&=m_1c+\sum_{j=1}^{N-1}(l+m_{j+1}c)\prod_{i=1}^{j}p_i^{m_i}. \qquad (2)\end{aligned}$$

すなわち，まず時間 m_1c をかけて単位ブロックの m_1 個のコピーを送信する．これらがすべて確率 $p_1^{m_1}$ で NAK のとき，平均 l 時間後に，時間 m_2c をかけて当該ブロックの m_2 個の再送を行う．これらがすべて確率 $p_2^{m_2}$ で NAK のとき，平均 l 時間後に，時間 m_3c をかけて当該ブロックの m_3 個の再送を行う．以下同様にして，（2）式は N 回目の再送までに送信成功となる平均時間を表す．

次に，一般の R_k $(k=1,2,\cdots)$ の場合について考えよう．事象 R_k が生起する確率を $P(R_k)$ とおくと，

$$P(R_k)=\left(\prod_{i=1}^{N}p_i^{m_i}\right)^{k-1}\left(1-\prod_{i=1}^{N}p_i^{m_i}\right)\quad(k=1,2,\cdots), \qquad (3)$$

となる．よって，単位ブロックの送信が成功するまでの平均時間 $E(T)$ は，

$$E(T)=\sum_{k=1}^{\infty}E(T|R_k)P(R_k), \qquad (4)$$

と表される．ここで，C, L, V と R_k $(k=1,2,\cdots)$ とはそれぞれ独立であると仮定すると，(4)式は，(2)式の $E(T|R_1)$ を用いて次のように展開することができる．

$$\begin{aligned}E(T)&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{E(T|R_1)+(k-1)[E(T|R_1)+v]\Big\}P(R_k)\\&=[v+E(T|R_1)]\sum_{k=1}^{\infty}kP(R_k)-v\sum_{k=1}^{\infty}P(R_k)\\&=\frac{v+m_1c+\sum_{j=1}^{N-1}(l+m_{j+1}c)\prod_{i=1}^{j}p_i^{m_i}}{1-\prod_{i=1}^{N}p_i^{m_i}}-v.\end{aligned} \qquad (5)$$

(5)式において，形式的に $l=0, m_j=1$ $(j=1,2,\cdots,N)$ とおくと，通常の $N-1$ 回の再送回数の上限をもつ *stop-and-wait* ARQ 方式における平均伝送時間となる．

3. 最適方策

(5)式の $E(T)$ を最小にする問題を考えよう．ここでは，単位ブロックの送信個数と再送回数に関する3つの方策を考察する．なお，$F(j)=p_1p_2\cdots p_j$ $(j=1,2,\cdots)$ とし，$F(0)\equiv1$, $\sum_{j=1}^{0}\equiv0$ とおく．

(i)　一定個数 $(m_j=m)$ 方式の最適方策

最初の送信を含めて，各再送段階で m 個の単位ブロックのコピーを送信する方策である．ここで，$N=\infty$, $p_j=p(j=1,2,\cdots)$, $l=0$とすると，M. Moeneclaey ら[8]のモデルとなる．

(5)式において，$m_j=m$ $(j=1,2,\cdots)$ としたとき，$E(T)$ を m と N の関数と考えて，

$$L_1(m,N)\equiv\frac{v+mc+(l+mc)\sum_{j=1}^{N-1}[F(j)]^m}{1-[F(N)]^m}-v, \qquad (6)$$

とおくと，付録1により，mを固定したときの最適な N^* の存在と，$L_1(m,N^*)$ を最小にする m^* を求めることができる．

(ii)　Sastry $(m_1=1,\ m_j=m)$ 方式の最適方策

最初に単位ブロックを1個送信し，NAK の場合にはそれ以降の各再送段階において，当該ブロックのm個のコピーを送信する方策である．ここで，$N=\infty$, $p_j=p(j=1,2,\cdots)$, $l=0$ とすると A. R. K. Sastry[11]のモデルとなる．

(5)式において，$m_1=1$, $m_j=m$ $(j=2,3,\cdots)$ のとき，$E(T)$ を，

$$L_2(m,N)\equiv\frac{v+c+\frac{1}{p_1^{m-1}}(l+mc)\sum_{j=1}^{N-1}[F(j)]^m}{1-\frac{1}{p_1^{m-1}}[F(N)]^m}-v, \qquad (7)$$

とおくと，付録2により，(i)と同様に m を固定したときの最適な N^* の存在と，$L_2(m,N^*)$ を最小にする m^* を求めることができる．

(iii)　2段階 $(N=2)$ 方式の最適方策

このモデルは，最初の単位ブロックの m_1 個の送信がすべて NAK の場合，当該ブロックの m_2 個のコピーを再送し，これらがすべて NAK の場合，単位ブロックの送信を初期状態からやり直す方策である．ここでは，各段階の最適な送信個数 m_1^*, m_2^* を求める．

(5)式において，$N=2$ としたときの $E(T)$ を $L_3(m_1,m_2)$ とおくと，

$$L_3(m_1,m_2)\equiv\frac{v+m_1c+(l+m_2c)p_1^{m_1}}{1-p_1^{m_1}p_2^{m_2}}-v, \qquad (8)$$

となる．付録3により，$L_3(m_1,m_2)$ を最小にする有限で唯一の m_1^*, m_2^* を求めることができる．

また，一般の N 段階方式における最適方策も，付録4から，上と同様にして求めることができる．

ところで，上述の3つの方策間における平均時間の優位性について考察してみよう．ここでは，単位ブロックを初めて送信する際のブロック誤り確率 p_1 に着目し，各方策における $E(T)$ を比較することによって，その優位性を議論する．

最初に，(6)式と(7)式を用いて一定個数方式と Sastry 方式を比較しよう．$m\geq2$, $N\geq2$ とおき，$L_2(m,N)-L_1(m,N)<0$ と仮定すると，

$$\left\{v[F(N)]^m+(l+mc)\sum_{j=1}^{N-1}[F(j)]^m\right\}\left(\frac{1}{p_1^{m-1}}-1\right)+c[F(N)]^m\left(\frac{m}{p_1^{m-1}}-1\right)<c(m-1), \qquad (9)$$

となる．(9)式の左辺を p_1 の関数と考え $H_1(p_1)$ とおくと，付録5より，次のような結論を得る．すなわち，$H_1(p_1)=c(m-1)$ を満たす最小の解を $\widehat{p_1}$ とするとき，

[1]　$0<p_1<\min\{\widehat{p_1}, 1/2\}$ の範囲ならば，$L_2(m,N)<L_1(m,N)$ となり，Sastry 方式のほうがよい．一般に，p_1 はブロック誤り確率で

表 1 $c=1$, $l=5c$, $v=60c$ のとき，$E(T)$ を最小にする最適方策の数値例
Table 1 Numerical values of optimal policies to minimize $E(T)$ when $c=1$, $l=5c$ and $v=60c$.

p	一定個数方式			Sastry 方式			2段階方式			stop-and-wait 方式	
	m^*	N^*	$L_1(m^*, N^*)$	m^*	N^*	$L_2(m^*, N^*)$	m_1^*	m_2^*	$L_3(m_1^*, m_2^*)$	N^*	$L_1(1, N^*)$
0.9	1	22	1.765	2	25	1.727	1	3	1.842	22	1.765
0.8	2	12	2.333	2	12	2.663	2	4	2.402	10	3.570
0.7	2	8	3.123	4	9	3.952	2	6	3.090	6	9.031
0.6	3	6	4.019	5	6	5.883	3	8	3.947	5	20.092
0.5	4	4	5.431	8	5	9.058	4	10	5.167	4	38.528

あるから，1/2以下であるという仮定は妥当であろう．

次に，(7)式と(8)式を比較してみよう．$m_j=m$, $N=2$ のとき両者は同一の方策となるから，$N\geq 3$ のとき，$L_1(m,N)-L_3(m,m)<0$ と仮定すると，

$$\frac{\{1-[F(2)]^m\}\sum_{j=1}^{N-1}[F(j)]^m-p_1^m\{1-[F(N)]^m\}}{[F(2)]^m-[F(N)]^m}<\frac{v+mc}{l+mc}, \tag{10}$$

となる．(10)式の左辺を $H_2(p_1)$ とおくと，付録6より，次のような結論を得る．すなわち，$H_2(p_1)=(v+mc)/(l+mc)$ の解を $\tilde{p}_1$ とおくと，

［2］ $H_2(0)<(v+mc)/(l+mc)$ のとき，$L_1(m,N)<L_3(m,m)$ となり，一定個数方式のほうがよい．

［3］ $H_2(0)>(v+mc)/(l+mc)$ のとき，$0<p_1<\tilde{p}_1$ ならば，$L_1(m,N)>L_3(m,m)$ となり2段階方式のほうがよい．$\tilde{p}_1<p_1<1$ ならば，$L_1(m,N)<L_3(m,m)$ となり一定個数方式のほうがよい．

以上の結論［1］～［3］をまとめると，3つの方策における優位性は，最初の単位ブロックの誤り確率 p_1 の増大とともに，Sastry 方式，一定個数方式，2段階方式へと推移していくものと考えられる．このことは，次章の数値例でも確かめられる．

4. 数値例

前章で求めた最適方策の具体的な数値を求めよう．ここでは，1個の単位ブロックの送信に要する平均時間 c をシステムの単位時間とする．単位ブロックを送信したとき，各ブロックが NAK となる確率を $p_j=1-p^j$ $(j=1,2,\cdots,N)$ と仮定し，$p=0.5\sim0.9$ (可変) とおく．ここで，p は最初の単位ブロックの送信で各ブロックが ACK となる確率を表し，p_j は再送回数の増加とともに単調に増大する．また，各段階において再送開始までの経過時間を $l=5c$ とし，単位ブロックの送信失敗に伴う伝送系の点検・保守時間の平均を $v=60c$ とする．

以上のような仮定のもとで，(i)一定個数方式，(ii)Sastry 方式，(iii)2段階方式における最適方策の数値例と，さらに，同一条件のもとで，通常の *stop-and-wait* 方式 $(m_j=1)$ における数値例を表1に示す．また，最適方策における各方式の平均時間 $E(T)$ の比較を図1に示す．

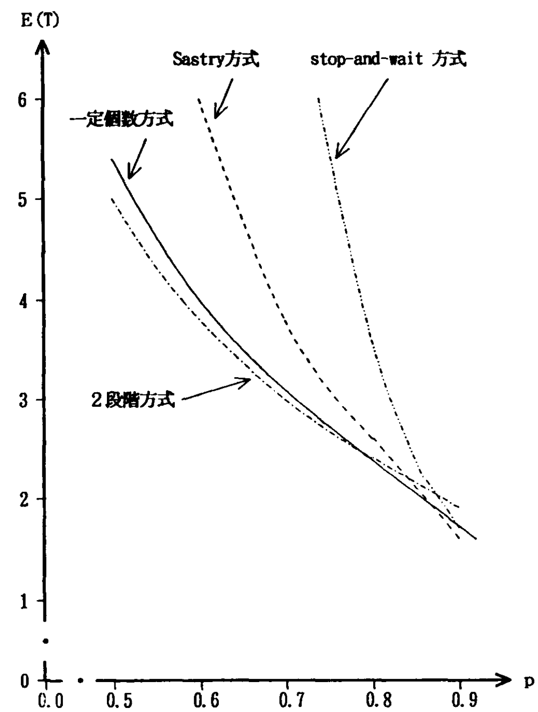

図 1 最適方策における平均時間 $E(T)$ の比較
Fig. 1 Comparison among mean times $E(T)$ of the optimal policies.

表1によれば，各方策とも，単位ブロックの最適送信個数は p の減少とともに大きくなり，(ⅰ)と(ⅱ)の方策における最適再送回数は p の減少とともに小さくなる．また，3つの方策とも，通常の *stop-and-wait* 方策に比し平均伝送時間が大きく改善されることを示す．

さらに図1から，平均伝送時間に関して(ⅰ)と(ⅱ)の方策を比較すると，p の減少（ブロック誤り確率 p_1 の増大）に伴って(ⅰ)の方策のほうが次第に有利となっていくことが示される．例えば，単位ブロックの大きさが 8,192 ビット（1,024 文字）のとき，ビット誤り率が 1.22×10^{-5} オーダ ($p\approx0.9$) の場合は(ⅰ)と(ⅱ)の方策は大略同程度であるが，ビット誤り率が 2.44×10^{-5} オーダ ($p\approx0.8$) 以上に悪化した場合は(ⅰ)の方策のほうが有利である．いわば，(ⅱ)の方策は誤り確率が小さい場合に限って用いられるべきである．また，(ⅲ)の2段階方策は，p が比較的小さい場合に非常に有効であることがわかる．このことは，誤り確率が大きい場合は，なるべく早く再送を打ち切るべきであることを示唆している．

5. おわりに

多段階誤り制御を伴う *stop-and-wait* ARQ 方策について，平均伝送時間を最小にする3つの最適方策を考察した．M. Moeneclaey らのモデルや A. R. K. Sastry のモデルでは，再送回数を無限回としており，最適な打ち切り回数について議論されていない．ここでは，*stop-and-wait* ARQ 方策をより一般的にとらえた伝送モデルを設定し，3つの方策について，単位ブロックの最適な送信個数や送信回数を解析的に求め，最初のブロック誤り確率の大きさによって各方策間の優位性を議論し，最後に数値例により種々の考察を行った．

平均伝送時間に関する3つの方策の比較では，通常のブロック誤り確率においては一定個数方策が最良であるが，ブロック誤り確率がかなり小さい場合には，Sastry の方策が有効となることが示された．なお，2段階方策は，ブロック誤り確率が比較的大きい場合のスループットの改善にかなり有効であることもわかった．

ここで示した3つの方策は，いずれも通常の *stop-and-wait* 方策に比べて，スループットが大きく改善されることを示しており，ARQ 方策における再送回数や送信個数等の設定に資するものと考えられる．

ARQ 方策に関して，ここでは *stop-and-wait* 方式に限定した N 回打ち切り方策について考察したが，より実際的な *go-back-N* 方式や *selective-repeat* 方式におけるモデル化や議論も重要であり，今後の課題として期待されるであろう．

参 考 文 献

1) 副島俊雄(編)：新・データ伝送システム，p. 310，産業図書 (1984).
2) 電子情報通信学会（編）：電子情報通信ハンドブック，p. 3052, オーム社 (1988).
3) Yu, P. S. and Lin, S.: An Efficient Selective-Repeat ARQ Scheme for Satellite Channels and Its Throughput Analysis, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-29, No. 3, pp. 480-486 (1982).
4) Bruneel, H. and Moeneclaey, M.: On the Throughput Performance of Some Continuous ARQ Strategies with Repeated Transmissions, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-34, pp. 244-249 (1986).
5) Krishna, H. and Morgera, S. D.: A New Error Control Scheme for Hybrid ARQ Systems, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-35, No. 10, pp. 981-990 (1987).
6) Fantacci, R.: Performance Evaluation of Efficient Continuous ARQ Protocols, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 38, No. 6, pp. 773-781 (1990).
7) Schwartz, M.: *Telecommunication Networks*, Addison-Wesley (1987).
8) Moeneclaey, M., Bruneel, H., Bruyland, I. and Chung, D.-Y.: Throughput Optimization for a Generalized stop-and-wait ARQ Scheme, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-34, No. 2, pp. 205-207 (1986).
9) Morris, J. M.: On Another go-back-N ARQ Technique for High Erro Rate Conditions, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-26, pp. 187-189 (1978).
10) 情報システムハンドブック編集委員会（編）：情報システムハンドブック，培風館 (1989).
11) Sastry, A. R. K.: Improving Automatic Repeat-Request (ARQ) Performance on Satellite Channels under High Error Rate Conditions, *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-23, pp. 436-439 (1975).

付　録

1. $L_1(m, N)$ を最小にする m^*, N^* を求める.

(6)式において，最初に m を固定し，不等式 $L_1(m, N+1)-L_1(m, N)\geq 0$ とおくと，

$$\frac{1-[F(N)]^m}{1-p_{N+1}^m}-\sum_{j=1}^{N-1}[F(j)]^m \geq \frac{v+mc}{l+mc}, \qquad (A.1)$$

を得る．(A.1)式の左辺を $Q_1(N)$ とおくと，

$$Q_1(N)-Q_1(N-1)=\frac{1-[F(N)]^m}{(1-p_{N+1}^m)(1-p_N^m)} \cdot (p_{N+1}^m-p_N^m), \qquad (A.2)$$

となる．よって，もし $p_j\ (j=1,2,\cdots,N)$ が j の単調増加関数であるとき，$Q_1(N)$ は N の単調増加関数となり，(A.1)式を満たす最小の N^* が存在するならば唯一である．さらに，$N\geq 2$ に対して，

$$Q_1(N)\geq\frac{1-p_1^m}{1-p_{N+1}^m}$$

であるから，$\lim_{N\to\infty}p_N=1$ のとき，有限な N^* が存在する．したがって，$m=1,2,\cdots$ に対して(A.1)式を満たす N^* を求め，さらに，(6)式に代入することによって，$L_1(m,N^*)$ を最小にする m^* を求めることができる．

2. $L_2(m,N)$ を最小にする m^*, N^* を求める.

(7)式において，mを固定し，$L_2(m,N+1)-L_2(m,N)\geq 0$ とおくと，

$$\frac{1-\frac{1}{p_1^{m-1}}[F(N)]^m}{1-p_{N+1}^m}-\frac{1}{p_1^{m-1}}\sum_{j=1}^{N-1}[F(j)]^m\geq\frac{v+c}{l+mc}, \qquad (A.3)$$

を得る．(A.3)式の左辺を $Q_2(N)$ とおくと，

$$Q_2(N)-Q_2(N-1)=\frac{1-\frac{1}{p_1^{m-1}}[F(N)]^m}{(1-p_{N+1}^m)(1-p_N^m)} \cdot (p_{N+1}^m-p_N^m), \qquad (A.4)$$

となるから，付録1と同様に，$p_j\ (j=1,2,\cdots,N)$ が j の単調増加関数で，$\lim_{N\to\infty}p_N=1$ ならば，(A.3)式を満たす有限で唯一の N^* が存在する．よって，$m=1,2,\cdots$ に対して(A.3)式を満たす N^* を求め，(7)式に代入することによって，$L_2(m,N^*)$ を最小にする m^* を求めることができる．

3. $L_3(m_1,m_2)$ を最小にする m_1^*, m_2^* を求める.

(8)式において，最初に m_1 を固定し，$L_3(m_1,m_2+1)-L_3(m_1,m_2)\geq 0$ とおくと，

$$\frac{1}{(1-p_2)p_2^{m_2}}-p_1^{m_1}\left(m_2+\frac{l}{c}+\frac{1}{1-p_2}\right)\geq m_1+\frac{v}{c}, \qquad (A.5)$$

を得る．(A.5)式の左辺を $Q_3(m_2)$ とおくと，

$$Q_3(m_2)-Q_3(m_2-1)=\frac{1-p_1^{m_1}p_2^{m_2}}{p_2^{m_2}}>0, \qquad (A.6)$$

となる．さらに，$m_2\to\infty$ のとき，$Q_3(\infty)\equiv\infty$ となる．よって，$m_1<\infty$ のとき，m_2^* は(A.5)式を満たす最小の整数として唯一求めることができる．

次に，(8)式において m_2 を固定し，前と同様にして $L_3(m_1+1,m_2)-L_3(m_1,m_2)\geq 0$ とおくと，

$$\frac{1}{(1-p_1)p_1^{m_1}}-p_2^{m_2}\left(m_1+\frac{v}{c}+\frac{1}{1-p_1}\right)\geq m_2+\frac{l}{c}, \qquad (A.7)$$

を得る．(A.7)式の左辺を $Q_4(m_1)$ とおくと，

$$Q_4(m_1)-Q_4(m_1-1)=\frac{1-p_1^{m_1}p_2^{m_2}}{p_1^{m_1}}>0. \qquad (A.6)$$

よって，m_2 を与えたとき，m_1^* は(A.7)式を満たす最小の整数として唯一求めることができる．

なお，実際に m_1^*, m_2^* を求める手順としては，$m_1=1,2,\cdots$ に対して(A.5)式を満たす m_2^* を求め，これを(8)式に代入して，$L_3(m_1,m_2^*)$ を最小にする m_1^* を求めればよい．

4. N段階方式における最適方策

(5)式の $E(T)$ を $L_3(m_1,\cdots,m_N)$ とおき，$m_j\ (j=1,2,\cdots,N-1)$ を固定して $L_3(m_1,m_2,\cdots,m_{N-1},m_N+1)-L_3(m_1,m_2,\cdots,m_{N-1},m_N)\geq 0$ とすると，

$$\frac{1}{(1-p_N)p_N^{m_N}}-\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\left[\prod_{i=1}^{j}p_i^{m_i}\right]\left(m_{j+1}+\frac{l}{c}\right)+\frac{\prod_{i=1}^{N-1}p_i^{m_i}}{1-p_N}\right\}\geq m_1+\frac{v}{c}, \qquad (A.9)$$

を得る．(A.9)式の左辺を $Q_5(m_N)$ とおくと，

$$Q_5(m_N)-Q_5(m_N-1)=\frac{1-\prod_{i=1}^{N}p_i^{m_i}}{p_N^{m_N}}>0, \quad (A.10)$$

となり，$m_j\ (j=1,2,\cdots,N-1)$ を与えたとき，m_N^* は(A.9)式を満たす最小の整数として求められる．

5. (9)式の左辺を $H_1(p_1)$ とおくと，

$$H_1(0)=0, \qquad (A.11)$$

$$H_1'(p_1)=\frac{1}{p_1^m}\left\{\left[v[F(N)]^m+(l+mc)\sum_{i=1}^{N-1}[F(j)]^m\right]\cdot(1-mp_1^{m-1})+mc[F(N)]^m(1-p_1^{m-1})\right\}, \qquad (A.12)$$

となる．よって，$mp_1^{m-1}\leq 1$ ならば $H_1(p_1)$ は p_1 の増加関数となる．ところで，mp_1^{m-1} は，

$$mp_1^{m-1}-(m+1)p_1^m=p_1^{m-1}(1-p_1)\left(m-\frac{p_1}{1-p_1}\right), \qquad (A.13)$$

となるから，$m>p_1/(1-p_1)$，すなわち，$0<p_1<m/(m$

$+1)$ のとき，mp_1^{m-1} は減少関数となる．よって，$m \geq 2$ より，$2p_1 \leq 1$, すなわち，$p_1 \leq 1/2$ のとき，$H_1(p_1)$ は p_1 の増加関数となる．

以上より，$H_1(p_1)=c(m-1)$ を満たす最小の解を $\widehat{p_1}$ とおくと，p_1 が

（i）$0<p_1<\min\{\widehat{p_1}, 1/2\}$ の範囲ならば，$L_2(m, N)<L_1(m, N)$ となる．

6. (10)式の左辺を $H_2(p_1)$ とおくと，

$$H_2(p_1)=\frac{[1-(p_1p_2)^m][1+p_2^m+\cdots+(p_2\cdots p_{N-1})^m]-[1-(p_1\cdots p_N)^m]}{p_2^m[1-(p_3p_4\cdots p_N)^m]}, \quad (A.14)$$

$$H_2(0)=\frac{1+p_3^m+(p_3p_4)^m+\cdots+(p_3p_4\cdots p_{N-1})^m}{1-(p_3p_4\cdots p_N)^m}, \quad (A.15)$$

$$H_2'(p_1)<0, \quad (A.16)$$

となり，$H_2(p_1)$ は $H_2(0)$ からの p_1 の減少関数となる．よって，$H_2(p_1)=(v+mc)/(l+mc)$ の解を $\widetilde{p_1}$ とおくと，

（i）$H_2(0)<(v+mc)/(l+mc)$ のとき，$L_1(m, N)<L_3(m, m)$ である．

（ii）$H_2(0)>(v+mc)/(l+mc)$ のとき，$0<p_1<\widetilde{p_1}$ ならば，$L_1(m, N)>L_3(m, m)$ であり，$\widetilde{p_1}<p_1<1$ ならば，$L_1(m, N)<L_3(m, m)$ である．

（平成4年2月 6 日受付）
（平成4年9月 10 日採録）

安井　一民（正会員）

昭和11年生．昭和49年名城大学理工学部数学科卒業．工学博士．昭和30年中部電力(株)入社．情報処理システムの分析・設計・開発に従事．平成元年愛知工業大学経営工学科助教授，現在に至る．計算機システムの信頼性の研究に従事．電子情報通信学会，日本 OR 学会各会員．

中川　覃夫（正会員）

昭和17年生．昭和42年名古屋工業大学工学研究科計測工学専攻修士課程修了．工学博士．昭和42年名城大学理工学部助手，昭和53年同大学助教授．昭和63年愛知工業大学経営工学科教授，現在に至る．信頼性理論および計算機システムの信頼性の研究に従事．電子情報通信学会，日本 OR 学会，日本経営工学会各会員．

小池　慎一（正会員）

昭和16年生．昭和44年名古屋工業大学工学研究科計測工学専攻修士課程修了．昭和44年東京理科大学理工学部助手，平成元年名古屋文理短期大学助教授，平成4年愛知工業大学計算センター助教授，現在に至る．計算機システムの信頼性の研究に従事．電子情報通信学会，日本 OR 学会，日本ソフトウェア科学会各会員．