

Mathieu 関数の固有値の計算について†

山下 眞一郎**

本論文では Mathieu 関数の固有値の計算方法について述べる。固有番号 n ごとに1つの関数と考え、パラメータ q に対する固有値を求める。1つの固有値は、パラメータの範囲 $0 \leq q < \infty$ を4つの区間に分け、最後の区間は漸近式で求め、残りの3区間は区分的最良近似の5次多項式で求める。したがって、最終的に固有値は (n, q) の関数として求められる。

1. ま え が き

Helmholtz の方程式を楕円座標を用いて表し、変数分離すれば、2つの方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \{\lambda - 2q \cos(2x)\} y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \{\lambda - 2q \cosh(2z)\} y = 0 \quad (2)$$

を得る。(1)は、Mathieu の微分方程式といい、(2)は変形 Mathieu の微分方程式という。 λ は分離定数であり、 q はパラメータと呼ぶ。また、(1)で、 $z \rightarrow iz$ と虚数変換すれば、(2)を得る。 λ は同じ値である。 y が(1)を満たす周期関数となるのは λ が特別な値(これを固有値という)のときであり、この関数を第1種 Mathieu 関数という。固有値は n で区別する。第1種 Mathieu 関数は、次のようにフーリエ級数に展開して表す。

$$ce_{2n}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \cos(2k)z \quad (3)$$

$$ce_{2n+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \cos(2k+1)z \quad (4)$$

$$se_{2n}(z, q) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \sin(2k)z \quad (5)$$

$$se_{2n+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \sin(2k+1)z \quad (6)$$

フーリエ係数 A_k, B_k は λ, q, n の関数である。これを決定するために(3)~(6)を(1)に代入すれば、定数項が0の3項連立無限次元一次方程式を得る。これが意味を持つためには連立方程式の行列式が0でなければならない。そのとき、 λ は固有値であり、

フーリエ係数を成分とするベクトルは固有ベクトルである。

(1)は Sturm-Liouville 型の固有値問題であるから、固有値は実数で可付番無限個ある。また(3)~(6)は直交系を成す。Mathieu 関数の固有値を計算するには幾つかの方法がある。

まず、第1に Mathieu 法と呼ばれる方法⁷⁾は、 n と q が小さい時、固有値と関数を q のべき級数

$$\lambda_n = n^2 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \dots \quad (7)$$

$$ce_n(z, q) = \cos(nz) + q c_1(z) + q^2 c_2(z) + \dots \quad (8)$$

と仮定し、これを(1)に代入して、次々と $\alpha_1, c_1(z), \alpha_2, c_2(z), \alpha_3, c_3(z), \dots$ を決める方法である。

Ince-Goldstein 法⁷⁾は、フーリエ係数の漸化式から連分数の特性方程式を導き、概略値を(7)や漸近式(28)で与え、精度を上げ、固有値を求めている。フーリエ係数は漸近式から求める。

Clemm の方法⁶⁾は、固有値のあらい近似値を求めてニュートン法で改良する。初期値は、 $n=1\sim 3$ に対して、 q を幾つかの区間に分け、(7)等の簡単な近似式で求める。 $n \geq 4$ のときは、 n の2次式を仮定して固有値を補外して求め、これを改良する。

島村、植木、関口¹²⁾は、固有値の計算に簡単な近似式を当てはめて改良する方法を取っている。近似式では目的の番号 n の固有値が求められる保証がないことを暗に述べている。

固有値の計算問題は、 (n, q) を与えて、それに対応する固有値を確実に速く求めることである。現在提案されている方法は、大きな n 、中程の q に対して、確実に計算されない。この解決策は初期近似の精度を上げることである。本論文では、このために、 n ごとに q の全区間、 $0 \leq q < \infty$ を4つの区間に分け、最後の区間は漸近式(29)で計算し、残りの3区間は区分的最良近似^{15), 16)}して5次の多項式を求めた。この近似式は、4, 5桁の精度を有するので、対応する固有値が確実に速く求められるようになった。

† On the Calculation of Eigenvalues of Mathieu Function by SHIN-ICHIRO YAMASHITA (Program Products Division, Numazu Plant, Fujitsu Limited).

** 富士通(株)沼津工場 PP 事業部

* 現在 日本大学理工学部

Presently College of Science and Technology, Nihon University

Mathieu 関数の文献探索を行ったところ, Mathieu 関数は, 近頃, 電磁波の解析やファイバの特性解析等で使われているが, 計算法の研究はされていないようである. たとえば, 文献 13) には, n, q, z の大きい値の場合の計算が困難なことを述べている. これは良い計算法が知られていないことを意味しよう.

2. フーリエ係数の漸化式

(3)~(6)式を(1)式に代入すれば, 次の関係式を得る.

$$A_{2k+2-d} = V_{2k-d}A_{2k-d} - A_{2k-2-d}; k=2, 3, \dots \tag{9}$$

ただし, 初めのほうの項は次のとおり.

(3)の場合: $d=0; A_0$ は任意
 $A_2 = V_0A_0; A_4 = V_2A_2 - 2A_0$ (10)

(4)の場合: $d=1; A_1$ は任意
 $A_3 = (V_1-1)A_1$ (11)

(5)の場合: $d=0; B_2$ は任意
 $B_0=0; B_4 = V_2B_2$ (12)

(6)の場合: $d=1; B_1$ は任意
 $B_3 = (V_1+1)B_1$ (13)

を得る. さらに
 $V_k = (\lambda - k^2)/q; k=0, 1, 2, \dots$ (14)
 である. (3)~(6)の係数を正規化するために, 次のようにする.

$$\delta A_d^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k+d}^2 = 1 \tag{15}$$

ただし,
 (10)に対して, $d=0, \delta=2$
 (11)に対して, $d=1, \delta=1$
 (12)に対して, $d=0, \delta=0$
 (13)に対して, $d=1, \delta=1$

3. 特性方程式と固有値の計算

固有値を得るための特性方程式は, (9)で, $R_{2k-d} = A_{2k+2-d}/A_{2k-d}$ とすれば

$$R_{2k-d} = V_{2k-d} - 1/R_{2k-2-d} \tag{16}$$

$$\therefore R_{2k-2-d} = 1/(V_{2k-d} - R_{2k-d})$$

ただし, $k=0$ または $k=1$ の場合は次のようになる.

(10)の場合: $d=0; R_0 = V_0;$
 $R_2 = V_2 - 2/R_0$ (17)

(11)の場合: $d=1; R_1 = (V_1-1)$ (18)

(12)の場合: $d=0; R_0=0; R_2=V_2$ (19)

(13)の場合: $d=1; R_1=(V_1+1)$ (20)

(16)を変形して R を消去すれば
 (17)に対して: $0 = V_0 - 2/(V_2 - 1/(V_4 - \dots))$ (21)
 (18)に対して: $0 = V_1 - 1/(V_3 - 1/(V_5 - \dots))$ (22)
 (19)に対して: $0 = V_2 - 1/(V_4 - 1/(V_6 - \dots))$ (23)
 (20)に対して: $0 = V_1 + 1/(V_3 - 1/(V_5 - \dots))$ (24)

を得る. これは固有値を得るための特性方程式である. 固有値の番号を確認しておく, 最小固有値から番号を付け

cos 展開の(21)から, 0, 2, 4, ...番目の固有値
 cos 展開の(22)から, 1, 3, 5, ...番目の固有値
 sin 展開の(23)から, 2, 4, 6, ...番目の固有値
 sin 展開の(24)から, 1, 3, 5, ...番目の固有値とする. どんな n に対する固有値も(21)~(24)の右辺の0点として計算すれば良いわけであるが, 図1のように, n が大きくなると0点と極が接近し, このままでは計算が困難であり, 大きな n の固有値は計算できない. そこで(21)~(24)を次のように変形する.

$$0 = V_n + G_n + H_n \tag{25}$$

ただし $G_n = -1/(V_{n+2} - 1/(V_{n+4} - \dots))$ (26)

$H_n = -1/(V_{n-2} - 1/(V_{n-4} - \dots - 1/(V_{2+d} - \alpha/(V_{0+d} + \beta)) \dots))$ (27)

ここに,
 (21)に対して, $d=0, \alpha=2, \beta=0$
 (22)に対して, $d=1, \alpha=1, \beta=-1$
 (23)に対して, $d=0, \alpha=0, \beta=0$
 (24)に対して, $d=1, \alpha=1, \beta=+1$
 このように変形すれば, 図2のように, $\lambda=40$ の付近を 図1と比較すれば分かるように (n が小さいので有利

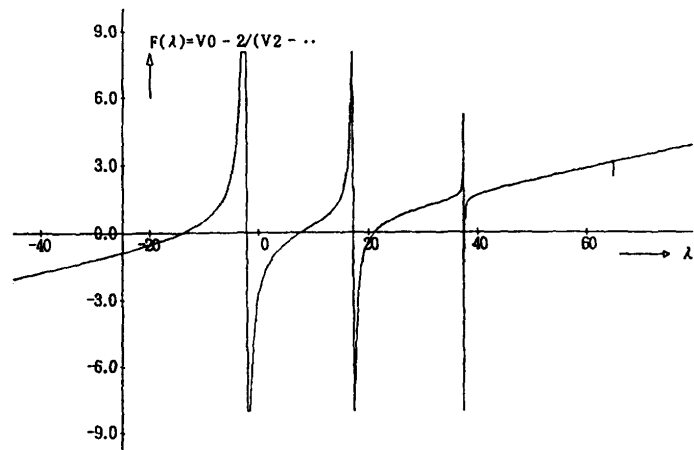


図1 $q=10$ の場合の(21) の方程式
 Fig. 1 Equation of (21), $q=10$.

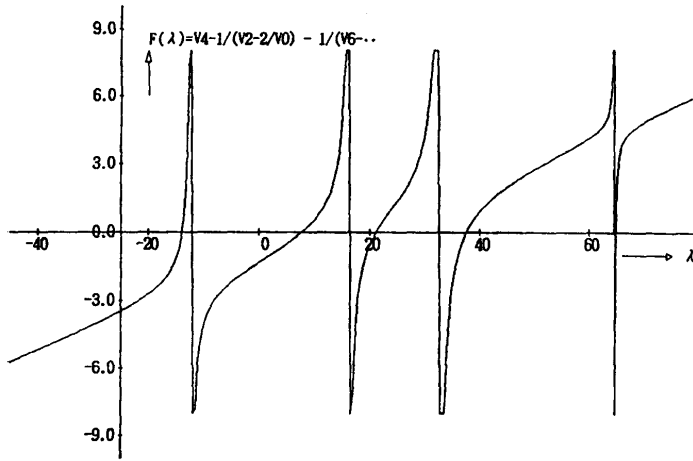


図2 $q=10, n=4$ の場合の(25)の方程式
Fig. 2 Equation of (25), $q=10, n=4$.

さがあまり明確でないかもしれないが) 0点の計算がしやすくなる。(25)の右辺は (n, q) が決まると, λ の関数と考えることができる。特性方程式(25)の根, すなわち固有値はニュートン法により求める。ただし, 連分数の値とその微分値は付録のように計算する。

4. 固有値の初期値の近似式

固有値は最初 q の増加関数である。 q が大きくなると, 減少関数に転ずる。これは区分的に近似式を作れば良いことを暗示している。そこで, q の全区間を

- 第1区間: $0 \leq q \leq Q_1$
- 第2区間: $Q_1 \leq q \leq Q_2$
- 第3区間: $Q_2 \leq q \leq Q_M$
- 第4区間: $Q_M \leq q < \infty$

と分ける。第4区間は漸近式(29)を使う。第1, 第2, 第3区間は, 5次多項式の最良近似式を使う。 Q_1 および Q_2 は, 各区間の最大誤差が等しくなるように決める。その最大誤差に, おおよそ, 見合うように, $Q_M = 4n^2 + 45$ と決めた。このように決めたのは, Q_M も最大誤差が等しくなるように最良近似式を求めるのが困難なためである。この Q_M は実際には少し大きく, $Q_M = 3n^2$ 程度で良かった。45の意味は $n=0$ のときの不都合を解消するためである。近似式の形は

次のように決めた。

- 第1区間は, $0 \leq q \leq Q_1$ で,
 $0 \leq X = q/Q_1 \leq 1$ とし
 $n=0, 2, 4, 6, 8$ の場合: $Y = X^2 P(X^2)$
 $n=1, 3, 5, 7, 9$ の場合: $Y = X P(X)$
 $n \geq 10$ の場合: $Y = X^2 P(X^4)$
- 第2区間は, $Q_1 \leq q \leq Q_2$ で,
 $0 \leq X = (X - Q_1)/(Q_2 - Q_1) \leq 1$ とし
 n のすべて, $Y = P(X)$
- 第3区間は, $Q_2 \leq q \leq Q_M$ で,
 $1 \geq X = \sqrt{Q_2/q} \geq \sqrt{Q_2/Q_M}$ とし,
 n のすべて, $Y = q P(X)$
- 第4区間は, $Q_M \leq q < \infty$ で
 n のすべて, $Y = (\text{漸近式 (29)})$ による

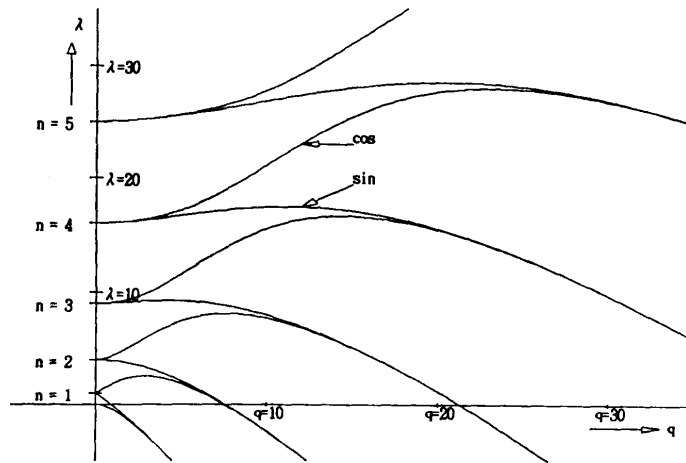


図3 固有値
Fig. 3 Eigenvalues.

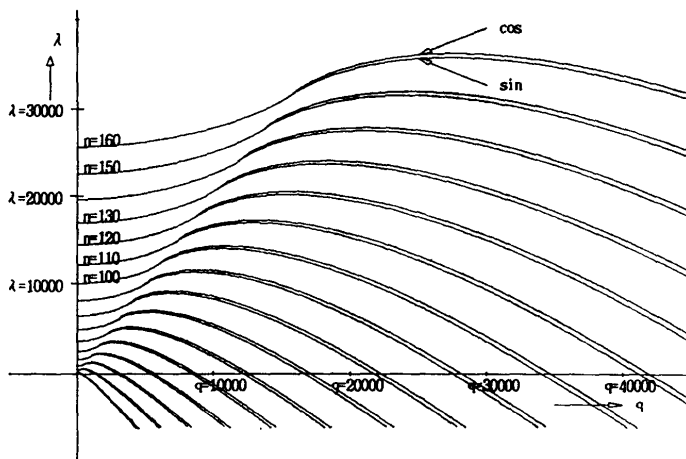


図4 固有値
Fig. 4 Eigenvalues.

値) $-n^2$ と Y を求め, さらに固有値の近似値は $a_n = n^2 + Y$ とする.

$P(X)$ は X の 5 次多項式である. 近似式の形は検討の余地があるが, 現在の程度で不都合はない. このようにして得られた a_n を使って, ニュートン法で改良する. 2~3 回の反復で 15 桁程度の固有値が得られる. このようにして得られた近似式を使ってグラフを描くと, パソコン FMR 60 で, 図 3 が約 32 秒, 図 4 が約 5 分 20 秒で得られた.

5. 初期値および計算原器

所定の値が確実に求まるようなニュートン法の初期値は, $q > Q_M$ なら漸近式 (29) を使い, $q \leq Q_M$ なら表を補間して求める.

表の作成は, $m+1$ 個の q の値, $q=0, H, 2*H, \dots, k*H, \dots, m*H$ に対する固有値を求める. $q=0$ の固有値は $\lambda=n^2$ であるから, $q=0$ の固有値を初期値として $q=H$ の固有値をニュートン法で求める. 固有値が確実に求められるような H を, したがって, m を選択する, と言うべきである. $q=H$ の固有値が求まれば, 次は $q=H$ の固有値を初期値としてニュートン法で $q=2H$ の固有値を求める. 以下同様にして表を完成する. 求めた固有値の表は, 配列表 $P(0: M)$ に蓄える.

任意の q の固有値の初期は, $q \leq Q_M$ の場合, 整数 $j = [q/H]$ を取って, 直線補間

$$a^j = P(j) + (q/H - j) * \{P(j+1) - P(j)\} \tag{28}$$

で求める. $q > Q_M$ から漸近式 (29) を使う. Mathieu 関数の固有値の計算原器は, 表作成, 補間法, ニュートン法からなる. これは Mathieu 関数の固有値だけでなく, いろいろな関数に対して有効な考え方である.

6. 固有値の漸近式

第 4 区間のニュートン法の初期値の算出には, $q \rightarrow \infty$ のときの固有値の漸近式を使う. この式は次のように表せる⁴⁾.

$$a_n = -q(\alpha_0 + \alpha_1 H + \alpha_2 H^2 + \alpha_3 H^3 + \alpha_4 H^4 + \alpha_5 H^5 + \alpha_6 H^6 + \alpha_7 H^7 + \dots) \tag{29}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2; \alpha_1 = -2m; \alpha_2 = (m^2 + 1)2^{-3} \\ \alpha_3 &= (m^3 + 3m)2^{-7}; \alpha_4 = (5m^4 + 34m^2 + 9)2^{-12} \\ \alpha_5 &= (33m^5 + 410m^3 + 405m)2^{-17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= (63m^6 + 1260m^4 + 2943m^2 + 486)2^{-20} \\ \alpha_7 &= (527m^7 + 15617m^5 + 69001m^3 + 41607m)2^{-25} \\ H &= 1/\sqrt{q} \\ m &= 2(n - KY) + 1; \text{もし } ce_n \text{ なら } KY=0; \\ &\text{もし } se_n \text{ なら } KY=1; \end{aligned}$$

7. 固有値の近似式の係数

現在, $n=0 \sim 161$ の固有値の近似式の係数が得られているが, その一部を表 1, 表 2 に示す.

A_k, B_k, C_k は第 1, 第 2, 第 3 区間の係数である. 最大誤差も示した. これらを使って固有値を計算するプログラムを作り, 文献 3) で, $s=4, q=100, n=0 \sim 15$ の場合の固有値 $be_n = (\cos \text{ の固有値})_n + 2q, bo_n = (\sin \text{ の固有値})_n + 2q$ の値を表 3 に示す. なお, 倍精度の計算結果である表 3 は, 4 倍精度で計算した値と比較すると, 最後の桁の次の桁で四捨五入されている. したがって, 表 3 は全桁正しい. 文献 3) は表 3 を丸めた結果と一致している.

表 1 $ce_m(z, q), m=0 \sim 4$ の場合の近似式の係数
Table 1 Coefficients of approximation for $ce_m(z, q), m=0 \sim 4$.

		$0 \leq x \leq Q1$	$Q1 \leq x \leq Q2$	$Q2 \leq x \leq QM$
CC COS		A0= -2.06666334	B0= -1.55493715	C0= -1.99965348
		A1= 0.92086632	B1= -2.85326651	C1= 0.95480185
	n = 0	A2= -0.77833083	B2= -0.62621338	C2= -0.03560153
	ERR=8.48E-6	A3= 0.61628865	B3= 0.35832754	C3= -0.05698133
	Q1=2.03335947	A4= -0.32485050	B4= -0.16237596	C4= 0.06382516
	Q2=4.34750420	A5= 0.07775258	B5= 0.03666272	C5= -0.03089097
CC COS		A0= 3.96892576	B0= 1.32897172	C0= -1.99529431
		A1= -1.99308728	B1= -1.69971640	C1= 1.95471613
	n = 1	A2= -0.78124599	B2= -3.33600347	C2= -0.09457391
	ERR=1.48E-5	A3= -0.85655460	B3= 1.97336475	C3= -0.28959433
	Q1=3.96783756	A4= 1.49413186	B4= -0.85163968	C4= 0.24943102
	Q2=9.02263176	A5= -0.50322758	B5= 0.17605926	C5= -0.09167586
CC COS		A0= 3.67467365	B0= 2.02390144	C0= -1.98731128
		A1= -3.98650256	B1= 6.42003203	C1= 2.94777300
	n = 2	A2= 5.58132975	B2= -2.62768983	C2= -0.15346313
	ERR=1.65E-4	A3= -6.05357916	B3= -7.06830356	C3= -1.10545353
	Q1=2.97503208	A4= 3.83242449	B4= 6.73151079	C4= 1.06077268
	Q2=10.54930693	A5= -1.02444530	B5= -1.95576970	C5= -0.42829759
CC COS		A0= 0.02007327	B0= 3.10282832	C0= -1.96085540
		A1= 1.63243752	B1= 8.95496351	C1= 3.20202322
	n = 3	A2= 4.38530290	B2= 0.05859123	C2= 0.38722767
	ERR=3.73E-4	A3= -2.09179480	B3= -9.75783136	C3= -2.60476289
	Q1=5.60409051	A4= -2.17154989	B4= 6.66529107	C4= 2.34330545
	Q2=15.36906467	A5= 1.32836044	B5= -1.46341966	C5= -0.87506175
CC COS		A0= 3.90822438	B0= 5.93551125	C0= -1.90970697
		A1= 7.72671094	B1= 13.44640473	C1= 2.85214217
	n = 4	A2= -8.03042099	B2= -1.69728121	C2= 1.32080297
	ERR=5.34E-4	A3= 0.08971783	B3= -15.62805461	C3= -3.83415065
	Q1=10.87650896	A4= 3.99782804	B4= 13.46127440	C4= 3.01303168
	Q2=25.21464250	A5= -1.75761349	B5= -3.73594750	C5= -9.74854645

表 2 $ce_m(z, q)$, $m=1\sim 4$ の場合の近似式の係数
Table 2 Coefficients of approximation for $ce_m(z, q)$, $m=1\sim 4$.

	$0 \leq X \leq Q1$	$Q1 \leq X \leq Q2$	$Q2 \leq X \leq QM$
CC SIN	A0= -3.52403365	B0= -4.54971702	C0= -2.00032910
	A1= -1.55620078	B1= -5.82907161	C1= 0.73472647
$n = 1$	A2= 0.71055723	B2= -0.50823370	C2= -0.17875294
ERR= 2.55E-6	A3= -0.19090919	B3= 0.20554142	C3= 0.01956991
Q1=3.52420674	A4= -0.00066570	B4= -0.07324277	C4= -0.01944716
Q2=7.47254148	A5= 0.01153507	B5= 0.01433729	C5= 0.00691832
CC SIN	A0= -5.06078574	B0= -4.19628620	C0= -2.00120709
	A1= 1.32815323	B1= -6.55589688	C1= 1.56561627
$n = 2$	A2= -0.76862347	B2= -1.60808179	C2= -0.38306740
ERR=3.92E-6	A3= 0.47147015	B3= 0.57092698	C3= 0.04175905
Q1=7.79311757	A4= -0.21306343	B4= -0.18042402	C4= -0.03685447
Q2=14.86762969	A5= 0.04656305	B5= 0.03196407	C5= 0.01081424
CC SIN	A0= -0.00139054	B0= -0.43549348	C0= -2.00546020
	A1= 4.55085528	B1= -3.16186975	C1= 2.38740736
$n = 3$	A2= -10.34837679	B2= -3.47643593	C2= -0.81331124
ERR=3.23E-5	A3= 8.41943603	B3= 0.80098218	C3= 0.20826261
Q1=8.47250707	A4= -3.85267969	B4= -0.00620311	C4= -0.17672560
Q2=18.21007988	A5= 0.79672675	B5= -0.04613732	C5= 0.05248332
CC SIN	A0= 4.21291916	B0= 1.41320253	C0= -2.01113409
	A1= -5.70245124	B1= -0.06271220	C1= 2.91742755
$n = 4$	A2= 5.98460506	B2= -4.48194166	C2= -1.18846740
ERR=1.01E-4	A3= -5.38305406	B3= -0.20843506	C3= 0.41308135
Q1=11.25225690	A4= 3.07519456	B4= 0.92983023	C4= -0.34060055
Q2=24.49678713	A5= -0.77401067	B5= -0.31487271	C5= 0.09845696

表 3 文献 3) で $s=100$ の場合の固有値の例
Table 3 Example of eigenvalues³⁾, $s=100$.

n	be_n	bo_n
0	9.743220453433	
1	28.685100309334	9.743221015316
2	46.477835272842	28.685139377750
3	62.964079444326	46.479058473379
4	77.805240580928	62.986489952742
5	90.050190985808	78.062765899454
6	98.975786716162	91.801071291811
7	107.534689001083	105.002957150834
8	119.524065165941	119.057988351286
9	135.076999881817	135.023356504905
10	153.230204804495	153.225680042373
11	173.643012376084	173.642713667149
12	196.207690642802	196.207674647458
13	220.873710808316	220.873710096597
14	247.611164942444	247.611164915651
15	276.400720044748	276.400720043883

8. む す び

Mathieu 関数は, Bessel 関数と類似の関数で, 数値計算的には, Bessel 関数体系より困難で複雑な関数体系である. 本論文は, Mathieu 関数の第 1 の難関である固有値の計算法について述べた. 提案の方法は係数が多いので総量を減らす工夫が必要である. たとえば, (n, q) の 2 変数近似を行って係数を減らす工夫は

有望であるが, まだ成功していない. また, q が複素数の場合は今後の研究を待ちたい.

なお, 本論文の数値やプログラム等は計算技術研究会から配付の予定である.

謝辞 本研究は日本大学工学部電気工学科鍛野秀三先生のお陰である. 心から感謝申し上げる. 先生は本研究の動機を与えられ, いろいろな文献提示を頂いた. また, 本論が陽の目を見たのは, 富士通株式会社 PP 事業部伊奈博君のお陰である. ここに謝意を表する.

参 考 文 献

- 1) McLachlan, N. W.: *Theory and Application of Mathieu Functions*, Dover Publ., N. Y. (1964).
- 2) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, sec. 20, pp. 722-750, Dover Publ., N. Y. (1965).
- 3) The Computation Laboratory of the National Applied Mathematics Laboratories National Bureau of Standards, *Tables Relating to Mathieu Functions, Characteristic Values, Coefficients, and Joining Factors*, Columbia University Press, New York (1951).
- 4) Goldstein, S.: *Mathieu Functions, Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, Vol. 23, pp. 303-336 (1927).
- 5) Bickley, W. G. and McLachlan, N. W.: *Mathieu Functions of Integral Order and Their Tabulation*, MTAC, Vol. 2, No. 1, pp. 1-11 (1946). [MTAC=Math. Comp.]
- 6) Clemm, S. D.: CACM of Algorithm 352, *Characteristic Values and Associated Solutions of Mathieu's Differential Equation*, Comm. ACM, Vol. 12, No. 7, pp. 399-407 (1969).
- 7) 日本数学会(編): 数学辞典・第 3 版, pp. 1174-1176, 岩波書店 (1988).
- 8) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: 岩波数学公式集 III, pp. 241-248, 岩波書店 (1957).
- 9) 小谷正雄, 橋本英典: 特殊関数・岩波講座現代応用数学, 第 7 章, pp. 127-189, 岩波書店 (1958).
- 10) 寺沢寛一(編), 小谷正雄(著): 自然科学者のための数学概論・応用編, pp. 146-189, 岩波書店 (1960).
- 11) 秋山守男: 応用特殊関数入門, 第 7 章, pp. 103-120, 電気書院 (1976).
- 12) 島村 敏, 植木節子, 関口利男: Mathieu の微分方程式の固有値の計算法と Mathieu 関数の

- 一つの展開公式, 信学会・電磁界理論研究資料, ETM-87-100 (1987).
- 13) 堀内和夫 (編), 三原義男 (著): 応用数理への道 (7章, 変数分離法による波動方程式の解法), pp. 234-279, コロナ社 (1989).
- 14) 一松 信: 初等関数の数値計算, pp. 126-128, 教育出版 (1974).
- 15) 山下眞一郎: 区分的最良近似について, 京大数解研・講究録 373 (1978. 11).
- 16) 山下眞一郎: 区分的最良近似およびそのプログラム, 情報処理学会論文誌, Vol. 33, No. 9, pp. 1143-1151 (1992).

付録 連分数の計算および微分計算¹⁴⁾

連分数

$$P_n/Q_n = b_0 + a_1/(b_1 + a_2/(b_2 + \dots + a_n/b_n) \dots)$$

の計算を上位 b_0 のほうから計算するには, 漸化式で

$$P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}$$

$$Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\text{ただし } P_{-1} = 1, P_0 = b_0; Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$$

とする. 誤差は,

$$e_n = P_n/Q_n - P_{n-1}/Q_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1} a_0 a_1 \dots a_n / (Q_n Q_{n-1})$$

から推定する. 微分値は,

$$(P_n/Q_n)' = (P_n' Q_n - P_n Q_n') / Q_n^2$$

および漸化式の微分

$$P_k' = b_k' P_{k-1} + b_k P_{k-1}' + a_k' P_{k-2} + a_k P_{k-2}'$$

$$Q_k' = b_k' Q_{k-1} + b_k Q_{k-1}' + a_k' Q_{k-2} + a_k Q_{k-2}'$$

$$\text{ただし } P_{-1}' = 0, P_0' = b_0'; Q_{-1}' = 0, Q_0' = 0$$

から計算する.

以上を(25)と照らして, 特性方程式を

$$F(\lambda) = V_n + G_n + H_n$$

と置いて, $F(\lambda)$ の0点を求める. 計算は

$$a_k = -1, a_k' = 0$$

$$b_k = V_{n+2k} = \{\lambda - (n \pm 2k)^2\} / q, b_k' = 1/q$$

および

$$P_k = b_k P_{k-1} - P_{k-2}$$

$$Q_k = b_k Q_{k-1} - Q_{k-2}$$

$$P_k' = P_{k-1}/q + b_k P_{k-1}' - P_{k-2}'$$

$$Q_k' = Q_{k-1}/q + b_k Q_{k-1}' - Q_{k-2}'$$

から, 関数値 $F(\lambda)$, 微分値 $F(\lambda)'$ は計算できる. また, 誤差は

$$e_n = 1 / \{Q_n Q_{n-1}\}$$

から推定する.

(平成4年1月31日受付)

(平成4年9月10日採録)

山下眞一郎 (正会員)

昭和12年宮崎県えびの市生. 昭和31年鹿児島工業高等学校卒業.

昭和49年日本大学理学博士. 昭和32年8月有隣電機精機(株)(日本最初の計算センタ)に入社. 計算機の

保守および受託計算に従事. 高次代数方程式・最良近似などを研究. 昭和38年FACOM 231 ALGOL コンパイラ開発. 昭和40年4月現富士通(株)に移籍. 昭和42年5月FACOM 230-60 FORTRAN コンパイラ開発. 昭和50年から科学計算ライブラリ SSL 開発. 昭和48.5~53.4本学会誌編集委員. 昭和53.5~56.4本誌論文編集委員. 昭和56.5~58.4本学会数値解析研究会幹事. 平成4年4月日本大学理工学部教授に就任. 日本数学会, 日本応用数理学会各会員.