# 9段数7次陽的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解について†

田 中 正 次†† 笠 原 栄 二†††
村 松 茂†††† 山 下 茂††

$s$段数$p$次陽的 Runge-Kutta 法の係数の誘導法については，Cooper と Verner および Shanks による一般的かつ理論的な研究がある．Butcherは，前者の提案する方法を用いて，数値的に零係数の多い9段数7次法を導いている．しかし，彼らの方法は原理を簡潔に述べたもので，いろいろな観点から公式の係数を最適化するのに有効に利用するためには，より具体的かつ直接的な表現が必要であろう．そこで著者たちは，まず Butcher の簡単化の仮定を導入することにより，7次法の85個の次数条件式から一次従属なものを除き，等価な28個の条件式を得た．ついで，Butcher の仮定を含む若干の仮定と28個の次数条件式から，Shanks の公式を特殊な場合として含む，4自由度をもつ陽的な一解系の一般式を導いた．これにより自由パラメータが実用的な範囲で変動するとき，打ち切り誤差・安定性・丸め誤差などの諸特性の大域的な領域における変化の模様をとらえることが容易に可能になり，ひいてはいろいな角度から公式を最適化する道が開かれた．

## 1. はじめに

$s$段数$p$次陽的 Runge-Kutta 法（以下において$s$段数$p$次陽的 Runge-Kutta 法は，$s$段数$p$次法または単に$p$次法と略称される.）の係数の誘導法については，Cooper と Verner[1]および Shanks[2]による一般的かつ理論的な研究がある．Butcher は，前者の提案する方法を用いて，数値的に零係数の多い9段数7次法を導いている[3]．しかし，彼らの方法はむしろ原理を簡潔に述べたもので，いろいろな観点から公式を最適化するためには，より具体的かつ直接的な表現が必要であろう．

そこで著者たちは，まず Butcher の簡単化の仮定を導入することにより，7次法の85個の条件式の中から一次従属なものを除き，それと等価な28個の条件式を得た☆．ついで，Butcher の仮定を含む若干の仮定と前記の28個の条件式から，Shanks の公式を特殊な場合として含む，4自由度をもつ一つの陽的な解系の一般式を導いた．これにより，自由パラメータが実用上有意義な範囲で変動するとき，打ち切り誤差・安定性・丸め誤差などの諸特性の大域的な領域における変化の模様をとらえることが容易に可能になり，ひいてはいろいろな角度から公式を最適化する道が開かれた．

この研究は，姉妹編の“9段数7次法の最適化”[4]の基礎編で，その準備として行われたものである．

以下2章において9段数7次法の次数条件式について述べ，3章において得られた解系を示す．また4章において，Shanks の公式がこの解系に含まれることを示す[2]．

## 2. 9段数7次法と次数条件式

与えられた初期値問題を

$$y'=f(x,y),\ \ y(x_0)=y_0 \tag{2.1}$$

とする．ここで $y$, $y'$ および $f$ は関数ベクトル，$y_0$ は定数ベクトルで，$f$ は十分滑らかなものとしよう．

初期値問題(2.1)において $x=x_n$ における解 $y_n$ が知られているとき，$x=x_n+h$ における近似解 $y_{n+1}$ を次式によって求める方法(2.2)を，9段数陽的 Runge-Kutta 法という．

$$\begin{aligned} k_1&=hf(x_n,y_n)\\ k_i&=hf\left(x_n+c_ih,\ y_n+\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}k_j\right)\quad (i=2,3,\cdots,9)\\ y_{n+1}&=y_n+\sum_{i=1}^{9}a_ik_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

特に，$y_n=y(x_n)$（ここで $y(x)$ は(2.1)式の理論解である）のときの(2.2)式の $y_{n+1}$ の右辺および $y(x_n+h)$ の両者の $x=x_n$ に関するテイラー展開が，関数 $f$ に関係なく $h^7$ の項まで正確に一致するとき，公式(2.2)は7次法であるといわれる．ここでは(2.2)が7次法である場合について考察する．公式(2.2)は，簡

† On a Solution of the Order Conditions for the Nine-Stage Seventh-Order Explicit Runge-Kutta Method by MASATSUGU TANAKA (Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University), EIJI KASAHARA (Kofu Nippon Denki Ltd.), SHIGERU MURAMATSU (Fuji Xerox Ltd.) and SHIGERU YAMASHITA (Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University).

†† 山梨大学工学部電子情報工学科
††† 甲府日本電気(株)
†††† 富士ゼロックス(株)

☆ 28個の条件式中にはまだ一次従属なものも含まれている．

**表 1**　公式(2.2)の係数マトリックスによる表示
Table 1　The representation of the formula (2.2) by the array numbers that characterize it.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_2 & b_{21} & & & & \\
c_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\
c_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
c_9 & b_{91} & b_{92} & b_{93} & \cdots & b_{98} \\
\hline
 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\ a_8 & a_9
\end{array}
$$

単のために次のような係数マトリックス（**表 1**）を用いて表示することが多い．4章に示す Shanks の公式の表示もこの慣行に従う．

表 1 に示す係数パラメータについては，慣例に従い

$$c_i=\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i=2, 3, \cdots, 9) \tag{2.3}$$

を仮定するので，決定すべきパラメータは 45 個である．

根付き木[3]を用いて 9 段数 7 次法の次数条件式を求めると，53 パラメータに関する 85 個の方程式系が得られる．このままではパラメータ数よりも方程式数の方が多いので，解の存在も疑わしい．そこで，次数条件式中に一次従属な関係を作って条件式数を減らすために，次に示すような簡単化の仮定を導入する．ただし，以下において $1\leqq i, j, k, l, m\leqq 9$，$i>j>k>l>m$ および $c_1=0$ であるものとする．

$$\sum_{i=1}^{9} a_i b_{ij}=a_j(1-c_j) \quad (j\geqq 2) \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{9} b_{ij} c_j=\frac{1}{2}c_i^2 \quad (i\geqq 3) \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{9} b_{ij} c_j^2=\frac{1}{3}c_i^3 \quad (i\geqq 4) \tag{2.6}$$

$$a_2=0 \tag{2.7}$$

$$a_3=0 \tag{2.8}$$

$$a_8 \neq 1 \text{ であり } b_{i2}=0 \quad (i\geqq 4) \tag{2.9}$$

上記の仮定と結びついた根付き木に基づく論法（文献 3)参照）により，9 段数 7 次法の 85 個の次数条件式は，11 個の次数条件式と 3 個の付加条件に減らすことができるが，ここでは，若干の冗長度をもつ次に示す 28 個の方程式を解いて次数条件式の解を得た．

$$\sum_i a_i=1 \tag{2.10}$$

$$\sum_i a_i c_i=1/2 \tag{2.11}$$

$$\sum_i a_i c_i^2=1/3 \tag{2.12}$$

$$\sum_i a_i c_i^3=1/4 \tag{2.13}$$

$$\sum_i a_i c_i^4=1/5 \tag{2.14}$$

$$\sum_i a_i c_i^5=1/6 \tag{2.15}$$

$$\sum_i a_i c_i^6=1/7 \tag{2.16}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i b_{ij} b_{jk} c_k=1/30 \tag{2.17}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l=1/144 \tag{2.18}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i b_{ij} b_{jk} c_k^2=1/72 \tag{2.19}$$

$$\sum_{i,j} a_i c_i b_{ij} c_j^3=1/24 \tag{2.20}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i^2 b_{ij} b_{jk} c_k=1/36 \tag{2.21}$$

$$\sum_{i,j,k,l,m} a_i c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} c_m=1/840 \tag{2.22}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l^2=1/420 \tag{2.23}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i b_{ij} b_{jk} c_k^3=1/140 \tag{2.24}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i c_i b_{ij} c_j b_{jk} b_{kl} c_l=1/210 \tag{2.25}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i b_{ij} c_j b_{jk} c_k^2=1/105 \tag{2.26}$$

$$\sum_{i,j} a_i c_i b_{ij} c_j^4=1/35 \tag{2.27}$$

$$\sum_{i,j,k,l,m} a_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{il} b_{lm} c_m=1/252 \tag{2.28}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i c_i^2 b_{ij} b_{jk} b_{kl} c_l=1/168 \tag{2.29}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i^2 b_{ij} b_{jk} c_k^2=1/84 \tag{2.30}$$

$$\sum_{i,j} a_i c_i^2 b_{ij} c_j^3=1/28 \tag{2.31}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i^3 b_{ij} b_{jk} c_k=1/42 \tag{2.32}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i b_{ij} c_j b_{jk} c_k=1/48 \tag{2.33}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i^2 b_{ij} c_j b_{jk} c_k=1/56 \tag{2.34}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i c_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{jl} c_l=1/140 \tag{2.35}$$

$$\sum_{i,j,k,l} a_i c_i b_{ij} b_{jk} c_k b_{kl} c_l=1/280 \tag{2.36}$$

$$\sum_{i,j,k} a_i c_i b_{ij} c_j^2 b_{jk} c_k=1/70 \tag{2.37}$$

## 3.　9 段数 7 次法の次数条件式の解

9 段数 7 次法の 85 個の次数条件式を解くかわりに，ここでは簡単化の条件 (2.4)～(2.9) と，これを導入することにより 85 個の条件式と等価になった 28 個の方程式 (2.10)～(2.37) および係数間の制約条件 (2.3) とを連立にして，以下のような解系を見出した．これが実際解系であることは，数式処理によって確認されているが，直接方程式系に代入して計算することによっても確かめられる．得られた $c_4$, $c_5$, $c_7$ および $c_8$ を

自由パラメータとする解を次に示す.

$$c_2=4c_4/9 \tag{3.1}$$

$$c_3=2c_4/3 \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} c_6=&\{(c_4+c_5)(7c_4c_5+1)-12c_4c_5\}/[c_4c_5\{105c_4c_5\\ &-70(c_4+c_5)+52\}+14(c_4^2+c_5^2)\\ &-12(c_4+c_5)+3] \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$c_9=1 \tag{3.4}$$

いま

$$\begin{aligned} &pa(c_i, c_j, c_k, c_l, c_m)\\ &\quad=420(c_i-c_j)(c_i-c_k)(c_i-c_l)(c_i-c_m)(1-c_i)c_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &qa(c_i, c_j, c_k, c_l)\\ &\quad=7c_ic_j(10c_kc_l-5c_k-5c_l+3)\\ &\qquad-7(c_i+c_j)(5c_kc_l-3c_k-3c_l+2)\\ &\qquad+21c_kc_l-14c_k-14c_l+10 \end{aligned}$$

とおくと,

$$a_4=qa(c_5, c_6, c_7, c_8)/pa(c_4, c_5, c_6, c_7, c_8) \tag{3.5}$$

$$a_5=qa(c_4, c_6, c_7, c_8)/pa(c_5, c_4, c_6, c_7, c_8) \tag{3.6}$$

$$a_6=qa(c_7, c_5, c_4, c_8)/pa(c_6, c_4, c_5, c_7, c_8) \tag{3.7}$$

$$a_7=qa(c_5, c_8, c_4, c_6)/pa(c_7, c_4, c_5, c_6, c_8) \tag{3.8}$$

$$a_8=qa(c_5, c_7, c_6, c_4)/pa(c_8, c_4, c_5, c_6, c_7) \tag{3.9}$$

が得られる. また,

$$\begin{aligned} qa_9=&7c_5c_7\{10c_6c_8(3c_4-2)-5(c_6+c_8)(4c_4-3)\\ &+3(5c_4-4)\}-7(c_5+c_7)\{5c_6c_8(4c_4-3)\\ &-3(c_6+c_8)(5c_4-4)+2(6c_4-5)\}\\ &+21c_6c_8(5c_4-4)-14(c_6+c_8)(6c_4-5)\\ &+10(7c_4-6) \end{aligned}$$

$$pa_9=420(c_4-1)(c_5-1)(c_6-1)(c_7-1)(c_8-1)$$

とおくと,

$$a_9=qa_9/pa_9 \tag{3.10}$$

仮定により

$$a_2=0 \tag{3.11}$$

$$a_3=0 \tag{3.12}$$

であるから

$$a_1=1-\sum_{i=4}^{9} a_i \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} b_{87}=&-\{7c_5c_6(5c_4-2)-7(c_5+c_6)(2c_4-1)\\ &+7c_4-4\}/\{840(c_4-c_7)(c_5-c_7)(c_6-c_7)\\ &\cdot(c_8-1)a_8c_7\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} b_{76}=&\{21c_4c_5(5c_8-3)-14(c_4+c_5)(3c_8-2)\\ &+3(7c_8-5)\}/\{2520(c_4-c_6)(c_5-c_6)\\ &\cdot(c_7-c_8)(c_7-1)a_7c_6\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} b_{86}=&-[120\{(c_4-c_6)(c_5-c_6)(c_7-1)a_7c_6b_{76}\\ &+(c_4-c_7)(c_5-c_7)(c_8-1)a_8c_7b_{87}\}\\ &+c_4(5c_5-2)-2c_5+1]/\{120(c_4-c_6)\\ &\cdot(c_5-c_6)(c_8-1)a_8c_6\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$b_{21}=c_2 \tag{3.17}$$

$$b_{32}=c_4/2 \tag{3.18}$$

$$b_{31}=c_3-b_{32} \tag{3.19}$$

$$b_{43}=3c_4/4 \tag{3.20}$$

$$b_{53}=\{3c_5^2(3c_4-2c_5)\}/\{4c_4^2\} \tag{3.21}$$

$$b_{54}=-\{(c_4-c_5)c_5^2\}/c_4^2 \tag{3.22}$$

となる.

$b_{83}$ の分母を $pb_{83}$ とおくと,

$$\begin{aligned} pb_{83}=&6[(c_6-c_8)(c_6-1)(c_8-1)a_6a_8b_{87}\\ &-a_7(c_7-c_8)(c_7-1)\{(c_7-1)a_7b_{76}\\ &+(c_8-1)a_8b_{86}\}](c_4-c_5)(c_8-1)a_8c_4c_5 \end{aligned}$$

となる. また $b_{83}$ の分子 $qb_{83}$ はおびただしい数の項から構成されているので, 以下に示すように, 少数項から成る ANS 21 から ANS 1 までを逐次計算する方法によって求める. そのとき最終的に得られる ANS 1 が分母 $qb_{83}$ を与える.

すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{ANS\,21}:=&[\langle\{2(c_8-1)c_8+3c_5\}c_8^2\\ &+6(c_5-c_7)(c_8-1)b_{87}c_7\rangle a_8\\ &-(3c_5-2c_7)(c_7-1)a_7c_7^2](c_{7-1})a_6a_7c_5c_7b_{43} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ANS\,20}:=&a_6a_7c_5b_{43}\llbracket[\{2(3b_{87}c_7^2-c_8^3)(c_7+1)(c_8-1)\\ &\cdot c_6-3c_5c_7c_8^3\}a_8+\langle 6c_5b_{76}(c_7-1)\\ &-c_7\{2c_7(c_7^2-1)+3c_5\}\rangle a_7c_6c_7](c_7-1)\\ &-6(c_5-c_3)(c_5-1)(c_7-1)a_5c_3c_7b_{53}\rrbracket\\ &+\mathrm{ANS\,21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ANS\,19}:=&a_6a_7c_5c_6b_{43}\llbracket[\langle 2\{c_7^2+3b_{76}(2c_7-1)\}c_6\\ &+3(c_7-1)c_5c_7^3\rangle a_7c_7+3\{c_8^2(c_7+1)\\ &+2c_7b_{86}-2(c_7+1)b_{87}c_7\}(c_7-1)\\ &\cdot(c_8-1)a_8c_5]+6(c_5-c_3)(c_5-1)\\ &\cdot(c_7+1)(c_7-1)a_5c_3b_{53}\rrbracket+\mathrm{ANS\,20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ANS\,18}:=&-a_6a_7c_5c_6^2b_{43}\llbracket[\langle 3\{c_7^2+2b_{76}(c_7+1)\}\\ &\cdot(c_7-1)^2c_5-2\{c_7(c_7-2)\\ &-3b_{76}\}c_7^3\rangle a_7+2\{(3c_7b_{86}-c_8^3)\\ &+3b_{87}c_7^2\}(c_7-1)(c_8-1)a_8]\\ &-3(c_7-1)a_6c_5c_7\rrbracket+\mathrm{ANS\,19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ANS\,17}:=&-a_6a_7c_5c_6^2b_{43}[3\langle\{2b_{86}(c_7+1)+c_8^2\\ &-2b_{87}c_7\}(c_7-1)(c_8-1)a_8c_5\\ &-2a_7c_6b_{76}\rangle+6(c_5-c_3)(c_5-1)\\ &\cdot(c_7-1)a_5c_3b_{53}+2(c_7-1)a_6c_6c_7]\\ &+\mathrm{ANS\,18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ANS\,16}:=&a_6a_7c_5c_6^3b_{43}\llbracket 6[\langle\{c_7(c_7-1)-1\}c_7\\ &+(c_7-1)^2(c_5-c_6)\rangle a_7b_{76}\\ &+\langle\{(c_7+1)(c_8-1)+c_6\}\\ &+(c_8-1)c_5\rangle(c_7-1)a_8b_{86}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-(3c_5-2c_6)(2c_7+1)(c_7-1)a_6\rrbracket\\
&+\mathrm{ANS}\,17
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,15:=a_7\llbracket 2[&\{(3b_{87}c_7^2-c_8^3)(c_8-1)c_4c_7b_{53}\\
&-3c_5c_6^4c_8b_{86}b_{43}\}a_8-(c_7-1)a_7c_4c_7^4b_{53}]\\
&\cdot(c_7-1)a_6-6\{(c_5-1)(c_7-1)a_6c_3^2b_{53}\\
&-a_7c_5^2b_{76}\}a_5c_4c_7b_{53}+(c_7-c_6+2)\\
&\cdot(3c_5-2c_6)(c_7-1)a_6^2c_5c_6^4b_{43}\rrbracket+\mathrm{ANS}\,16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,14:=-c_4b_{53}\llbracket 6[&\langle(c_7-1)^2c_5(c_7-c_5+1)\\
&-(c_7-2)c_7^2\rangle a_7^2b_{76}-(c_5-1)(c_8-1)a_8\\
&\cdot\{(c_5-c_7)(c_7-1)a_7b_{86}+a_6b_{87}c_5\}]\\
&\cdot a_5c_5^2+2(c_7-1)a_6a_7^2c_6c_7^3\rrbracket+\mathrm{ANS}\,15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,13:=-2a_6c_4c_6b_{53}\llbracket[&\langle 3\{(c_7+1)(c_7-1)(c_8-1)\\
&-c_6\}b_{87}c_7^2-\{(c_7+1)(c_8-1)c_8^3\\
&-3c_6c_7b_{86}\}(c_7-1)\rangle a_8+\{(c_7^2-3b_{76})\\
&\cdot(c_7-1)c_6-c_7^4\}(c_7-1)a_7c_7]a_7\\
&+3\{(c_5+1)(c_8-1)a_8b_{87}c_5^2-(c_7+1)\\
&\cdot(c_7-1)a_7c_3^2b_{53}\}(c_5-1)a_5\rrbracket+\mathrm{ANS}\,14
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,12:=a_6c_4c_6^2b_{53}\llbracket 2[&\langle\{3b_{86}(\!(c_7c_8+c_6(c_7+1))\!)\\
&-c_8^3(c_8-1)\}(c_7-1)+3\{(c_8-1)c_7\\
&-c_8\}b_{87}c_7^2\rangle a_8-3(c_7+1)(c_7-1)^2\\
&\cdot a_7c_6b_{76}]a_7-6\{(c_7-1)a_7c_3^2b_{53}\\
&-(c_8-1)a_8b_{87}c_5^2\}(c_5-1)a_5\\
&+2(c_7-1)a_6a_7c_6c_7\rrbracket+\mathrm{ANS}\,13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,11:=-(c_7-1)a_6a_7c_4[&6\langle\{(c_7+1)c_8\\
&-(c_8-1)c_6\}a_8b_{86}-(c_7-1)a_7c_6b_{76}\rangle c_6^3b_{53}\\
&-6\{(\!(c_6(c_7+1)-c_7)\!)c_5+(c_6-c_7)\\
&\cdot(c_6-1)\}a_5c_5^2b_{43}b_{54}+2\{(2c_7+1)\\
&-(c_7+2)c_6+c_6^2\}a_6c_6^4b_{53}]+\mathrm{ANS}\,12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,10:=a_7c_4\llbracket 6[&\{(c_5-1)c_3c_4c_7b_{53}^2-c_5^3c_6^2b_{43}b_{54}\}\\
&\cdot(c_7-1)a_6-c_4c_5b_{53}\langle\{(c_7-1)^2c_7-c_5\}\\
&\cdot a_7b_{76}+(c_7-1)(c_8-1)a_8c_7b_{86}\rangle]a_5\\
&-3\{(2b_{87}c_7-c_8^2)(c_8-1)a_8-(c_7-1)a_7c_7^2\}\\
&\cdot(c_7-1)a_6c_4c_7b_{53}\rrbracket+\mathrm{ANS}\,11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,9:=c_4^2b_{53}\llbracket 6[&\{(c_7^2-c_7-1)c_7-(c_7-1)^2c_5\}a_7^2b_{76}\\
&+(c_7-c_5+1)(c_7-1)(c_8-1)a_7a_8b_{86}\\
&-(c_5-1)(c_8-1)a_6a_8b_{87}]a_5c_5^2\\
&-3\{2b_{76}(c_7-1)-c_7\}(c_7-1)a_6a_7^2c_6c_7\rrbracket\\
&+\mathrm{ANS}\,10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,8:=-[&3\langle\{(c_7+1)(c_8^2-2c_7b_{87})+2c_7b_{86}\}\\
&\cdot(c_7-1)(c_8-1)a_8+\{(c_7-1)c_7^4\\
&-2c_6b_{76}\}a_7\rangle a_7-6\{(c_5+1)(c_8-1)a_8b_{87}c_5\\
&-(c_7+1)(c_7-1)a_7c_3b_{53}\}(c_5-1)a_5\\
&+3(c_7-1)a_6a_7c_6c_7]a_6c_4^2c_6b_{53}+\mathrm{ANS}\,9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,7:=3a_6c_4^2c_6^2b_{53}\langle a_7[&\{2b_{86}(c_7+1)+c_8^2\\
&-2b_{87}c_7\}(c_7-1)(c_8-1)a_8\\
&+\{c_7^3+2(b_{76}-1)c_7^2-(2b_{76}-1)c_7-2b_{76}\}\\
&\cdot a_7c_7]+2a_5\{(c_8-1)a_5b_{87}a_8\\
&-(c_7-1)a_7c_3b_{53}\}\rangle+\mathrm{ANS}\,8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,6:=6[&\langle a_7(c_7-1)(c_3c_6^2b_{53}^2+c_5c_7b_{43}b_{54})\\
&+a_7b_{43}b_{54}\{c_7(1-c_7)-c_6\}\rangle\\
&-(c_8-1)a_8a_8c_6^2b_{53}b_{87}]a_5a_6c_4^2c_5\\
&+3(c_7-1)a_6a_7c_4^2c_6^3b_{53}\langle\{c_6^2-(c_7+2)c_6\\
&+(2c_7+1)\}a_6-2\{(c_7-1)a_7b_{76}\\
&+(c_8-1)a_8b_{86}\}\rangle+\mathrm{ANS}\,7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,5:=6a_7b_{43}\llbracket[&(c_5-c_3)(c_6-c_7)(c_6-1)c_5b_{43}\\
&+c_3c_4c_7b_{53}\}a_6c_3+(c_7-1)a_7c_4c_5^2c_7b_{76}]\\
&\cdot(c_7-1)a_4-[(c_7-1)\{(c_7-c_6+1)c_5\\
&+c_6-c_7^2\}]a_5a_6c_4^2c_5c_6b_{54}\rrbracket+\mathrm{ANS}\,6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,4:=-\llbracket 6[&\langle\{(c_5-c_3)(c_6-c_7)(c_6-1)c_5b_{43}\\
&+(c_7-c_6+1)c_3c_6b_{53}\}(c_7-1)a_7c_3\\
&+(c_6-1)(c_8-1)a_8b_{87}c_5^2c_6\rangle a_6\\
&-(c_7-1)(c_8-1)a_7a_8c_5^2c_7b_{86}]a_4c_4b_{43}\\
&-\mathrm{ANS}\,5\rrbracket
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,3:=6[&\langle\{(c_7^2-c_3-1)c_6-(c_7-1)(c_3+1)c_7\}\\
&\cdot a_7c_3b_{53}-(c_8-1)a_8b_{87}c_5^2\rangle a_6\\
&-\{(c_7+1)c_5+c_7\}\{(c_7-1)a_7b_{76}\\
&+(c_8-1)a_8b_{86}\}(c_7-1)a_7c_5]a_4c_4^2b_{43}\\
&+\mathrm{ANS}\,4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,2:=6\llbracket[&\langle\{(c_6-1)+c_5c_6\}c_6+c_4\rangle(c_8-1)a_8b_{87}c_5\\
&-\langle\{(c_7-1)(c_3+1)c_6-c_3c_7^2\}c_6\\
&-(c_7-1)c_4c_7\rangle a_7c_3b_{53}]a_6-\{(2c_7-1)c_5\\
&-(c_7+1)(c_7-1)^2\}a_7^2c_4c_5b_{76}\\
&+(c_7+1)(c_7-1)(c_8-1)a_7a_8c_4c_5b_{86}\rrbracket a_4c_4^2b_{43}\\
&+\mathrm{ANS}\,3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ANS}\,1:=-6\llbracket[&\langle(c_6-1)(c_5-c_4)+c_6^2\rangle(c_8-1)a_8b_{87}c_5\\
&+(c_7-c_6+1)(c_7-1)a_7c_3c_6b_{53}]a_6\\
&+\{(c_7-1)^2c_4-c_5c_7^2\}a_7^2c_5b_{76}\\
&+(c_4-c_5)(c_7-1)(c_8-1)a_7a_8c_5b_{86}\rrbracket a_4c_4^3b_{43}\\
&+\mathrm{ANS}\,2
\end{aligned}$$

$$qb_{83}=\mathrm{ANS}\,1$$

以上の結果から

$$b_{83}=qb_{83}/pb_{83} \tag{3.23}$$

が得られる☆.

$$\begin{aligned}
b_{73}=&\{(c_4-c_6)(c_4-1)a_4b_{43}+(c_5-c_6)(c_5-1)a_5b_{53}\\
&-(c_6-c_8)(c_8-1)a_8b_{83}\}/\{(c_6-c_7)(c_7-1)a_7\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

---

☆ レフェリーから，解系を導く計算の順序を $b_{63}\to b_{73}\to b_{83}\to b_{93}$ と変更することにより，$b_{83}$ の計算式が著しく簡単になるとの指摘があった.

$$b_{63}=[-\{(c_4-c_7)(c_4-1)a_4b_{43}+(c_5-c_7)(c_5-1)a_5b_{53}-(c_7-c_8)(c_8-1)a_8b_{83}\}]/\{(c_6-c_7)(c_6-1)a_6\} \tag{3.25}$$

$$b_{64}=[-\{6(c_4-c_7)(c_4-1)(c_5-c_3)a_4c_3b_{43}+(3c_5-2c_6)(c_6-c_7)(c_6-1)a_6c_6^2+6(c_5-c_7)(c_5-c_3)(c_5-1)a_5c_3b_{53}-6(c_5-c_3)(c_7-c_8)(c_8-1)a_8c_3b_{83}\}]/\{6(c_4-c_5)(c_6-c_7)(c_6-1)a_6c_4\} \tag{3.26}$$

$$b_{65}=\{(3c_4-2c_6)(c_6-c_7)(c_6-1)a_6c_6^2+6(c_4-c_7)(c_4-c_3)(c_4-1)a_4c_3b_{43}+6(c_4-c_3)(c_5-c_7)(c_5-1)a_5c_3b_{53}-6(c_4-c_3)(c_7-c_8)(c_8-1)a_8c_3b_{83}\}/\{6(c_4-c_5)(c_6-c_7)(c_6-1)a_6c_5\} \tag{3.27}$$

$$b_{75}=[-\{(6c_4c_6b_{76}-3c_4c_7^2-6c_6^2b_{76}+2c_7^3)(c_6-c_7)\cdot(c_7-1)a_7+6(c_4-c_6)(c_4-c_3)(c_4-1)a_4c_3b_{43}+6(c_4-c_3)(c_5-c_6)(c_5-1)a_5c_3b_{53}-6(c_4-c_3)(c_6-c_8)(c_8-1)a_8c_3b_{83}\}]/\{6(c_4-c_5)(c_6-c_7)(c_7-1)a_7c_5\} \tag{3.28}$$

$$b_{74}=\{6(c_4-c_6)(c_4-1)(c_5-c_3)a_4c_3b_{43}+(6c_5c_6b_{76}-3c_5c_7^2-6c_6^2b_{76}+2c_7^3)(c_6-c_7)(c_7-1)a_7+6(c_5-c_6)(c_5-c_3)(c_5-1)a_5c_3b_{53}-6(c_5-c_3)(c_6-c_8)(c_8-1)a_8c_3b_{83}\}/\{6(c_4-c_5)(c_6-c_7)(c_7-1)a_7c_4\} \tag{3.29}$$

$$b_{85}=[-\{6(c_4-c_7)b_{87}c_7+3(2c_6b_{86}-c_8^2+2c_3b_{83})c_4-6c_6^2b_{86}+2c_8^3-6c_3^2b_{83}\}]/\{6(c_4-c_5)c_5\} \tag{3.30}$$

$$b_{84}=\{6(c_5-c_7)b_{87}c_7+3(2c_6b_{86}-c_8^2+2c_3b_{83})c_5-6c_6^2b_{86}+2c_8^3-6c_3^2b_{83}\}/\{6(c_4-c_5)c_4\} \tag{3.31}$$

$$b_{98}=-\{(c_8-1)a_8\}/a_9 \tag{3.32}$$

$$b_{97}=-\{(c_7-1)a_7+a_8b_{87}\}/a_9 \tag{3.33}$$

$$b_{96}=-\{(c_6-1)a_6+a_7b_{76}+a_8b_{86}\}/a_9 \tag{3.34}$$

$$b_{95}=-\{(c_5-1)a_5+a_6b_{65}+a_7b_{75}+a_8b_{85}\}/a_9 \tag{3.35}$$

$$b_{94}=-\{(c_4-1)a_4+a_5b_{54}+a_6b_{64}+a_7b_{74}+a_8b_{84}\}/a_9 \tag{3.36}$$

$$b_{93}=-\{2c_4b_{94}+2c_5b_{95}+2c_6b_{96}+2c_7b_{97}+2c_8b_{98}-1\}/\{2c_3\} \tag{3.37}$$

仮定により

$$b_{42}=b_{52}=b_{62}=b_{72}=b_{82}=b_{92}=0 \tag{3.38}$$

であるから，

$$b_{41}=c_4-b_{43} \tag{3.39}$$

$$b_{51}=c_5-b_{53}-b_{54} \tag{3.40}$$

$$b_{61}=c_6-b_{63}-b_{64}-b_{65} \tag{3.41}$$

$$b_{71}=c_7-b_{73}-b_{74}-b_{75}-b_{76} \tag{3.42}$$

$$b_{81}=c_8-b_{83}-b_{84}-b_{85}-b_{86}-b_{87} \tag{3.43}$$

$$b_{91}=1-b_{93}-b_{94}-b_{95}-b_{96}-b_{97}-b_{98} \tag{3.44}$$

自由パラメータ $c_4$, $c_5$, $c_7$ および $c_8$ を，(3.1)～(3.44)式のすべての分母を零にしないように任意に選び，式の番号順にそれらの式を逐次計算するとすべての係数が得られる．このように決定された係数に対して 9 段数陽的 Runge-Kutta 法(2.2)は 7 次の打ち切り精度をもつ．

## 4. 公式の実例と考察

3 章の解系における自由パラメータを $c_4=1/2$, $c_5=1/6$, $c_7=1/9$, $c_8=5/6$ とおくと，(4.1)式が得られる．これは，Shanks により提案された公式[2)]にほかならない．

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{3}{12} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\
\frac{1}{6} & \frac{23}{216} & 0 & \frac{21}{216} & -\frac{8}{216} \\
\frac{8}{9} & -\frac{4136}{729} & 0 & -\frac{13584}{729} & \frac{5264}{729} & \frac{13104}{729} \\
\frac{1}{9} & \frac{105131}{151632} & 0 & \frac{302016}{151632} & -\frac{107744}{151632} & -\frac{284256}{151632} & \frac{1701}{151632} \\
\frac{5}{6} & -\frac{775229}{1375920} & 0 & -\frac{2770950}{1375920} & \frac{1735136}{1375920} & \frac{2547216}{1375920} & \frac{81891}{1375920} & \frac{328536}{1375920} \\
1 & \frac{23569}{251888} & 0 & -\frac{122304}{251888} & -\frac{20384}{251888} & \frac{695520}{251888} & -\frac{99873}{251888} & -\frac{466560}{251888} & \frac{241920}{251888} \\
\hline
 & \frac{110201}{2140320} & 0 & 0 & \frac{767936}{2140320} & \frac{635040}{2140320} & -\frac{59049}{2140320} & -\frac{59049}{2140320} & \frac{635040}{2140320} & \frac{110201}{2140320}
\end{array} \tag{4.1}$$

3章で導出された解系は，完全解ではなく単なる一解系であって，ほかに多くの可能性が考えられる．しかし，この解系は陽的で多くの自由パラメータを含んでいるので，われわれは解系の表す公式群の中から好ましい特性を有する公式を導出するのに，この自由度を活用することができる．実際われわれは，この解系から既知公式よりも特性のすぐれたいくつかの公式を得た．これについては，本論文の姉妹編“9段数7次陽的 Runge-Kutta 法の最適化”[4]に譲る．

**謝辞**　有益な助言をいただいた中央大学田口東教授，解系のチェックに協力してくださった大学院生矢崎寛君，また，つたない論文を精読され，多くの誤りを正してくださったレフェリーの皆様に，心から感謝いたします．

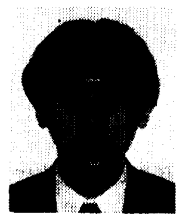
## 参考文献

1) Cooper, G. J. and Verner, J. H.: Some Explicit Runge-Kutta Methods of High Order, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 9, No. 3, pp. 389-405 (1972).
2) Shanks, E. B.: Solutions of Differential Equations by Evaluations of Functions, *Math. of Comp.*, Vol. 20, No. 93, pp. 21-38 (1966).
3) Butcher, J. C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons (1987).
4) 田中正次，村松　茂，山下　茂：9段数7次陽的 Runge-Kutta 法の最適化について，情報処理学会論文誌，Vol. 33, No. 12, pp. 1512-1526 (1992).

(平成4年5月7日受付)
(平成4年9月10日採録)

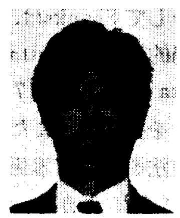
**田中　正次**（正会員）

昭和2年生．昭和32年東北大学理学部数学科卒業．昭和36年同大学大学院理学研究科修士課程修了．同年富士電機(株)研究部に入社．昭和37年同社を退職し，山梨大学講師となる．ついで同大学計算機科学科教授，電子情報工学科教授を経て，現在は日本大学工学部教授．専門は数値解析，主として常微分方程式の数値解法とその応用に関する研究に携わる．日本数学会，日本応用数理学会各会員．



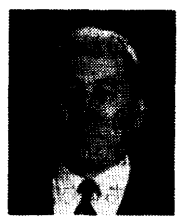
**笠原　栄二**

昭和40年生．昭和62年3月山梨大学工学部計算機科学科卒業．同年4月 NEC 甲府(株)に入社．現在はコンピュータ第三技術部において汎用中型コンピュータの開発に従事．



**村松　　茂**（正会員）

昭和39年生．昭和62年山梨大学工学部計算機科学科卒業．平成元年同大学院修士課程修了後，富士ゼロックス(株)入社．総合図面管理システムの開発に従事，現在に至る．



**山下　　茂**

昭和18年生．昭和37年山梨工業高等学校デザイン科卒業．現在は文部技官として山梨大学工学部電子情報工学科に勤務．