

複合曲線を含んだ不規則な曲線メッシュの内挿方法

今野 晃 市[†] 高村 禎 二[†] 千代倉 弘 明^{††}

複合曲線を含んだ不規則な曲線メッシュを内挿するときには、境界曲線として複合曲線を許した曲面式が要求される。複合曲線を境界とする曲面式として、NURBS 曲面や一般 Coons パッチ等がすでに提案されている。NURBS 曲面は、CAD 間のデータ交換等で広く用いられている曲面であるが、不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することは困難である。また、任意の曲線メッシュを内挿した曲面内部の連続性は、ノットベクトルに依存し1枚の面を C^n 連続なパッチの集合として表現することは一般に難しい。一般 Coons パッチを用いることによって、不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することは可能であるが、そのためには、適切なツイストベクトルを指定しなければならない。ツイストベクトルは、設計者にとって直感的なものではなく、ツイストベクトルと曲面形状の関係を考慮して形状を変形することは困難である。われわれは、これらの問題を解決した一般境界 Gregory パッチを提案する。一般境界 Gregory パッチでは、曲面の境界曲線として複合曲線を許し、不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することができる。また、この曲面式は1つの多項式として表されるので曲面の内部は C^n 連続となる。

Smooth Surface Interpolation of an Arbitrary Curve Mesh including Composite Curves

KOUICHI KONNO,[†] TEIJI TAKAMURA[†] and HIROAKI CHIYOKURA^{††}

One of the most important requirements to interpolate curve meshes is that a surface can be represented by composite curves on its boundaries. NURBS and generalized Coons patch have been proposed to represent composite curves. By using NURBS, it is difficult to smoothly interpolate irregular meshes and to represent a C^n surface, generally because the continuity for interior parts depends on knot vectors. With generalized Coons patch, an irregular meshes can be interpolated smoothly, although twist vectors have to be applied properly when defining the patch. A twist vector is not intuitive, and the relation between twist vectors and surface shape is not clear. To overcome these problems, we propose General Boundary Gregory (GBG) patch, which can represent its boundaries with composite curves. With the GBG patches, an irregular curve mesh can be interpolated smoothly. Additionally, the GBG patch can represent a C^n surface because of its formulation.

1. はじめに

CAD システムを用いた形状設計において、最も重要な課題の1つに複雑な自由曲面を持った形状を容易に設計できることが挙げられる。設計者が自由曲面形状を設計する場合には、その設計手法に即した直観的でしかも容易な形状入力機能を持った CAD システムが望まれる。一般に、自由曲面を入力する場合には断面線や曲面の境界曲線などの曲面を特徴づける特徴線

を入力する方法が考えられる。これらの方法では、設計者はまず曲面の境界曲線を表す曲線メッシュを定義し、それから曲線メッシュで囲まれる領域を自由曲面で内挿する。入力された曲線メッシュは、設計したい形状の大きな形状を表している。したがって、曲線メッシュを内挿する場合には、設計者の意図どおりの曲面形状が得られなければならない。

一般に曲線メッシュは、Bézier 曲線や NURBS 曲線などさまざまなタイプの曲線で構成されている。特に NURBS 曲線は、円錐曲線を正確に表現するためには不可欠でありかつ複合曲線も表現できる。よってこれに囲まれた領域は、大きな曲面となり少ない境界曲線で1枚の面を表現することができる。このことは、複雑な曲線メッシュをなるべく少ない境界曲線で

[†] (株)リコーソフトウェア事業部
Software Division, Ricoh Company Ltd.

^{††} 慶應義塾大学環境情報学部
Faculty of the Environment Information, Keio
University

表現し、設計者が容易に形状を把握することができるという利点がある。また設計する形状によっては、三角形や五角形のような非四辺形となる領域も含んだ不規則な曲線メッシュ⁵⁾が現れる。このように、さまざまなタイプの曲線で構成されかつ不規則な領域も含んだ曲線メッシュを、設計者が意図した曲面形状で内挿することが要求される。

現在では、このような要求を満たす曲面式の研究が数多く行われている^{8),9),11),12)~14)}。不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿するための代表的な曲面式として、Gregory パッチ⁶⁾や有理境界 Gregory パッチ⁷⁾が挙げられる。Gregory パッチ、有理境界 Gregory パッチは、各境界曲線における一階微分ベクトルを u, v パラメータで独立に定義できる特徴を持っている。このことから、不規則な曲線メッシュを G^1 連続²⁾に内挿することが可能となる。これらの曲面式では、その境界曲線は Bézier 曲線や有理 Bézier 曲線で表現されるために、複合曲線を境界とすることができなかった。

自由曲面を切断することで生成される干渉線や、オフセット曲面の境界曲線を含んだ曲線メッシュには複合曲線が現れる。Gregory パッチや有理境界 Gregory パッチで、このようなメッシュを内挿するときには、面を分割する内部曲線が生成され、複数の四角領域に分割することにより内挿する⁵⁾。内部曲線は境界曲線に依存して生成されるために、境界曲線の形状によっては歪みが発生し、生成される曲面の形状が意図したものとはならない。また、一般に内部曲線の形状を境界曲線の変形によって制御することは困難である。

一方、NURBS 曲面¹⁵⁾による内挿法では、境界曲線が NURBS 曲線で表されるので、曲線メッシュ内に複合曲線が存在しても問題は無い。しかし NURBS 曲面は、不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することは困難である³⁾。

上で述べたような問題点を解決するために、境界曲線として複合曲線を許し、大きな曲面を扱える曲面式を提案する。われわれは、この曲面式を一般境界 Gregory パッチと呼ぶ。一般境界 Gregory パッチは一般 Coons パッチ¹⁾を拡張したもので、Gregory パッチ、有理境界 Gregory パッチの特徴を継承した曲面式である。一般境界 Gregory パッチを用いて曲線メッシュを内挿することによって、歪みのない曲面を生成することができ、かつ複合曲線を含んだ不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することが可能となる。また、Gregory パッチや有理境界 Gregory パッチ

とも滑らかに接続することができるので、これらの Gregory 系の曲面が混在する立体を生成しても Gregory 系曲面間の整合性は保たれる。さらに一般境界 Gregory パッチは、1つの多項式で表現されるので、曲面の内部は C^0 連続になる。

2. Gregory パッチによる内挿の問題点

2.1 Gregory パッチの表現式

Gregory パッチは、Coons パッチに Gregory が行った両立性補正¹⁾を Bézier パッチに対して行った曲面式である。図 1 は、双 3 次の Gregory パッチを表している。双 3 次の Gregory パッチ $S(u, v)$ は、20 個の制御点 $P_{ij}(i=0, \dots, 3, j=0, \dots, 3)$ から構成され、以下のような式で表すことができる。

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij}(u, v). \quad (1)$$

ただし、

$$P_{11}(u, v) = \frac{u P_{110} + v P_{111}}{u + v},$$

$$P_{12}(u, v) = \frac{u P_{120} + (1-v) P_{121}}{u + (1-v)},$$

$$P_{21}(u, v) = \frac{(1-u) P_{210} + v P_{211}}{(1-u) + v},$$

$$P_{22}(u, v) = \frac{(1-u) P_{220} + (1-v) P_{221}}{(1-u) + (1-v)},$$

とする。また、 $B_i^3(u)$ は Bernstein 多項式で次のように定義される。

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}. \quad (2)$$

図 1 からわかるように、Gregory パッチの制御点のうちで $P_{ij}(i \neq 11, 12, 21, 22)$ は曲面の境界曲線を表し、残りの 8 点 $P_{ijk}(ij=11, 12, 21, 22; k=0, 1)$ は CBD (Cross Boundary Derivative)⁹⁾ を表している。

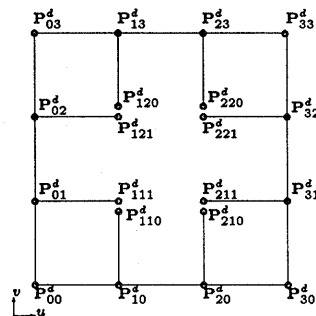


図 1 Gregory パッチ
Fig. 1 A Gregory patch.

2.2 Gregory パッチによる曲面の接続と内挿

Gregory パッチを用いた曲線メッシュの内挿について述べる前に、まず、2枚の Gregory パッチ間を滑らかに接続するための過程を説明する。

式(1)からわかるように、Gregory パッチの境界は Bézier 曲線で表される。そこで Bézier 曲線を共有する2枚のパッチ $S^a(u, v)$ と $S^b(u, v)$ を考える。図2に示すように、Gregory パッチの共有境界につながる制御点間ベクトルを $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i (i=0, \dots, 3)$ とし、共有境界曲線の制御点間ベクトルを $\mathbf{c}_i (i=0, 1, 2)$ とする。2枚のパッチが滑らかに接続されるための条件式は以下の式で表すことができる。

$$\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) \mathbf{b}_i = k(v) \sum_{i=0}^3 B_i^3(v) \mathbf{a}_i + h(v) \sum_{i=0}^2 B_i^2(v) \mathbf{c}_i \tag{3}$$

$B_i^3(u)$ は Bernstein 多項式で式(2)で表される。 $k(v), h(v)$ は任意のスカラー関数とする。ここでは次に示すような1次の関数とする。

$$k(v) = (1-v)k_0 + vk_1, \quad h(v) = (1-v)h_0 + vh_1 \tag{4}$$

ただし、 k_0, k_1 は正の実数で、 h_0, h_1 は任意の実数とする。式(3)のうちで、 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_i (i=0, 1, 2)$ は、境界曲線から求めることができるため既知である。よって未知数は、 $k_0, k_1, h_0, h_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ である。端点 V_0, V_1 につながるベクトルから、未知数 k_0, k_1, h_0, h_1 は容易に求めることができる。また基礎パッチ法⁴⁾によって、 $\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) \mathbf{a}_i$ を2次と仮定することで、 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は式のように求めることができる。

$$\mathbf{b}_1 = \frac{(k_1 - k_0) \mathbf{a}_0}{3} + k_0 \mathbf{a}_1 + \frac{2h_0 \mathbf{c}_1}{3} + \frac{h_1 \mathbf{c}_0}{3}, \tag{5}$$

$$\mathbf{b}_2 = k_1 \mathbf{a}_2 - \frac{(k_1 - k_0) \mathbf{a}_3}{3} + \frac{h_0 \mathbf{c}_2}{3} + \frac{2h_1 \mathbf{c}_1}{3} \tag{6}$$

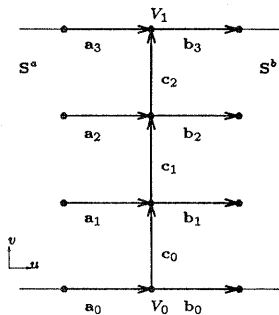


図2 2枚の Gregory パッチ間の接続
Fig. 2 Joining two Gregory patches.

以上のような接続式を用いて不規則な曲線メッシュを内挿する過程を示す。

1. CBD 関数の定義

図3は、稜線 $E_i (i=0, \dots, 3)$ で囲まれた面 F_1 を表している。面を内挿する場合、まず各稜線における CBD を定義する。CBD $\mathbf{g}_0(t)$ は、稜線 E_1 と E_3 から定義できる。このとき、稜線 E_0 の端点につながる稜線 E_0, E_1, E_5 と稜線 E_0, E_3, E_2 の端点での接ベクトルが式(3)を満たすときには、これらの稜線から CBD $\mathbf{g}_0(t)$ を定義する。このことは、境界稜線 E_0 において、2枚の面 F_1, F_2 が G^1 連続に接続されるときには、 $\text{CBG } \mathbf{g}_0(t) = -\mathbf{g}_4(t)$ の関係があることを示している。その他の CBD $\mathbf{g}_i(t) (i=1, \dots, 3)$ も同様の方法で定義できる。

2. 内部制御点の決定

面 F_1 の境界曲線での CBD が定義されたならば、式(5)と式(6)から曲面の内部制御点を決定する。面が4角形の場合には、ここで求めた制御点がパッチの制御点となるので処理を終了する。

3. 非四辺形面の分割

面 F_2 のような非四辺形面の場合には、各境界での CBD を用いてその面を幾つかの四角形面に分割する。その後で分割した各面に対して、Gregory パッチを生成する (図4(a))。

Gregory パッチの境界曲線は Bézier 曲線となるので、境界曲線に複合曲線を持った曲線メッシュを Gregory パッチで内挿するときには、位相的に四角形であっても、複数の Gregory パッチに分割される。図3の稜線 E_2 は、曲面を平面で切断したときにできる干涉線で、複合曲線として表されている。このような曲線メッシュを Gregory パッチで内挿した例を示す (図4(b))。例では、面 F_1 は位相的には四角形で

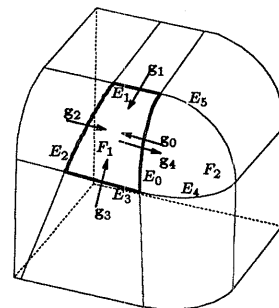


図3 Gregory パッチの内挿
Fig. 3 Interpolation of the Gregory patch.

あるが内部曲線が作られ、複数の Gregory パッチによって内挿されていることがわかる。

複合曲線は、曲面間の干渉線やオフセット曲面の境界としてしばしば用いられ、複雑な曲面形状を表現するためには、必要不可欠である。しかし、Gregory パッチによる曲面内挿法では、以下のような問題点が発生する。

- 曲面を分割する内部曲線は CBD から計算されるため曲線メッシュの形状によっては歪んだ曲面が生成される。
- 内部曲線の形状を境界曲線から制御することは困難である。
- 曲面内部の連続性は高々 G^1 にしかならない。

これらの問題点を解決した新しい曲面式が一般境界 Gregory パッチである。3章で、一般境界 Gregory パッチについて説明する。

3. 一般境界 Gregory パッチ

一般 Coons パッチは、Coons パッチを拡張した曲面であるが、その曲面を定義するためには、ツイストベクトルを指定しなければならない。Gregory は、ツイストベクトルを指定することなく曲面の両立性条件を満たすように一般 Coons パッチを拡張した¹⁰⁾。この方法に着目し、一般 Coons パッチを拡張した曲面式が一般境界 Gregory パッチである。この曲面式を用いることによって、複合曲線を曲面の境界とすることができるので、四角形の領域を1枚の曲面で内挿できる。これによって2章で述べた問題点は解決する。また、有理境界 Gregory パッチと滑らかにつながるようにするために CBD を有理化した。本章では、一般境界 Gregory パッチの曲面式とその特徴について説明する。

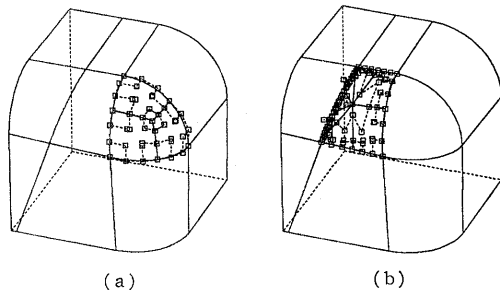


図4 Gregory パッチによる不規則な曲線メッシュの内挿
Fig. 4 Interpolation of irregular meshes with Gregory patches.

3.1 一般境界 Gregory パッチの概念

一般境界 Gregory パッチ $S(u, v)$ は、4本の境界曲線 $C_i (i=0, \dots, 3)$ と各境界での CBD $\partial S^a(0, v)/\partial u$, $\partial S^a(1, v)/\partial u$, $\partial S^b(u, 0)/\partial v$, $\partial S^b(u, 1)/\partial v$ によって次式のように定義される。

$$S(u, v) = S^a(u, v) + S^b(u, v) - S^c(u, v). \quad (7)$$

以降では、 $S_u = \partial S/\partial u$, $S_v = \partial S/\partial v$ とする。図5に示すように、 $S^a(u, v)$ は、向かい合う2本の境界曲線 C_3 , C_1 とこれらの CBD である $S_u^a(0, v)$, $S_u^a(1, v)$ によって3次ブレンディングした曲面である。同様に $S^b(u, v)$ は、向かい合う2本の境界曲線 C_0 , C_2 とこれらの CBD である $S_v^b(u, 0)$, $S_v^b(u, 1)$ によって3次ブレンディングした曲面である。 S^c は、 S^a , S^b を加えることによって生じる重複した部分を表す曲面で、双3次のパッチとして表現される。ここで、 S^a , S^b , S^c の関係を考えてみる。式(7)に $u_0=0, 1$, $v_0=0, 1$ を代入することによって、以下の式が得られる。

$$S(u_0, v) = S^a(u_0, v), \quad S(u, v_0) = S^b(u, v_0), \quad (8)$$

$$S_u(u_0, v) = S_u^a(u_0, v), \quad S_v(u, v_0) = S_v^b(u, v_0).$$

このことから、境界上の座標値と一階微分ベクトルは、 S^a , S^b の何方かの曲面により表されることがわかる。よって、このような条件から S^a , S^b , S^c の関係式を導くことができる。

$$S^b(u_0, v) = S^c(u_0, v), \quad S_u^b(u_0, v) = S_u^c(u_0, v), \quad (9)$$

$$S^a(u, v_0) = S^c(u, v_0), \quad S_v^a(u, v_0) = S_v^c(u, v_0).$$

式(9)からわかるように、 S^a , S^b における CBD が多項式か有理式かによって、 S^c も多項式または有理式で表現できる。また、 S_u^c , S_v^c は2枚の曲面から制約を受けているので、 S^c は、Gregory パッチまたは有理

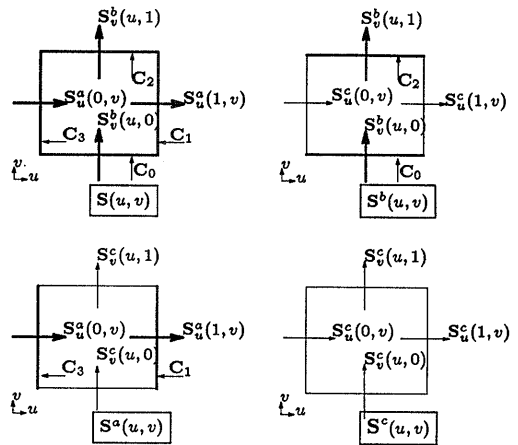


図5 一般境界 Gregory パッチ
Fig. 5 A general boundary Gregory patch.

境界 Gregory パッチをあてはめればよいことがわかる。このことから、 S^a, S^b の CBD を Bézier 形式で表現すれば、 S_u^a と S_v^b は、 S^c の制御点から得ることができる。

以上のことから、一般境界 Gregory パッチは 4 本の境界曲線と各境界での CBD を表す S^c により構成され、 S^c から S^a, S^b を生成する曲面となる。

3.2 一般境界 Gregory パッチの表現式

ここでは、 S^a, S^b, S^c の表現式を具体化する。

まず、 S^a, S^b は以下のような 3 次式で表される。

$$S^a(u, v) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(u) P_i^a(v), \tag{10}$$

$$S^b(u, v) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(v) P_i^b(u). \tag{11}$$

ただし、 $B_i^3(u)$ は式(2)の Bernstein 多項式とする。

境界曲線が複合曲線または Bézier 曲線ならば Bézier 表現を、有理 Bézier 曲線ならば有理 Bézier により P^a, P^b を表現することによって、一般境界 Gregory パッチ間、一般境界 Gregory パッチと Gregory パッチ、一般境界 Gregory パッチと有理境界 Gregory パッチを滑らかに接続することができる。接続の詳細に関しては後述する。

CBD が多項式の場合

この場合 P^a, P^b は、次式のように表現できる。図 6 は、CBD を表す Bézier パッチの制御点を示している。

$$P_0^a(v) = C_3(v),$$

$$P_1^a(v) = C_3(v) + \left(\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) P_{1,j}^a - \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) P_{0,j}^a \right),$$

$$P_2^a(v) = C_1(v) - \left(\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) P_{2,j}^a - \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) P_{1,j}^a \right),$$

$$P_3^a(v) = C_1(v),$$

$$P_0^b(u) = C_0(u),$$

$$P_1^b(u) = C_0(u) + \left(\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) P_{1,i}^b - \sum_{i=0}^3 B_i^3(u) P_{0,i}^b \right),$$

$$P_2^b(u) = C_2(u) - \left(\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) P_{2,i}^b - \sum_{i=0}^3 B_i^3(u) P_{1,i}^b \right),$$

$$P_3^b(u) = C_2(u).$$

ただし、 $ij \neq 11, 12, 21, 22$ のときには、

$$P_{ij}^a = P_{i,j}^a = P_{i,j}^b$$

とする。

また曲面 S^c は、 S^a, S^b の CBD を表す制御点を式(9)を満たすように設定し、Gregory パッチで表

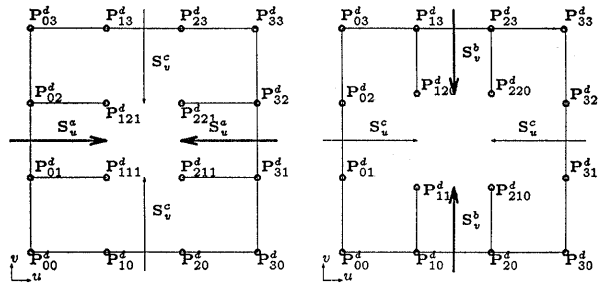


図 6 S^a, S^b の制御点
Fig. 6 Control points of S^a and S^b .

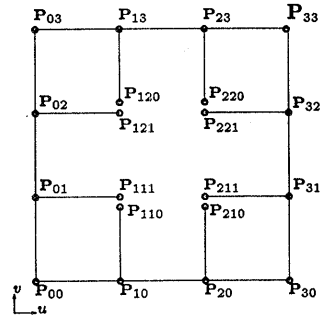


図 7 S^c の制御点 (CBD が多項式の場合)
Fig. 7 Control points of S^c (CBD is polynomial).

現する (図 7)。

$$S^c(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij}^c(u, v). \tag{12}$$

ただし、

$$P_{ij}^c(u, v) = P_{ij}^d \quad (i, j \neq 1, 2),$$

$$P_{11}^c(u, v) = \frac{uP_{11}^d + vP_{11}^d}{u+v},$$

$$P_{12}^c(u, v) = \frac{uP_{12}^d + (1-v)P_{12}^d}{u+(1-v)},$$

$$P_{21}^c(u, v) = \frac{(1-u)P_{21}^d + vP_{21}^d}{(1-u)+v},$$

$$P_{22}^c(u, v) = \frac{(1-u)P_{22}^d + (1-v)P_{22}^d}{(1-u)+(1-v)}.$$

P^c の評価式と式(1)に示した Gregory パッチの評価式を比較したときに、内部制御点 $P_{ij}^c (ij=11, 12, 21, 22)$ の評価式が異なっていることがわかる。

以上のことから、CBD が多項式の場合には、一般境界 Gregory パッチは 4 本の境界曲線と Gregory パッチの表現式で表されることがわかる。

CBD 関数が有理式の場合

この場合 P^a, P^b は、次式のように表現できる。

$$P_0^a(v) = C_3(v),$$

$$\mathbf{P}_1^d(v) = \mathbf{C}_3(v) + \left(\frac{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{1,j}^d \mathbf{P}_{1,j}^d}{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{1,j}^d} - \frac{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{0,j}^d \mathbf{P}_{0,j}^d}{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{0,j}^d} \right)$$

$$\mathbf{P}_2^d(v) = \mathbf{C}_1(v) - \left(\frac{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{3,j}^d \mathbf{P}_{3,j}^d}{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{3,j}^d} - \frac{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{2,j}^d \mathbf{P}_{2,j}^d}{\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{2,j}^d} \right)$$

$$\mathbf{P}_3^d(v) = \mathbf{C}_1(v),$$

$$\mathbf{P}_0^d(v) = \mathbf{C}_0(u),$$

$$\mathbf{P}_1^d(u) = \mathbf{C}_0(u) + \left(\frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,10}^d \mathbf{P}_{i,10}^d}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,10}^d} - \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,00}^d \mathbf{P}_{i,00}^d}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,00}^d} \right)$$

$$\mathbf{P}_2^d(u) = \mathbf{C}_2(u) - \left(\frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,30}^d \mathbf{P}_{i,30}^d}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,30}^d} - \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,20}^d \mathbf{P}_{i,20}^d}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,20}^d} \right)$$

$$\mathbf{P}_3^d(u) = \mathbf{C}_2(u).$$

ただし、 \mathbf{P}^d, w^d は、 \mathbf{S}^c の制御点とその重みで、図 8 のように配置されているとする。このとき、座標値 $\mathbf{P}_{i,j}^d$ と $\mathbf{P}_{i',j'}^d$ ($ij \neq 11, 12, 21, 22$) は同じ値とするが、これらの重み $w_{i,j}^d$ と $w_{i',j'}^d$ は異なってよい。CBD が多項式と同様に、また曲面 \mathbf{S}^c は式 (9) を満たすように設定され、有理境界 Gregory パッチ⁷⁾により表現される (図 8)。

$$\mathbf{S}^c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) \mathbf{P}_{i,j}^d(u, v)}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) w_{i,j}^d(u, v)} \quad (13)$$

ただし、 $i=0, 1$ かつ $j=0, 1$ のとき、

$$\mathbf{P}_{i,j}^d(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,1}^d + v^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,0}^d}{u^2 + v^2},$$

$$w_{i,j}^d(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j,1}^d + v^2 w_{i,j,0}^d}{u^2 + v^2},$$

$i=0, 1$ かつ $j=2, 3$ のとき、

$$\mathbf{P}_{i,j}^d(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,1}^d + (1-v)^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,0}^d}{u^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{i,j}^d(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j,1}^d + (1-v)^2 w_{i,j,0}^d}{u^2 + (1-v)^2},$$

$i=2, 3$ かつ $j=0, 1$ のとき、

$$\mathbf{P}_{i,j}^d(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,1}^d + v^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,0}^d}{(1-u)^2 + v^2},$$

$$w_{i,j}^d(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j,1}^d + v^2 w_{i,j,0}^d}{(1-u)^2 + v^2},$$

$i=2, 3$ かつ $j=2, 3$ のとき、

$$\mathbf{P}_{i,j}^d(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,1}^d + (1-v)^2 w_{i,j}^d \mathbf{P}_{i,j,0}^d}{(1-u)^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{i,j}^d(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j,1}^d + (1-v)^2 w_{i,j,0}^d}{(1-u)^2 + (1-v)^2}.$$

有理境界 Gregory パッチに関する詳細な記述は、文献 7) を参照のこと。

以上のことから、CBD が有理式の場合には、一般境界 Gregory パッチは 4 本の境界曲線と有理境界 Gregory パッチの表現式で表されることがわかる。一般境界 Gregory パッチでは、境界曲線と CBD はまったく独立に設定することが可能である。よって CBD を表している \mathbf{S}^c の制御点と重みを、4 章で述べる接続法により設定することで、曲面を生成することができる。

3.3 一般境界 Gregory パッチの特徴

一般境界 Gregory パッチの特徴として以下のものが挙げられる。

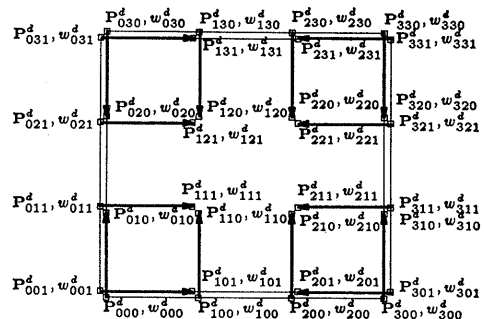


図 8 \mathbf{S}^c の制御点 (CBD が有理式の場合)
Fig. 8 Control points of \mathbf{S}^c (CBD is rational).

- 境界曲線と CBD を独立に定義できる。これによって、境界曲線のタイプに依存しない曲面式の表現となり、例えば NURBS 曲線のような複合曲線を扱うことができる。このことから、位相的に四角形な領域は 1 枚の一般境界 Gregory パッチで表現できるので、曲面の歪みが発生しない。
- 曲面の重複部分 $S^c(u, v)$ には、任意の多項式をあてはめることができる。本論文では、Gregory パッチと有理境界 Gregory パッチをあてはめている。これによって、不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することができる。
- 4本の境界曲線が3次の Bézier 曲線で表され、 S^c が Gregory パッチの場合には、一般境界 Gregory パッチと Gregory パッチは一致する。同様に、4本の境界曲線が3次の有理 Bézier 曲線で表され、 S^c が有理境界 Gregory パッチの場合には、一般境界 Gregory パッチと有理境界 Gregory パッチは一致する。
- S^c を Gregory パッチまたは有理境界 Gregory パッチの式をあてはめることによって、一般境界 Gregory パッチと Gregory パッチ、有理境界 Gregory パッチは滑らかに接続することができる。
- 一般境界 Gregory パッチは、1つの多項式として表現できるので、曲面の内部は C^0 連続となる。
- 一般 Coons パッチのようにツイストベクトルを指定しなくても曲面を定義できる。しかも、制御点ベースであるので、容易に形状を変形できる。

4. 一般境界 Gregory パッチ間の接続

3章では、一般境界 Gregory パッチの表現式とその特徴について述べた。本章では、一般境界 Gregory パッチと Gregory パッチ、有理境界 Gregory パッチ間の接続方法について述べる。

2枚の曲面間を G^1 連続に接続するためには、式(3)を満たす内部制御点を得る必要がある。われわれは、境界曲線のタイプを以下の3種類に分類し、接続方法を分けることによって、なめらかな曲面を生成した。

Case 1 境界曲線が Bézier 曲線の場合:

この場合には、Gregory パッチによる内挿アルゴリズムで内部制御点を計算する(式(5)と式(6)を参照)。

Case 2 境界曲線が有理 Bézier 曲線の場合:

この場合には、有理境界 Gregory パッチによる内挿アルゴリズムで内部制御点を計算する。詳細は、文献 7) を参照されたい。

Case 3 境界曲線が複合曲線の場合:

複合曲線の端点における微分ベクトルから、仮想的な曲線を求め、Gregory パッチの内挿アルゴリズムで内部制御点を計算する。この場合の詳細については、以下で述べる。

図 9 は、2枚の一般境界 Gregory パッチ S^1 と S^2 を滑らかに接続する様子を表している。共有境界曲線は、4本の曲線要素を持つ複合曲線とする。ここで、式(3)の $h(v)$ の項について考えてみると $h(v)$ の項は境界曲線の微分ベクトルを表し、区分多項式で表現される。一般境界 Gregory パッチでは境界曲線と境界曲線での微分ベクトルを独立に定義しているため、境界における u, v の微分ベクトル関数を S^c で表現できなければならない。ここでは、 S^c が Gregory パッチまたは有理境界 Gregory パッチを仮定しているため、区分多項式を表現できない。したがって、 $h(v)=0$ と仮定する。このことから、式(3)は、次式のように書き直すことができる。

$$\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) \mathbf{b}_i = k(v) \sum_{i=0}^3 B_i^3(v) \mathbf{a}_i \tag{14}$$

ここで、 $B_i^3(u)$ は式(2)で示される Bernstein 多項式で、 $k(v)$ は式(4)のような 1 次関数とする。式(14)からわかるように、2枚の一般境界 Gregory パッチは適切な CBD を設定することで接続される。よって、曲面 S^c の制御点を式(14)を満たすように設定することを考える。図 9 に示すように、境界曲線の端点 V_0, V_1 につながる曲線の接ベクトルの $1/3$ の大きさのベクトルをそれぞれ、 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_2$ とする。まず、ベクトル $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_2$ と境界曲線の端点から、

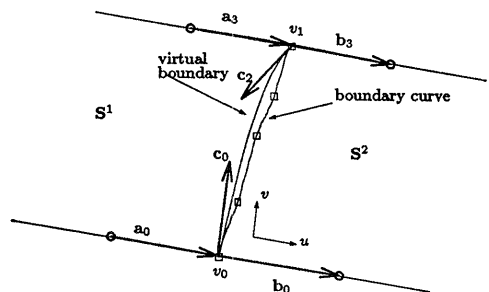


図 9 2枚の一般境界 Gregory パッチ間の接続
Fig. 9 Joining two GGB patches.

S^c の境界を表す制御点 $P_{00}^d, P_{01}^d, P_{02}^d, P_{03}^d, P_{10}^d, P_{13}^d$ が決定できる。ここで、

$$b_i = P_{i1}^d - P_{01}^d \quad (i=0, \dots, 3),$$

$$c_i = P_{0, i+1, 1}^d - P_{0, i, 1}^d \quad (i=0, 1, 2),$$

である。この時点で曲面 S^c を決める場合の未知数は $k_0, k_1, \mathbf{a}_i (i=1, 2), P_{11}^d, P_{12}^d$ である。 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は、基礎パッチ法によって、 k_0, k_1 は、境界曲線の端点 V_0, V_1 におけるベクトルの関係から求めることができる。また、 P_{11}^d と P_{12}^d は、次式から計算できる。

$$P_{11}^d = P_{01}^d + \frac{(k_1 - k_0)\mathbf{a}_0}{3} + k_0\mathbf{a}_1, \quad (15)$$

$$P_{12}^d = P_{02}^d + k_1\mathbf{a}_2 - \frac{(k_1 - k_0)\mathbf{a}_3}{3}. \quad (16)$$

これは、式(5)と式(6)に対して、 $h(v)=0$ とした式と同じである。

以上のことから、一般境界 Gregory パッチ間の接続は Gregory パッチ間の接続問題⁶⁾に置き換えることができることがわかる。

5. 一般境界 Gregory パッチによる曲線メッシュの内挿

本章では、4章で述べた接続法をふまえて、Bézier 曲線、有理 Bézier 曲線、複合曲線を含んだ曲線メッシュを内挿する方法について説明する。

1. CBD の定義

なめらかな曲面を生成するためには、境界曲線の種類によって2種類の接続のアルゴリズムを使い分ける必要がある。境界曲線が Bézier 曲線または複合曲線の場合には、Gregory パッチによる接続アルゴリズムを、有理 Bézier 曲線の場合には有理境界 Gregory パッチによる接続アルゴリズムをそれぞれ用いる。このとき、有理境界 Gregory パッチによる接続アルゴリズムを用いたならば、一般境界 Gregory パッチの曲面 S^c は、有理式になる。境界曲線から、CBD を定義する過程は、2.2節と同じである。

2. 内部制御点の決定

境界曲線のタイプに依存した CBD から、Gregory パッチまたは有理境界 Gregory パッチの接続アルゴリズムによって内部制御点を決定する。

3. 曲面 S^c の設定

内挿される面のすべての境界での CBD のタイプを調べ、1つでも有理式が存在したならば、 S^c を有理式とする。有理式となる CBD が1つも存在して

いないときには、 S^c を多項式とする。 S^c のタイプが決定したならば、各 CBD から求めた内部制御点を S^c に設定する。CBD の数が4のときには処理を終了する。

4. 非四辺形面の分割

CBD の数が4でないときには、位相的にも四辺形ではないので、面を分割する。

以上のような過程で、曲線メッシュを一般境界 Gregory パッチで内挿することができる。

6. 一般境界 Gregory パッチを使った曲面設計例

本章では、一般境界 Gregory パッチを使った曲線メッシュの内挿例を示す。図 10 は、曲線メッシュを Gregory パッチで内挿したときの等高線を示している。これに対して、図 11 では、内部の境界曲線を除去し、境界曲線を NURBS 曲線で表した曲線メッシュを一般境界 Gregory パッチで内挿したときの等高線を示している。これらの図から、一般境界 Gregory パッチを使うことによって、少ない境界曲線で曲面を表現できることがわかる。

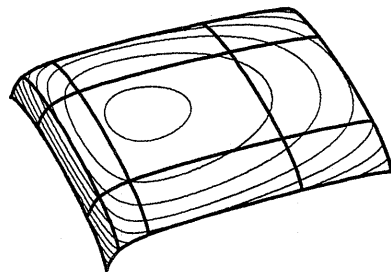


図 10 Gregory パッチによる曲線メッシュの内挿例
Fig. 10 Example of interpolating curve meshes with Gregory patches.

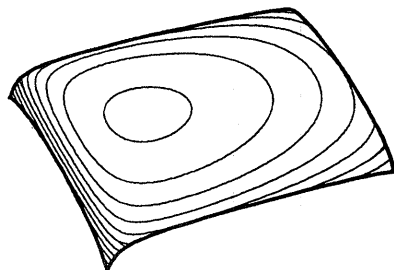


図 11 一般境界 Gregory パッチによる曲線メッシュの内挿例
Fig. 11 Example of interpolating curve meshes with GBG patch.

図 12 は、一般境界 Gregory パッチ, Gregory パッチ, 有理境界 Gregory パッチ間を接続した曲線メッシュを表している. 稜線 E_1 は 2 次の有理 Bézier 曲線, E_2 は NURBS 曲線, E_3, E_4 は Bézier 曲線である. 境界曲線のタイプから, 面 F_1 は S^c が有理式の一般境界 Gregory パッチ, 面 F_2 は S^c が多項式の一般境界 Gregory パッチ, 面 F_3 は有理境界 Gregory パッチ, 面 F_4 は Gregory パッチでそれぞれ内挿される. 図 12 では, これらのパッチの制御点を表示した.

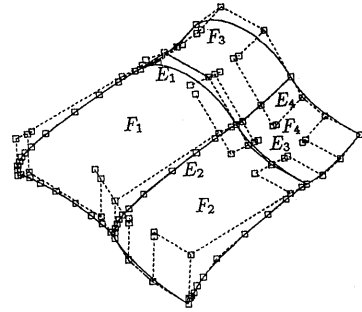


図 12 一般境界 Gregory パッチ間の接続例
Fig. 12 Example of joining two GBG patches.

図 13 (a)では, 各パッチの境界上での法線ベクトルを表示している. 共有境界曲線上での法線ベクトルは一致していることからこれらのパッチは滑らかに接続されていることがわかる. また, 図 13(b)では等高線を表示している.

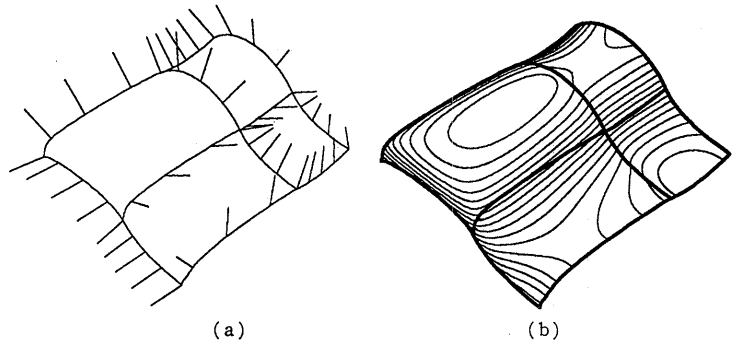


図 13 法線ベクトル/等高線表示
Fig. 13 Drawing normal vectors and cross sections of the GBG patches.

図 14 (a)は, 図 4 (b)で示した曲線メッシュを Gregory パッチで内挿したときの等高線を示している. また, 図 14 (b)は, 図 4 (b)で示した曲線メッシュを一般境界 Gregory パッチで内挿したときの制御点と等高線を示している. Gregory パッチで内挿したときには, 面に歪みが生じているが, 一般境界 Gregory パッチで内挿することによって, この歪みは解消されていることがわかる.

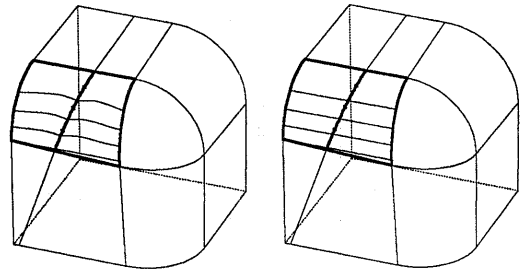


図 14 Gregory パッチ/一般境界 Gregory パッチの等高線表示
Fig. 14 Drawing cross sections of the Gregory and GBG patches.

7. ま と め

複合曲線を含んだ不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿するための曲面式を提案し, その有効性を確認した. この曲面式は一般 Coons パッチを拡張し, Gregory パッチ, 有理境界 Gregory パッチの特徴を継承したもので, 一般境界 Gregory パッチと呼ばれる. 一般境界 Gregory パッチで曲線メッシュを内挿したときの利点としては以下のことが挙げられる.

- 複合曲線を扱えるので, シンプルな曲線メッシュで複雑な曲面形状を扱うことができる.
- 位相的に四角形ならば 1 枚のパッチで内挿できるので, 内部曲線を生成しない. したがって, 内部曲線による曲面の歪みがない形状が生成できる.
- 曲面の内部は C^0 連続となる.
- 境界曲線と CBD を独立に定義でき, 境界曲線のタイプに依存しない.

- オフセット曲面の境界や, 曲面間の干渉計算によって生成される曲線に対応できる.
- 隣接する Gregory パッチ, 有理境界 Gregory パッチ, 一般境界 Gregory パッチとなめらかに接続できる.
- 制御点をベースにしているので, 一般 Coons パッチよりも直感的に形状変形できる.

以上のことから、曲面を設計する上で一般境界 Gregory パッチは強力なツールとなることがわかった。

一般境界 Gregory パッチを(株)リコーで開発しているソリッドモデラ DESIGNBASE に実装しその効果を確認した。

8. 今後の展開

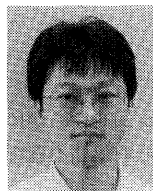
本論文では、一般境界 Gregory パッチの重複した曲面 S^c を Gregory パッチまたは有理境界 Gregory パッチで表現したために、複合曲線のまわりでの接続条件を制限した。今後は、この制限をはずすように一般境界 Gregory パッチの表現を拡張する。

謝辞 本研究を行う上で、多大なご指導、ご援助をいただいた(株)リコーソフトウェア事業部國井秀子事業部長に深謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Barnhill, R. E., Brown, J. H. and Klucwicz, I. M.: A New Twist in Computer Aided Geometric Design, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 8, pp. 78-9 (1978).
- 2) Bartels, R. H., Beatty, J. C. and Barsky, B. A.: *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics & Geometric Modeling*, Morgan Kaufmann, Los Altos, California (1987).
- 3) Loop, C. and DeRose, T.: Generalized B-spline Surfaces of Arbitrary Topology, *Computer Graphics*, Vol. 24, No. 4, pp. 347-356 (1990).
- 4) Chiyokura, H. and Kimura, F.: Design of Solids with Free-Form Surfaces, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH 83)*, Vol. 17, No. 3, pp. 289-298 (1983).
- 5) Chiyokura, H.: Localized Surface Interpolation for Irregular Meshes, *Advanced Computer Graphics* (Kunii, T. L., ed.), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 3-19 (1986).
- 6) Chiyokura, H.: *Solid Modelling with DESIGNBASE*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1988).
- 7) Chiyokura, H., Takamura, T., Konno, K. and Harada, T.: G^1 Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves, *NURBS for Curve and Surface Design* (Farin, G., ed.), SIAM, Philadelphia, pp. 15-34 (1991).
- 8) Farin, G.: From Conics To NURBS: A Tutorial and Survey, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 5, pp. 78-86 (1992).
- 9) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, 3rd Ed., Academic Press, San Diego, California (1993).
- 10) Gregory, J. A.: Smooth Interpolation without Twist Constraints, *Computer Aided Geometric Design* (Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R. F., eds.), Academic Press, New York, pp. 71-87 (1974).
- 11) Konno, K., Takamura, T. and Chiyokura, H.: A New Control Method for Free-Form Surfaces with Tangent Continuity and its Applications, *Scientific Visualizations of Physical Phenomena* (Patrikalakis, N. M. ed.), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 435-456 (1991).
- 12) Li, H. and Liu, S. Q.: Local Interpolation of Curvature-Continuous Surfaces, *Computer Aided Design*, Vol. 24, No. 9, pp. 491-503 (1992).
- 13) Lounsebery, M., Mann, S. and DeRose, T.: Parametric Surface Interpolation, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 5, pp. 45-52 (1992).
- 14) Miura, K. T. and Wang, K. K.: Everywhere- G^2 -Continuous Interpolation with C^2 Gregory Patches, *Visual Computing* (Kunii, T. L., ed.), Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 497-516 (1992).
- 15) Piegl, L.: On NURBS: A Survey, *IEEE Computer Graphics & Applications*, Vol. 11, No. 1, pp. 55-71 (1991).

(平成 5 年 5 月 31 日受付)
(平成 6 年 2 月 17 日採録)



今野 晃市

昭和 37 年 11 月 4 日生。昭和 60 年筑波大学第三学群情報学類卒業。(株)リコーソフトウェア事業部に勤務。ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。レンダリングアルゴリズム、自習曲面の生成手法、曲線・曲面の形状制御などに興味をもつ。



高村 禎二 (正会員)

昭和 35 年 2 月 21 日生。昭和 57 年東京大学理工学部情報科学卒業。(株)リコーソフトウェア事業部にて、ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。平成 5 年、ヒワサキコンピュータシステム取締役。レイトレーシング、自由曲面間の干渉計算、曲面の内挿、曲線・曲面の形状制御などに興味を持つ。理学博士。ACM, IEEE 各会員。

**千代倉弘明 (正会員)**

昭和29年4月11日生。昭和54年慶應義塾大学工学部数理工学科卒業。昭和56年同大学修士課程修了。昭和59年東京大学工学部精密機械博士課程修了。同年(株)リコーに入社。ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。平成2年慶應義塾大学環境情報学部助教授。著書に「ソリッドモデリング」(工業調査会), 「Solid Modelling with DESIGNBASE」(Addison-Wesley), 「3次元CADの基礎と応用」(共立出版)がある。ACM 会員。
