

## NURBS 境界 Gregory パッチによる自由曲面形状の内挿方法

今野 晃 市† 千代倉 弘明††

複雑な自由曲面を設計する場合には、曲面形状を容易にしかも直観的に生成、変形できることが重要である。一般に曲面形状を設計する場合には、断面線や曲面の境界曲線などの特徴線を入力し、この曲線を基にして曲面形状を作成する。現在広く用いられている NURBS 曲面では、不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することが困難であるという問題がある。このことは、形状を設計するうえで大きな制約となる。そこで本論文では、NURBS 曲線、NURBS 曲面を含んだ不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿するための曲面表現を提案する。

### An Approach of Designing Free-Form Surfaces by Using NURBS Boundary Gregory Patches

KOUICHI KONNO† and HIROAKI CHIYOKURA††

Designers always require to design complex free-form surfaces easily and intuitively. One of the general approaches to design such surfaces is to define, at first, a curve mesh consisting of characteristic lines, such as cross sections and boundary curves, and then to interpolate the curve mesh by free-form surfaces. NURBS surface, widely used, is difficult to interpolate an irregular curve mesh smoothly, which has been big constraint for designers. In this article, we propose a new surface representation which can smoothly interpolate an irregular curve mesh with NURBS curves and surfaces.

#### 1. はじめに

近年、計算機の性能向上にともなって、CAD システム、特にソリッドモデラーに対する期待が高まっている。CAD システムを導入して製品の設計時間を短縮し、短時間で競争力のある製品を作り上げることが大きな課題となっている。中でも自動車や家電、航空機の設計など自由曲面を多用する分野では、複雑な自由曲面を含んだ形状を容易に設計できることが望まれている。

従来、自由曲面を含んだ形状を設計する場合には、まず曲面形状の断面線や境界曲線などの特徴となる曲線を入力し、曲線メッシュを作成する。その後、曲線メッシュで囲まれた領域を自由曲面で内挿する。曲線メッシュは設計したい立体の大まかな形状を表している。したがって、曲線メッシュを自由曲面で内挿する場合には、設計者の意図を曲線メッシュから汲みと

ったものでなければならない。

NURBS 曲線<sup>7),11),13)</sup> は、1本の曲線で Bézier 曲線や有理 Bézier 曲線の複合曲線を表現できる。よって、フィレット面生成や集合演算によって複雑化する曲線メッシュを NURBS 曲線で表現することによって、単純なメッシュで複雑な形状を表現できる。このことは、操作性の向上やデータ量の減少につながり、設計者の負担は軽減されることを意味する。NURBS 曲線を含んだ不規則な曲線メッシュ<sup>5)</sup> を滑らかに内挿するための曲面表現として一般境界 Gregory パッチ<sup>10)</sup>がある。一般境界 Gregory パッチは、一般 Coons パッチ<sup>1)</sup>と Gregory パッチ<sup>3)-5)</sup>、有理境界 Gregory パッチ<sup>6)</sup>を融合した曲面表現であり、境界曲線と境界における CBD (Cross Boundary Derivative)<sup>8)</sup>を独立に定義できる。しかし、今野らの提案した表現式では、CBD に NURBS 表現を許していないので、隣接する NURBS 曲面と滑らかに接続することができない。

そこで我々は、一般境界 Gregory パッチを拡張し CBD に NURBS 表現を許した曲面表現を提案する。この拡張によって、NURBS 曲線を含んだ不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿することができ、しかも

† (株)リコー ソフトウェア事業部  
Software Division, RICOH COMPANY LTD.

†† 慶応義塾大学環境情報学部  
Faculty of the Environment Information, Keio  
University

隣接する NURBS 曲面と  $G^1$  連続になる自由曲面を生成することが可能となる。我々は、この拡張された曲面を NURBS 境界 Gregroy パッチと呼ぶことにする。

2. NURBS 曲面による内挿の問題点

NURBS 曲面は、NURBS 曲線を境界とする曲面であり、複雑な曲面形状を単一の形式で表現することができる。一般に曲線メッシュを内挿する場合には、その境界曲線と境界の端点での接続状態を調べ、連続性の条件式を解くことによって境界横断導関数を得る。このような過程の中で得られた関数を NURBS 曲面にどのようにあてはめればよいのかを考える。

2.1 NURBS 曲面

双 3 次の NURBS 曲面の表現式は次式のようになる。

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n M_{i,3}(u) N_{j,3}(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n M_{i,3}(u) N_{j,3}(v) w_{ij}} \quad (1)$$

ここで、 $M_{i,3}(u)$ ,  $N_{j,3}(v)$  は次式に示されるような  $u, v$  パラメータ方向の基底関数である。

$$M_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$M_{i,k}(u) = \frac{(u-u_i)M_{i,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_i} + \frac{(u_{i+k}-u)M_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_{i+1}}, \quad (2)$$

$$N_{j,0}(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v_j \leq v < v_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$N_{j,l}(v) = \frac{(v-v_j)N_{j,l-1}(v)}{v_{j+l}-v_j} + \frac{(v_{j+l}-v)N_{j+1,l-1}(v)}{v_{j+l}-v_{j+1}}. \quad (3)$$

ただし、 $P_{ij}$  は制御点、 $w_{ij}$  は各制御点での重みとする。 $u, v$  方向のノットベクトルは  $[u_0 u_1 \dots u_p]$ ,  $[v_0 v_1 \dots v_q]$  となる。ここで、 $p=m+k+1$ ,  $q=n+l+1$  でなければならない。 $(m+1)$ ,  $(n+1)$  は  $u, v$  方向における制御点の数とする。

2.2 NURBS 曲面を用いた内挿

図 1 は、4本の曲線で囲まれる領域を内挿した NURBS 曲面の制御点を示している。境界曲線は、それぞれ 3本のセグメントで構成される NURBS 曲線である。このようなメッシュを内挿する場合、まず相対する 2本の曲線の次数とノットを合わせ境界の制御点を決定する。その後、この図の箱で囲まれた

CBD を表す制御点を決定する。このとき、中間ノット  $u_0, u_1, v_0, v_1$  に位置する微分ベクトルを適切に決定しないと意図した形状を得ることが困難である。なぜならば、これらの微分ベクトルは曲面上の断面線の微分ベクトルを表しているので、曲面形状に大きく影響するからである。また箱で囲まれた制御点の更に内側にある内部制御点は、境界曲線と CBD から何らかの方法により決定しなければならない。

箱で囲まれた制御点のうちで重複している制御点があることから、NURBS 曲面は CBD を境界で独立

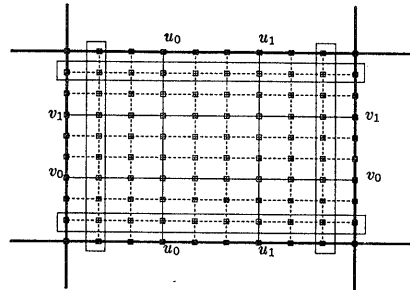


図 1 NURBS 曲面によるメッシュの内挿  
Fig. 1 An interpolation by a NURBS surface.

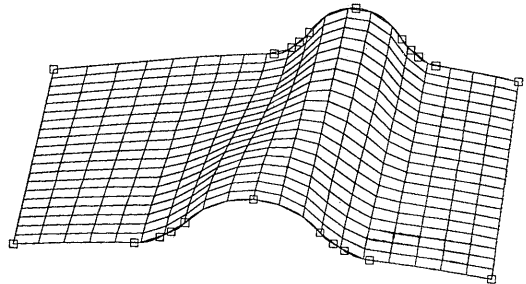


図 2 NURBS 曲面のパラメータ線  
Fig. 2 Parametric lines of a NURBS surface.

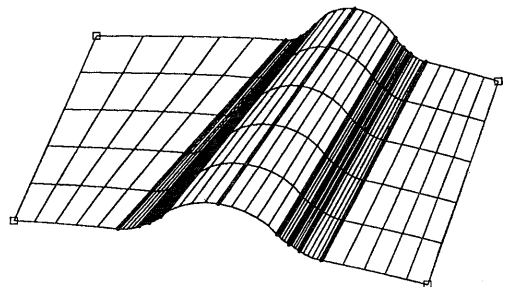


図 3 Gregroy パッチのパラメータ線  
Fig. 3 Parametric lines of Gregroy patches.

に定義できない。したがって、NURBS 曲面は不規則な曲線メッシュをなめらかに内挿することが困難であることがわかる<sup>2)</sup>。規則的な曲線メッシュのみで形状を設計することは容易ではなく、ユーザーの負担は大きく増大する。

図 2 は、NURBS 曲面を使って内挿した曲面のパラメタ線を表している。中間ノットにおける微分ベクトルは、境界の端点での微分ベクトルを線形に補間したものである。この図からも分かるように、生成された曲面形状は大きく歪んでいる。このような曲線メッシュでは、図 3 のような形状が生成されることが望まれる。この図では、相対する 2 本の曲線の節点に太線で示すような曲線を追加して、複数の Gregory パッチで内挿したときのパラメタ線を示している。曲線を追加してメッシュを分割する操作では、曲線メッシュを複雑化し、データ量の増大や操作性の低下をまねく。メッシュを分割せずに意図した形状を得るためには、境界における CBD を境界曲線の節点ごとに指定できなければならない。

次章では、以上の問題点を解決した NURBS 境界 Gregory パッチについての説明を行う。

### 3. NURBS 境界 Gregory パッチ

#### 3.1 NURBS 境界 Gregory パッチの概念

NURBS 境界 Gregory パッチは、一般境界 Gregory パッチを拡張した曲面で、境界曲線として NURBS 曲線を許した曲面表現である。図 4 は、その概念図を示している。

NURBS 境界 Gregory パッチ  $S(u, v)$  は以下の

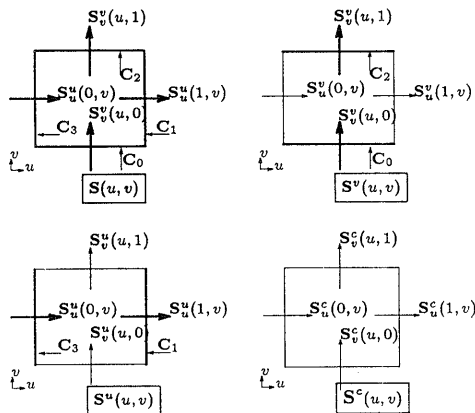


図 4 NURBS 境界 Gregory パッチの概念図  
Fig. 4 Concept of NURBS Boundary Gregory patch.

ような式で表される。

$$S(u, v) = S^u(u, v) + S^v(u, v) - S^c(u, v). \quad (4)$$

$S^u(u, v)$  は、相対する 2 本の NURBS 曲線  $C_3, C_1$  と各境界での CBD  $S_u^u(0, v), S_u^u(1, v)$  とで表現される曲面となる。同様に  $S^v(u, v)$  は、相対する 2 本の NURBS 曲線  $C_0, C_2$  と各境界での CBD  $S_v^v(u, 0), S_v^v(u, 1)$  とで表現される曲面となる。ここで、 $S_u = \partial S / \partial u, S_v = \partial S / \partial v$  をそれぞれ表している。以下では、 $S^u$  を U 曲面、 $S^v$  を V 曲面、 $S^c$  を C 曲面と呼ぶことにする。

C 曲面  $S^c$  は、U 曲面、V 曲面を加えることによって生じる余剰な部分である。U、V、C 曲面の関係を調べるために、式(4)に  $u=0, 1, v=0, 1$  を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} S^u(u, 0) &= S^c(u, 0), S^u(u, 1) = S^c(u, 1), \\ S^v(0, v) &= S^c(0, v), S^v(1, v) = S^c(1, v), \\ S_u^u(u, 0) &= S_c^c(u, 0), S_u^u(u, 1) = S_c^c(u, 1), \\ S_v^v(0, v) &= S_c^c(0, v), S_v^v(1, v) = S_c^c(1, v). \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)から、C 曲面の境界曲線、CBD は、U、V 曲面の不要な境界とその境界での CBD により構成され、2 枚の曲面から拘束されていることが分かる。よって C 曲面は、CBD を各パラメタで独立に定義できる表現でなければならない。

次節では、本節で述べた概念をもとにした NURBS 境界 Gregory パッチの表現式について説明する。

#### 3.2 NURBS 境界 Gregory パッチの表現形式

本節では、式(4)の各項がどのような式で表されるかを述べる。 $S^u, S^v$  はパラメタ空間が異なるが表現は同じと考えてよいので、 $S^u$  と  $S^c$  の式を説明する。

$S^u$  は、2 本の境界曲線  $C_3, C_1$  とこれらの CBD によって表される。次式に示すように、曲線  $C_3, C_1$  は、それぞれ  $n+1$  個の制御点  $P_{0,j}^u, P_{n,j}^u$  とその重み  $w_{0,j}^u, w_{n,j}^u$  をもつ  $k$  次の NURBS 曲線

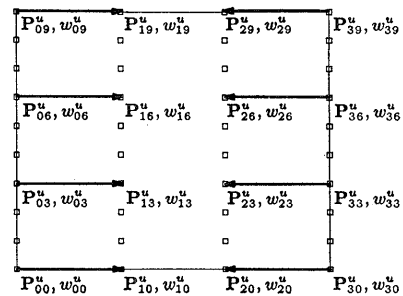


図 5 NURBS 境界 Gregory パッチの U 曲面  
Fig. 5 U surface of NURBS Boundary Gregory patch.

である。

$$C_3(v) = \frac{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{0,j}^u P_{0,j}^u}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{0,j}^u},$$

$$C_1(v) = \frac{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{3,j}^u P_{3,j}^u}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{3,j}^u}. \quad (6)$$

ここで、 $N_{j,k}(v)$  は式(3)に示されるような B-spline 基底関数である。ただし、 $v_j$  は正規化されたノットベクトルで、以下のように表される。

$$[0, \dots, 0, \underbrace{v_0, \dots, v_0}_{k+1 \text{ 個}}, \dots, \underbrace{v_j, \dots, v_j}_{k \text{ 個}}, \dots, \underbrace{v_j, \dots, v_j}_{k \text{ 個}}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1 \text{ 個}}]. \quad (7)$$

CBD  $S_u^0(0, v)$  と  $S_u^0(1, v)$  を NURBS で表現するために、曲面  $S^u$  は次のような NURBS 曲面として表すことができる (図 5)。

$$S^u(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^n M_{i,3}(u)N_{j,k}(v)w_{i,j}^u P_{i,j}^u}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^n M_{i,3}(u)N_{j,k}(v)w_{i,j}^u}. \quad (8)$$

ただし、 $M_{i,3}, N_{j,k}$  は、式(2)と式(3)で表される B-spline 基底関数とし、 $u$  方向のノットベクトルは  $[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ 、 $v$  方向のノットベクトルは式(7)とする。今後議論を簡単化するために、境界曲線の次数は3次で、10個の制御点を持つ。つまり  $n=9, k=3$  とする。

$S^c$  は、式(5)を満たすような双3次の有理式で表現される。

$$S^c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_3^i(u)B_3^j(v)P_{i,j}^c(u, v)}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_3^i(u)B_3^j(v)w_{i,j}^c(u, v)}. \quad (9)$$

ただし、 $i=0, 1$  かつ  $j=0, 1$  のとき、

$$P_{i,j}^c(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c + v^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c}{u^2 + v^2},$$

$$w_{i,j}^c(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j}^c + v^2 w_{i,j}^c}{u^2 + v^2}, \quad (10)$$

$i=0, 1$  かつ  $j=2, 3$  のとき、

$$P_{i,j}^c(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c + (1-v)^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c}{u^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{i,j}^c(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j}^c + (1-v)^2 w_{i,j}^c}{u^2 + (1-v)^2}, \quad (11)$$

$i=2, 3$  かつ  $j=0, 1$  のとき、

$$P_{i,j}^c(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c + v^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c}{(1-u)^2 + v^2},$$

$$w_{i,j}^c(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j}^c + v^2 w_{i,j}^c}{(1-u)^2 + v^2}, \quad (12)$$

$i=2, 3$  かつ  $j=2, 3$  のとき、

$$P_{i,j}^c(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c + (1-v)^2 w_{i,j}^c P_{i,j}^c}{(1-u)^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{i,j}^c(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j}^c + (1-v)^2 w_{i,j}^c}{(1-u)^2 + (1-v)^2}. \quad (13)$$

ただし  $P_{i,j}^c, w_{i,j}^c$  は、 $S^c$  の制御点と重みを表し、 $B_3^i(u), B_3^j(v)$  は次式のような Bernstein 多項式とする。

$$B_3^i(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i}. \quad (14)$$

$S^c$  は、32個の制御点を持つ曲面であり、図6はその制御点と重みの配置図を示している。この図から分かるように、境界を表す制御点と CBD を表す制御点はすべて2重に持っている。式(10)から式(13)の  $P_{i,j}^c, w_{i,j}^c$  の評価式から、制御点  $P_{i,j}^c$  と重み  $w_{i,j}^c$  の項はパラメタ値  $u=0$  または  $u=1$  のときには0になり、制御点  $P_{i,j}^c$  と重み  $w_{i,j}^c$  の項はパラメタ値  $v=0$  または  $v=1$  のときには0になる。よって、 $P_{i,j}^c, w_{i,j}^c$  はU曲面から、 $P_{i,j}^c, w_{i,j}^c$  はV曲面から得ることができる。

式(5)を式(9)に適用すると、制御点  $P_{i,j}^c$  と重み  $w_{i,j}^c$  は、以下のように定義できる。

- $ij=01, 11, 21, 31$  のとき
 
$$P_{i,j}^c = P_{i,j-1}^u + v_0 * (P_{i,j}^u - P_{i,j-1}^u), w_{i,j}^c = w_{i,j}^u. \quad (15)$$

ただし、 $v_0$  はU曲面の  $P_{03}^u$  における  $v$  方向のノットとする。

- $ij=02, 12, 22, 32$  のとき
 
$$P_{i,j}^c = P_{i,j+1}^u - v_1 * (P_{i,j+1}^u - P_{i,j}^u), w_{i,j}^c = w_{i,j}^u. \quad (16)$$

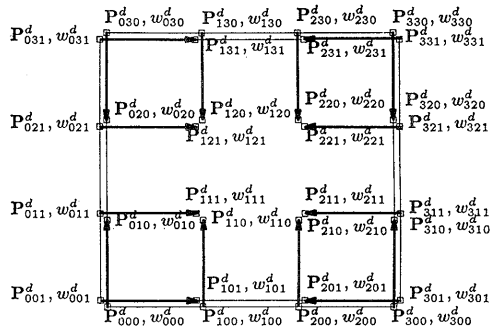


図 6 NURBS 境界 Gregory パッチの C 曲面  
Fig. 6 C surface of NURBS Boundary Gregory patch.

ただし,  $v_1$  はU曲面の  $P_{06}^u$  における  $v$  方向のノットする。

- $ij \neq 01, 11, 21, 31, 02, 12, 22, 32$  のとき

$$P_{ij,0}^d = P_{ij}^d, w_{ij,0}^d = w_{ij}^d. \quad (17)$$

である。このとき, C曲面の4隅の点は, それぞれ一致していなければならない。

$$\begin{aligned} P_{000}^d &= P_{001}^d, P_{300}^d = P_{301}^d, \\ P_{030}^d &= P_{031}^d, P_{330}^d = P_{331}^d. \end{aligned} \quad (18)$$

制御点  $P_{ij,1}^d$  と重み  $w_{ij,1}^d$  も同様の方法で, V曲面から得ることができる。

### 3.3 NURBS 境界 Gregory パッチの特徴

NURBS 境界 Gregory パッチは以下のような特徴を持っている。

- CBD 関数を各境界で独立に定義できる。C曲面を式(5)を満たすように設定することによって, たとえば  $u=0$  のときには,  $S_u(0, v) = S_u^u(0, v)$  が成り立つ。つまり各境界での微分ベクトルは, U, V曲面のいずれかにより定義できることから, 不規則な曲線メッシュをなめらかに内挿することが可能となる。
- 境界曲線の独立な制御が可能である。式(4)から, U曲面, V曲面が独立に設定できかつ  $u, v$  パラメタにおける境界曲線の拘束条件は, 式(18)しかない。よって, 曲線の端点の重みは, 境界ごとに独立に制御できる。
- 境界曲線は NURBS 曲線となる。
- Gregory パッチ, 有理境界 Gregory パッチ, 一般境界 Gregory パッチと接続が可能である。CBD は NURBS 表現なので, (有理) Bézier 表現を含んでいる。このことから, これらの Gregory 系曲面間の接続で得られた CBD を NURBS で表現することによって,  $G^1$  連続に接続することが可能となる。
- NURBS 境界 Gregory パッチは NURBS 曲面に正確に変換できる。

U, V曲面は, NURBS 曲面で表現されている。また, C曲面は有理境界 Gregory パッチと同様の表現形式であるので, NURBS 曲面に正確に変換可能である<sup>12)</sup>。3枚の NURBS 曲面を1枚で表現することは可能であるので, NURBS 境界 Gregory パッチは1枚の NURBS 曲面に正確に変換できる。

### 4. NURBS 境界 Gregory パッチ間の接続

本章では NURBS 境界 Gregory パッチの接続方

法について述べる。図7に示すように, 2枚の面  $S^1$  と  $S^2$  が共有境界曲線を挟んで配置されているとする。2枚の曲面が  $G^1$  連続に接続されるための条件式は以下の式で表すことができる。

$$\frac{\partial S^2(0, v)}{\partial u} = k(v) \frac{\partial S^1(1, v)}{\partial u} + h(v) \frac{\partial S^1(1, v)}{\partial v}. \quad (19)$$

ただし,  $k(v), h(v)$  は任意のスカラー関数とする。2枚のパッチを  $G^1$  連続にするためにはU曲面のみを考慮すればよいので, 式(19)は次式に置き換えることができる。

$$S_u^{2u}(0, v) = k(v) S_u^{1u}(1, v) + h(v) S_v^{1u}(1, v). \quad (20)$$

$S^{1u}$  は, 曲面  $S^1$  のU曲面を表し,  $S^{2u}$  は, 曲面  $S^2$  のU曲面を表す。境界曲線の端点  $V_0, V_1$  につながる曲線の制御点間ベクトルをそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= P_{3i}^{1u} - P_{2i}^{1u}, \quad \mathbf{b}_i = P_{1i}^{2u} - P_{0i}^{2u}, \\ \mathbf{c}_j &= P_{j+1,3}^{1u} - P_{j3}^{1u}. \end{aligned}$$

とおく ( $i=0, \dots, 9; j=0, \dots, 8$ )。ただし,  $P_{2i}^{1u}, P_{3i}^{1u}$  はU曲面  $S^{1u}$  の制御点,  $P_{0i}^{2u}, P_{1i}^{2u}$  はU曲面  $S^{2u}$  の制御点,  $w_{2i}^{1u}, w_{3i}^{1u}$  と  $w_{0i}^{2u}, w_{1i}^{2u}$  は各制御点での重みとする。これらのベクトルは, 曲面の境界における微分ベクトルを表している。しかし, 一般に式(8)の  $u, v$  方向の微分式は複雑になり,  $G^1$  連続の条件を直接解くのは困難である。そこで我々は, U曲面における  $v$  方向のノットベクトルを式(7)のような形式に制限し, 既存の接続式を用いて  $G^1$  連続に接続することを提案する。式(7)のようなノットベクトルによって, 境界曲線とその CBD 関数は複合同理 Bézier 形式として扱える。よって, 節点から節点までの曲線とその CBD を考慮して各区間を  $G^1$  連続に接続することで, 2枚のU曲面は  $G^1$  連続に接続できる。このとき節点の位置にある制御点間ベクトル  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$  ( $i=3, 6$ ) はすでに分かっているとす。

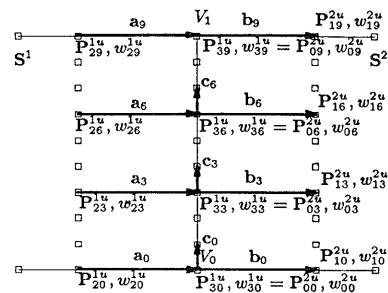


図7 NURBS 境界 Gregory パッチ間の接続  
Fig. 7 Joining two NURBS Boundary Gregory patches.

境界曲線の区分曲線間の接続を行う場合、境界曲線の端点につながる曲線から  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_9$  は得られ、前述したように  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$  ( $i=3, 6$ ) は既知であるので、各ノットからノットまでの区分有理 Bézier 曲線間の接続問題を解けばよい。1例として、 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  を求めるプロセスを説明する。このプロセスは、大別して2つに分けられる。1つは、境界の両側の制御点間ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  が未知数になっているケースで、基礎パッチ法<sup>5)</sup>を用いてこれらを計算する。もう1つは、曲面  $S^1$  が NURBS 曲面のときに  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  を求めるケースである。

基礎パッチ法による接続

区分境界曲線に関する制御点とその重み  $P_{ij}^u, w_{ij}^u$  ( $i=2, 3; j=0, \dots, 3$ ),  $P_{ij}^v, w_{ij}^v$  ( $i=0, 1; j=0, \dots, 3$ ) に対して、式(20)を適用する。このとき、式(8)の微分式を簡略化するために、重みに以下のような制限を設ける。

$$w_{1j}^v = w_{2j}^v = w_{3j}^v = w_{ij}^v. \tag{21}$$

また、区分境界曲線の端点における制御点間ベクトルが

$$\mathbf{b}_0 = k_0 \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_3 = k_1 \mathbf{a}_3, \tag{22}$$

の関係にあるならば、 $h(v)=0$  とおくことができ、これによって、式(20)は以下のように書き直すことができる。

$$\sum_{j=0}^m B_j^m(v) w_j \mathbf{b}_j = k(v) \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{3j}^u \mathbf{a}_j. \tag{23}$$

ただし、 $m$  は次数、 $w_j$  は曲面  $S^2$  の境界の制御点での重みを表し、 $B_j^m(v)$  は式(14)のような Bernstein 多項式とする。式(23)のスカラー関数  $k(v)$  を  $k(v) = k_0(1-v) + k_1v$  のような1次関数と仮定したときに、右辺は4次にならなければならない。このことは、接続に関する対称性がなくなることを意味し、 $S^1$  に  $S^2$  を接続した場合と、 $S^2$  に  $S^1$  を接続した場合とは、曲面の次数が異なることになる。基礎パッチ法を用いて、 $\mathbf{a}_j$  ( $j=0, \dots, 3$ ) の項を2次に次数下げができると仮定することによって、対称性を保つことができる。つまり、 $\sum_{j=0}^3 B_j^3(v) w_{3j}^u \mathbf{a}_j$  は、 $w_{30}^u \mathbf{a}_0, w_{33}^u \mathbf{a}_3$  の3項で表現できるとする。ただし、 $\mathbf{a}_1 = (2\mathbf{q} + w_{30}^u \mathbf{a}_0) / 3w_{31}^u$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2\mathbf{q} + w_{33}^u \mathbf{a}_3) / 3w_{32}^u$  である。以上のことから、ベクトル  $\mathbf{b}_1$  と  $\mathbf{b}_2$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (2k_0 \mathbf{q} + k_1 w_{30}^u \mathbf{a}_0) / 3w_{31}^u, \\ \mathbf{b}_2 &= (2k_1 \mathbf{q} + k_0 w_{33}^u \mathbf{a}_3) / 3w_{32}^u. \end{aligned} \tag{24}$$

のように求められる。基礎パッチ法による有理 Bézier 曲線間の一般的な接続方法の詳細に関しては、参考文

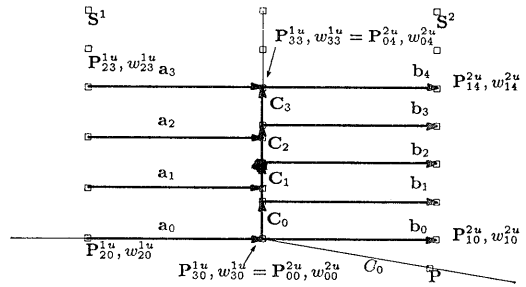


図8 NURBS 曲面との接続  
Fig. 8 Joining to NURBS surface.

献 6) を参照されたい。

NURBS 曲面との接続

図8に示すように、区分境界曲線に関する制御点とその重み  $P_{ij}^u, w_{ij}^u$  ( $i=2, 3; j=0, \dots, 3$ ),  $P_{ij}^v, w_{ij}^v$  ( $i=0, 1; j=0, \dots, 4$ ) に対して、式(20)を適用する。この場合、NURBS 曲面  $S^1$  の次数は3次とする。また NURBS 境界 Gregory パッチの性質により、U 曲面の CBD は V 曲面の CBD とはまったく独立に設定することができることから、共有境界の端点における微分ベクトル  $\mathbf{b}_0$  は、端点における接平面上にあれば境界曲線  $C_0$  の微分ベクトルと一致している必要はない。よって境界が不規則なケースのときに  $h(v)=0$  と仮定しても、接続時の一般性は失われない。このことから、式(20)は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 B_i^4(v) B_j^4(v) w_{ij}^u w_{ij}^v (P_{ij}^u - P_{0j}^v) \\ &= k(v) \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(v) B_j^3(v) w_{3j}^u w_{ij}^v (P_{3j}^u - P_{ij}^v). \end{aligned} \tag{25}$$

ただし、 $B_i(v), B_j(v)$  は Bernstein 多項式で式(14)のように表される。

基礎パッチ法による接続と同様に式(25)の両辺の次数について考えてみる。まず、曲面  $S^1$  は3次なので、 $S^1$  の  $u$  方向の微分ベクトル関数  $S_u^1$  は6次になる。式(25)のスカラー関数  $k(v)$  を  $k(v) = k_0(1-v) + k_1v$  のような1次関数と仮定したときに、左辺の次数は7次になる。しかし、一般に  $n$  次の有理 Bézier 表現を微分した式は、 $2n$  次になるので、左辺は偶数次でなければならない。 $S_u^1$  の項を6次から7次に次数上げすることによって、右辺の次数は8次になり、接続によって4次の曲面が生成される。

以上のことから式(25)は、

$$\sum_{i=0}^8 B_i^8(v) \mathbf{Q}_i^{2u} = k(v) \sum_{i=0}^7 B_i^7(v) \mathbf{Q}_i^{1u}. \quad (26)$$

と書き替えることができる。ただし、 $\mathbf{Q}_i^{1u}, \mathbf{Q}_i^{2u}$  は、 $\mathbf{P}_{ij}^u, w_{ij}^u$  ( $i=2, 3; j=0, \dots, 3$ ),  $\mathbf{P}_{ij}^u, w_{ij}^u$  ( $i=0, 1; j=0, \dots, 4$ ) で表される多項式とする。式(26)では、 $k_0, k_1, w_{i0}^u, w_{i1}^u, w_{i2}^u, w_{i3}^u, w_{i4}^u, \mathbf{P}_{i0}^u, \mathbf{P}_{i1}^u, \mathbf{P}_{i2}^u, \mathbf{P}_{i3}^u, \mathbf{P}_{i4}^u$  の12個が未知数となる。

まず、区分境界の端点につながる制御点間ベクトル  $\mathbf{b}_0$  と  $\mathbf{b}_4$  を決定する。これらのベクトルは、境界曲線の端点  $\mathbf{P}_{30}^u, \mathbf{P}_{33}^u$  における接平面上にあり、制御点間ベクトル  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3$  とそれぞれ同一直線上に存在するように設定することによって、式(26)を満たす。従って、制御点間ベクトル  $\mathbf{b}_0$  はその大きさを曲線  $C_0$  の制御点間ベクトル  $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{30}^u)$  と同じとし、 $\mathbf{a}_0$  と同じ方向のベクトルとする。 $\mathbf{b}_4$  は、境界の節点における微分ベクトルであるので、式(26)を満たすベクトルを設定する。またこれらの制御点での重みは、 $w_{i0}^u = w_{i3}^u, w_{i4}^u = w_{i2}^u$  となるように設定しておく。 $k_0, k_1$  は境界曲線の端点の条件から以下のように、容易に計算できる。

$$w_{i0}^u w_{i3}^u \mathbf{b}_0 = k_0 w_{i0}^u w_{i3}^u \mathbf{a}_0,$$

$$w_{i4}^u w_{i2}^u \mathbf{b}_4 = k_1 w_{i4}^u w_{i2}^u \mathbf{a}_3.$$

その他の値の導出は複雑であるのでここでは述べないが、これを解くことによって、以下の式が得られる。

$$w_{i1}^u = \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i0}^u} - k_0 \left( w_{i1}^u - \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u}{w_{i0}^u} \right) - \frac{1}{4} w_{i0}^u - \frac{1}{4} k_1 \left( w_{i3}^u - \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i4}^u} \right) + \frac{1}{4} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i4}^u}, \quad (27)$$

$$w_{i2}^u = \frac{-2}{3} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i0}^u} + k_0 \left( \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u}{w_{i0}^u} - w_{i2}^u + \frac{2}{3} w_{i1}^u + \frac{-2}{3} \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u}{w_{i0}^u} \right) + k_1 \left( \frac{-2}{3} w_{i1}^u + \frac{1}{6} w_{i3}^u - \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i4}^u} + \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i4}^u}{w_{i4}^u} \right) + \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i0}^u} + \frac{1}{6} w_{i0}^u - \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u}{w_{i4}^u} + \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i4}^u}{w_{i4}^u}, \quad (28)$$

$$w_{i3}^u = \frac{1}{4} \frac{w_{i4}^u w_{i0}^u}{w_{i0}^u} + k_0 \left( \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u}{w_{i0}^u} - w_{i3}^u \right) + k_1 \left( \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u}{w_{i4}^u} - w_{i3}^u \right) + \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u}{w_{i4}^u} - \frac{1}{4} w_{i4}^u, \quad (29)$$

$$w_{i1}^u \mathbf{b}_1 = k_0 \left( \frac{-1}{4} w_{i0}^u \mathbf{a}_0 + w_{i1}^u \mathbf{a}_1 \right) + k_1 \left( \frac{1}{4} w_{i3}^u \mathbf{a}_0 + \frac{1}{4} w_{i3}^u \mathbf{a}_0 - \frac{1}{4} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_0}{w_{i4}^u} \right) + \frac{1}{4} w_{i0}^u \mathbf{c}_0 - \frac{1}{4} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_0}{w_{i4}^u}, \quad (30)$$

$$w_{i2}^u \mathbf{b}_2 = k_0 \left( \frac{1}{6} w_{i0}^u \mathbf{a}_0 - \frac{2}{3} w_{i1}^u \mathbf{a}_1 + w_{i2}^u \mathbf{a}_2 - \frac{2}{3} w_{i3}^u \mathbf{c}_1 + \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_1}{w_{i0}^u} \right) + k_1 \left( \frac{-1}{6} w_{i0}^u \mathbf{a}_0 + \frac{2}{3} w_{i1}^u \mathbf{a}_1 - \frac{1}{6} w_{i3}^u \mathbf{c}_0 + \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_0}{w_{i4}^u} + \frac{2}{3} w_{i3}^u \mathbf{c}_1 - \frac{1}{6} w_{i3}^u \mathbf{c}_1 + \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} - \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} \right) - \frac{1}{6} w_{i0}^u \mathbf{c}_0 + \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_0}{w_{i4}^u} + \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} - \frac{1}{6} w_{i0}^u \mathbf{c}_1 + \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} + \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} - \frac{1}{6} w_{i0}^u \mathbf{c}_0 + \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_0}{w_{i4}^u} + \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} - \frac{1}{6} w_{i0}^u \mathbf{c}_1 + \frac{1}{6} \frac{w_{i0}^u w_{i4}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u} - \frac{2}{3} \frac{w_{i1}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_1}{w_{i4}^u}, \quad (31)$$

$$w_{i3}^u \mathbf{b}_3 = \frac{k_0}{4} \left( w_{i3}^u \mathbf{a}_4 + \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_3}{w_{i0}^u} - w_{i3}^u \mathbf{c}_3 \right) + k_1 \left( w_{i3}^u \mathbf{a}_3 - \frac{1}{4} w_{i4}^u \mathbf{a}_4 \right) + \frac{1}{4} \frac{w_{i4}^u w_{i3}^u \mathbf{c}_3}{w_{i0}^u} - \frac{1}{4} w_{i3}^u \mathbf{c}_3. \quad (32)$$

以上のような方法で、隣接する2枚の NURBS 境界 Gregory パッチ間と NURBS 曲面と NURBS 境界 Gregory パッチ間の接続ができるようになった。

### 5. NURBS 境界 Gregory パッチによる 曲線メッシュの内挿

本章では、4章で述べた接続法を用いて、曲線メッシュを内挿する方法について説明する。

図9は、シンプルな曲線メッシュを表している。ここで、面  $F_1$  は4本の NURBS 曲線  $E_i$  ( $i=0, \dots, 3$ ) に囲まれる領域を表している。以下のような過程で面  $F_1$  は NURBS 境界 Gregory パッチで内挿される。

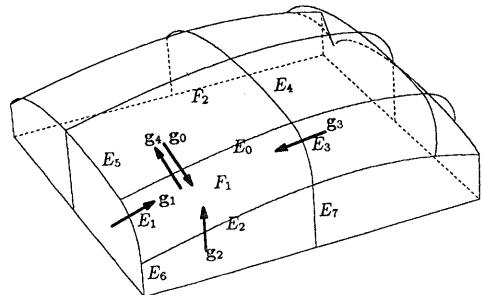


図9 NURBS 境界 Gregory パッチによるメッシュの内挿  
Fig. 9 An interpolation by a NURBS Boundary Gregory patch.

1. CBD 関数の定義

面を内挿する場合、まず各稜線における CBD を定義する。CBD  $g_0(t)$  は NURBS で表現され、稜線  $E_1, E_3$  と  $E_0$  の NURBS 曲線の節点における微分ベクトルから定義される。このとき、稜線  $E_0$  の端点につながる稜線  $E_0, E_1, E_3$  と稜線  $E_0, E_3, E_4$  の端点での接ベクトルが式(19)を満たすときには、これらの稜線から CBD  $g_0(t)$  を定義する。このことは、境界稜線  $E_0$  において、2枚の面  $F_1, F_2$  が  $G^1$  連続に接続されるときには、CBD  $g_0(t) = -g_4(t)$  の関係があることを示している。その他の CBD  $g_i(t)$  ( $i=1, \dots, 3$ ) も同様の方法で定義できる。

2. 内部制御点の決定

面  $F_1$  の境界曲線での CBD が定義されたならば、4章で述べた接続式に従って内部制御点を決定する。この段階で、U、V曲面が決定できる。

3. C曲面の決定

U、V曲面の制御点情報から、式(15)から式(18)までの関係式を使って、C曲面の制御点を決定する。

6. NURBS 境界 Gregory パッチを使った形状設計例

本章では、NURBS 境界 Gregory パッチを使った形状設計例を示す。

図2に示したように、NURBS 曲面で内挿した曲面形状は歪んでいる。歪みの原因は、節点において適切な微分ベクトルが設定できていないことがあげられる。ここで、NURBS 曲面の節点における微分ベクトルの大きさが  $1/3$  となる点を示し、同じパラメタを持つ節点における微分ベクトルから得られる曲線を表示したものが図10である。曲面形状の歪みが、この図で示した曲線にも現れていることが分かる。我々

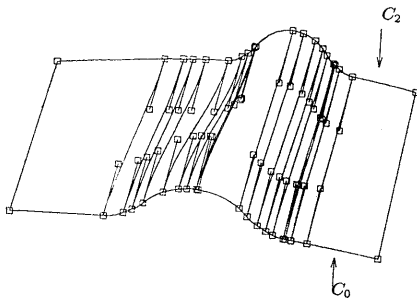


図10 NURBS 曲面の節点における微分ベクトル  
Fig. 10 Derivative vectors of NURBS surface at joints.

は、以下のような手順によってこの歪みを補正した。

1. 節点での微分ベクトルの設定：図3の太線で示すような面を分割する曲線を想定し、その曲線の端点における微分ベクトルを節点の微分ベクトルとして設定する(図11)。

2. 境界のノットの設定：相対する2曲線のノットを各曲線の節点で一致させる。ここでは、2曲線の各節点におけるパラメタ値の平均をとった。

これによって、図12のようなパラメタ線となり、ゆがみの発生を抑制することができた。

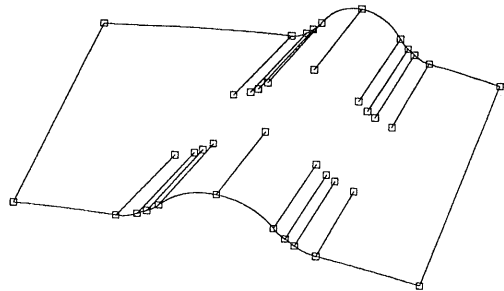


図11 微分ベクトルを補正した曲面  
Fig. 11 Modified derivatives of a surface.

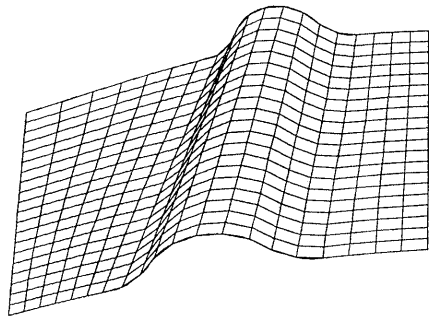


図12 補正した曲面のパラメタ線  
Fig. 12 Parametric lines of the modified surface.

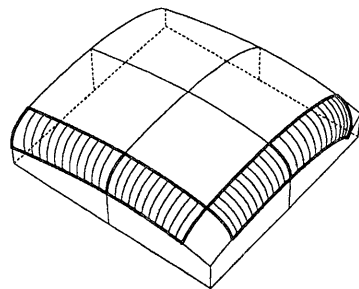


図13 Gregory パッチを使ったフィレット面の表現  
Fig. 13 Fillet surfaces by using Gregory patches.



図 13 では, Gregory パッチを用いたフィレット面<sup>9)</sup>を表している. NURBS 境界 Gregory パッチを用いて, このようなフィレット面を一枚の曲面で表すことを考える. 図 13 に示すように, 太線で囲まれた内部の稜線を境界曲線の節点での微分ベクトルで置き換え, 一枚の NURBS 境界 Gregory パッチでフィレット面で表現した (図 14). 図 15 は断面線を示している. この場合, Gregory パッチによるフィレット面と NURBS 境界 Gregory パッチによるフィレット面形状の最大距離は, 曲面の大きさが  $10^3$  であるのに対して, 約 1 となる. このことから, Gregory パッチによるフィレット面とは,  $10^{-3}$  程度の形状の違いがあることが分かる. 図 16 は, 自由曲面と解析曲面の干渉線に対してフィレット面を生成し, 断面線を表示したものである. この図の左側は従来手法により生成したメッシュを, 右側は, 従来手法で生成したフィレット内部の稜線の接ベクトルを利用し, NURBS 境界 Gregory パッチで内挿したときの断面線を示した. 詳細なフィレット面形状を必要としないケースで

は, NURBS 境界 Gregory パッチによる内挿が有効であることが分かる.

図 17 は, NURBS 曲面を含んだ不規則な曲線メッシュを表している. この図では, 面  $F_2$  は B-Spline 曲面, 面  $F_3$  が制御点の重みが異なる NURBS 曲面を表している. これらの曲面間を, NURBS 境界 Gregory パッチで内挿したときの断面線を示したも

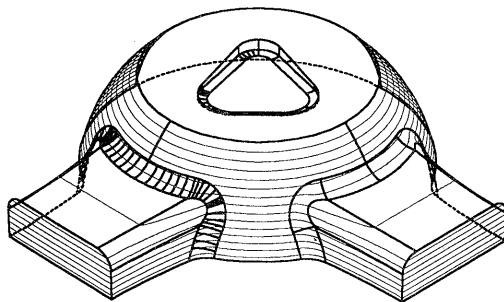


図 16 NURBS 境界 Gregory パッチを使ったフィレット面の断面線 (その 2)

Fig. 16 Cross section of fillet surfaces with NURBS Boundary Gregory patches (part 2).

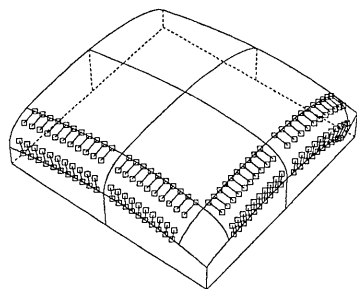


図 14 NURBS 境界 Gregory パッチを使ったフィレット面の表現

Fig. 14 Fillet surfaces by using NURBS Boundary Gregory patches.

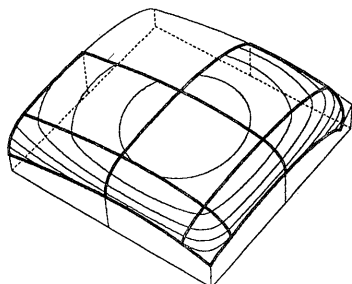


図 15 NURBS 境界 Gregory パッチを使ったフィレット面の断面線 (その 1)

Fig. 15 Cross section of fillet surfaces with NURBS Boundary Gregory patches (part 1).

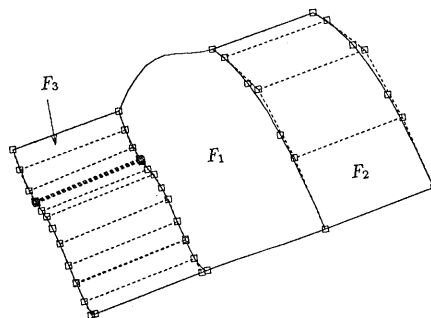


図 17 NURBS 曲面を含んだ不規則な曲線メッシュ  
Fig. 17 Irregular mesh including NURBS surfaces.

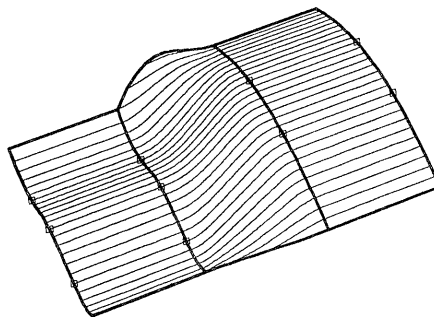


図 18 断面線表示  
Fig. 18 Cross sections of the irregular mesh.

のが図 18 である。面  $F_2$  と  $F_3$  を滑らかに接続している NURBS 境界 Gregory パッチが生成されていることが分かる。

## 7. ま と め

NURBS 曲線, NURBS 曲面を含んだ不規則な曲線メッシュを, 滑らかに内挿するための曲面式を提案しその有効性を確認した。この曲面式は一般境界 Gregory パッチを拡張し, 境界横断導関数として NURBS 表現を許したものである。NURBS 境界 Gregory パッチで曲線メッシュを内挿したときの利点としては以下のことが挙げられる。

- NURBS 曲線を境界とすることで, シンプルな曲線メッシュで複雑な曲面形状を扱うことができる。
- フィレット面生成による曲線メッシュの複雑化を抑制することができる。
- 隣接する Gregory パッチ, 有理境界 Gregory パッチ, 一般境界 Gregory パッチ, NURBS 曲面となめらかに接続できる。

よって, 曲面を設計する上で NURBS 境界 Gregory パッチは強力なツールとなることが分かった。

NURBS 境界 Gregory パッチを(株)リコーで開発しているソリッドモデラー DESIGNBASE<sup>14)</sup> に実装しその効果を確認した。

謝辞 本研究を行う上で, 多大なご指導, ご援助をいただいた(株)リコーソフトウェア事業部 國井秀子事業部長に深謝いたします。また, 曲面表現全般にわたって数々の助言をいただいた(株)リコーソフトウェア事業部 植田健治氏に感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Barnhill, R. E., Brown, J. H. and Kluczewicz, I. M.: A New Twist in Computer Aided Geometric Design, *Comput. Gr. Image Process.*, Vol. 8, pp. 78-91 (1978).
- 2) Loop, C. and DeRose, T.: Generalized B-spline Surfaces of Arbitrary Topology, *Comput. Gr.*, Vol. 24, No. 4, pp. 347-356 (1990).
- 3) Chiyokura, H. and Kimura, F.: Design of Solids with Free-form Surfaces, *Comput. Gr.* (Proc. SIGGRAPH 83), Vol. 17, No. 3, pp. 289-298 (1983).
- 4) Chiyokura, H.: Localized Surface Interpolation for Irregular Meshes, *Advanced Computer Graphics*, Kunii, T. L. ed., pp. 3-19, Springer-Verlag, Heidelberg (1986).
- 5) Chiyokura, H.: *Solid Modelling with DESIGNBASE*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1988).
- 6) Chiyokura, H., Takamura, T., Konno, K. and Harada, T.:  $G^1$  Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves, *NURBS for Curve and Surface Design*, Farin, G. ed., pp. 15-34, SIAM, Philadelphia (1991).
- 7) Farin, G.: From Conics To NURBS: A Tutorial and Survey, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 5, pp. 78-86 (1992).
- 8) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Third Ed., Academic Press, San Diego, California (1993).
- 9) Harada, T., Konno, K. and Chiyokura, H.: Variable-Radius Blending by Using Gregory Patches in Geometric Modeling, *EUROGRAPHICS 91*, Post, F. H. and Barth, W. eds., pp. 507-518, North-Holland, Amsterdam (1991).
- 10) Konno, K., Takamura, T. and Chiyokura, H.: A New Control Method for Free-Form Surfaces with Tangent Continuity and Its Applications, *Scientific Visualizations of Physical Phenomena*, Patrikalakis, N. M. ed., pp. 435-456, Springer-Verlag, Heidelberg (1991).
- 11) Piegel, L.: On NURBS: A Survey, *IEEE Computer Graphics & Applications*, Vol. 11, No. 1, pp. 55-71 (1991).
- 12) Takamura, T., Ohta, M., Toriya, H. and Chiyokura, H.: A Method to Convert a Gregory Patch and a Rational Boundary Gregory Patch to a Rational Bézier Patch and Its Applications, *Proc. Computer Graphics International '90*, Chua, T. S. and Kunii, T. L. ed., pp. 543-562, Springer-Verlag, Tokyo (1990).
- 13) Tiller, W.: Rational B-Splines for Curve and Surface Representation, *IEEE Computer Graphics & Applications*, Vol. 3, No. 6, pp. 61-69 (1983).
- 14) 鳥谷浩志, 千代倉弘明: 3次元 CAD の基礎と応用, 共立出版 (1991).

(平成 6 年 2 月 1 日受付)

(平成 6 年 6 月 20 日採録)



**今野 晃市**

昭和37年11月4日生。昭和60年筑波大学第三学群情報学類卒業。(株)リコーソフトウェア事業部に勤務。ソリッドモデラ DESIGNBASE

の研究・開発に従事。レンダリングアルゴリズム、自由曲面の生成手法、曲線・曲面の形状制御などに興味をもつ。



**千代倉弘明 (正会員)**

昭和29年4月11日生。昭和54年慶応義塾大学工学部数理工学科卒業。昭和56年同大学修士課程修了。昭和59年東京大学工学部精密機械

博士課程修了。同年、(株)リコーに入社。ソリッドモデラ DESIGNBASE の研究・開発に従事。平成2年慶応義塾大学環境情報学部助教授。著書に「ソリッドモデリング」(工業調査会), 「Solid Modelling with DESIGNBASE」(Addison-Wesley), 「3次元 CAD の基礎と応用」(共立出版)がある。ACM 会員。