

ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ の再生核による補間法について

渡 辺 宏 太 郎†

ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ (Ω は R^n の有界領域, $s > n/2$) の再生核がその線形結合を考えることにより補間法に適用できることを示すものである。具体的にはこれらの再生核が正の定符号核となることを示す。特に $H_0^s(\Omega)$ のノルムとして $(\sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha \cdot\|_{L_2(\Omega)})^{1/2}$ を採用すると、これに対応する再生核を用いた補間はデータの相似変換、回転と可換になる。本論文では1次元の場合にこの再生核を具体的に計算する。さらに $H_0^s(\Omega)$ の再生核 $K^s(x, y)$ と $H_0^t(\Omega)$ の再生核 $K^t(z, w)$ の積が $\Omega \times \Omega$ 上、正の定符号核になることを示し、1次元の結果を高次元化する。

An Interpolation Method Using a Reproducing Kernel of Sobolev Space $H_0^s(\Omega)$

KOHTARO WATANABE†

This paper shows that the linear summation of the reproducing kernels of Sobolev Space $H_0^s(\Omega)$ (where Ω represents a bounded domain of the Euclidian space R^n and $s > n/2$) are applicable to interpolation problem. And these reproducing kernels are positive definite kernels. Especially, if we take $(\sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha \cdot\|_{L_2(\Omega)})^{1/2}$ as the norm of $H_0^s(\Omega)$, the interpolation which uses its reproducing kernel commutes with similarities and rotation of data. We computes this reproducing kernel in one dimension case. Moreover, we see that the multiplication of $K^s(x, y)$; the reproducing kernel of $H_0^s(\Omega)$ and $K^t(z, w)$; the reproducing kernel of $H_0^t(\Omega)$ becomes to positive definite kernel on $\Omega \times \Omega$, so the extension of this theory to high dimension is possible.

1. はじめに

多変数補間問題を定式化すると次のようになる。すなわち、任意の異なる N 個の点 $\{x_i \in R^n | i=1, \dots, N\}$ と N 個の実数値 $\{y_i \in R | i=1, \dots, N\}$ に対して

$$F(x_i) = y_i \quad i=1, \dots, N \quad (1)$$

を満足する $F(x)$ を見つけることである。神経回路網理論、数値解析の方面から研究されている動径関数 (Radial Basis Function) 法では $F(x)$ の型として次のようなものを仮定する^{1), 2)}。

$$F(x) = \sum_{i=1}^N c_i h(\|x - x_i\|) + \sum_{i=1}^m d_i p_i(x). \quad (2)$$

ここで、 h は $R^+ \rightarrow R$ の動径関数、また $\|\cdot\|$ は R^n 上の通常のユークリッドノルム、 $\{p_i | i=1, \dots, m\}$ は $k-1$ 次以下の多項式全体の集合のなす線形空間 π_{k-1} の基底である。式(2)の補間係数 c, d は補間条件(1)と次の式(3)をみだすように決められる。

$$\sum_{i=1}^N c_i p_j(x_i) = 0, \quad j=1, \dots, m \quad (3)$$

(ただし、 $m < N$ とする。) ここで k は動径関数 h から決まる整数である。したがって、動径関数はこの整数 k によって分類することができる。本論文ではインデックス k を持つような動径関数のクラスを ρ_k で表すことにする (詳しくは定義 2.1 参照)。特に $h \in \rho_0$ のとき、 $m=0$ となるので式(1)は

$$Hc = y \quad (4)$$

となる。ここで、行列 H の i, j 成分 $(H)_{ij} = h(\|x_i - x_j\|)$, $(y)_j = y_j$ である。したがって、この場合には補間問題が可解であるための必要十分条件は、任意の入力データ集合 $\{x_i \in R^n | i=1, \dots, N\}$ に対して行列 H が正則になることである。

本論文はソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ ($s > n/2$) の再生核 $K(x, y)$ が補間法に利用できることを示す。この方法では、式(1)における $F(x)$ として次のようなものを用いる。すなわち、

$$F(x) = \sum_{i=1}^N c_i K(x, x_i). \quad (5)$$

† 防衛大学校情報工学科
Department of Computer Science, National Defence Academy

したがって、この場合も動径関数法の ρ_0 クラスの場合と同様に補間問題の可解条件は行列 $K=(K_{ij})$, $K_{ij}=K(x_i, x_j)$ が正則になることである。このことは、4章において行列 K が正の定符号行列であることを証明することによってなされる。

さらに、 $H_0^1(\Omega)$ のノルムとして

$$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=s} \|\hat{\rho}^\alpha \cdot\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

を採用するとデータの相似変換、回転と可換になることを示し、1次元有界領域の場合にこの空間の再生核を具体的に計算した。また、 $H_0^1(\Omega)$ の再生核 $K^s(x, y)$ と $H_0^1(\Omega)$ の再生核 $K^t(x, y)$ の積がテンソル積 $H_0^1(\Omega) \otimes H_0^1(\Omega)$ の再生核になり $\Omega \times \Omega$ 上正の定符号核 (positive definite kernel) になることを示した。これにより、1次元の結果を帰納的に高次元に拡張することが可能である。

詳細な議論に進む前に、ここで正の定符号核等の用語の定義を与えておく。

定義 1.1

(1) Hermite 行列 H の固有値がすべて正であるとき、 H を正の定符号 (positive definite), 固有値が非負であるとき、 H を正の半定符号 (positive semi-definite) であるという。

(2) 定義域を E とするヒルベルト空間 F の再生核を $K(x, y)$ とする。 $K(x, y)$ が正の定符号核であるとは、 E 上の相異なる N 点 x_1, \dots, x_N に対して行列 $K=(K_{ij})=(K(x_i, x_j))$ が正の定符号であること、 $K(x, y)$ が正の半定符号核であるとは、行列 K が正の半定符号であることをいう。

定義 1.2 (入力データの幾何学的変換と補間の交換性)

H を R^n を定義域とする関数空間、 S を入力出力データの集合、すなわち

$$S = \{(x_i, y_i) | i=1, \dots, N\},$$

$I: \{S\} \rightarrow H$ を補間操作とする。また、 $T: R^n \rightarrow R^n$ としたとき、入力データの交換 U , 変数変換 $V: H \rightarrow H$ をそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{U} & U(S) \\ \in & \in & \\ (x_i, y_i) & \mapsto & (Tx_i, y_i) \\ & & \downarrow V \\ H & \xrightarrow{V} & H \\ \in & \in & \\ f(x) & \mapsto & f(T^{-1}x) \end{array}$$

と定義する。入力データの幾何学的変換と補間が交換可能、あるいは可換であるとは図式

$$\begin{array}{ccc} \{S\} & \xrightarrow{U} & \{U(S)\} \\ I \downarrow & & \downarrow I \\ H & \xrightarrow{V} & H \end{array}$$

が可換であることをいう。

2. RBF 法とヒルベルト空間の再生核

この章では RBF 法とヒルベルト空間の再生核の概要について述べ、両者の問題点を明らかにする。ヒルベルト空間の再生核を用いた補間法と RBF 法は考え方として類似点が多い。

2.1 RBF 法

定義 2.1 (動径関数のクラス ρ_k)

$[0, \infty)$ で定義された連続関数 $h(r)$ が ρ_k クラスに属するとは、任意の異なる N 個の点 $x_1, \dots, x_N \in R^n$ とすべての $p \in \pi_{k-1}$ について

$$\sum_{i=1}^N c_i p(x_i) = 0$$

を成り立たせるようなスカラ c_1, \dots, c_N に対して2次形式

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j h(\|x_i - x_j\|^2)$$

が正であることをいう。

このような関数のクラスを考える背景には次の補題がある。

補題 2.1⁴⁾ $h(r)$ を動径関数、 $\{p_i | i=1, \dots, m\}$ を $k-1$ 次以下の多項式全体の集合のなす線形空間 π_{k-1} の基底とする。

$$F(x) = \sum_{i=1}^N c_i h(\|x - x_i\|) + \sum_{i=1}^m d_i p_i(x)$$

が

$$\sum_{i=1}^N c_i p_j(x_i) = 0, \quad j=1, \dots, m \quad (\text{auxiliary condition}) \quad (7)$$

$$F(x_i) = y_i \quad i=1, \dots, N \quad (8)$$

をみたすための十分条件は、式(7)をみたす c_1, \dots, c_N に対して2次形式

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j h(\|x_i - x_j\|^2)$$

が正であることである。

RBF 法で利用可能な関数のうち、 ρ_0 クラスに属するものとしては、次のようなものがある。

$$h_1(r) = (1/\sqrt{2\pi s})e^{-r^2/2s^2} \quad (9)$$

$$h_2(r) = (s^2 + r^2)^\alpha \quad \alpha < 0 \quad (10)$$

これらが ρ_0 クラスに属することの証明は、次の Micchelli の定理によりなされる。

定理 2.1 (Micchelli の定理⁴⁾)

関数 $g(r)$ が $[0, \infty)$ で連続かつ, $f(r) := (-1)^k \times (\partial^k g(r) / \partial r^k)$ が完全に単調, すなわち

- (a) $f(r) \in C^\infty(0, \infty)$
- (b) $(-1)^l (\partial^l f / \partial r^l) \geq 0, \forall r \in (0, \infty), l=0, 1, 2, \dots$

ならば, $g(r^2)$ は ρ_k クラスに属する.

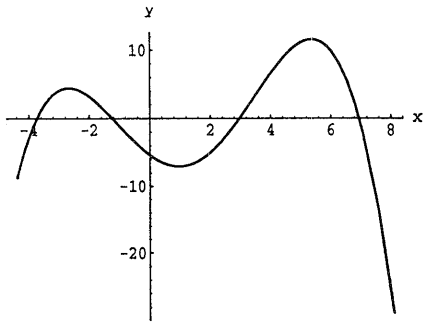
こうした ρ_0 クラスの関数を用いた補間法の弱点は, データの回転変換と補間が可換であるものの, データの相似変換とは可換でない点 (したがって, データを計測した単位系につねに注意していなければならない.), また, 適切なパラメータ s の値の決定が難しい点である.

図1は, 入出力データ $\{(-3.4, 2.5), (-2.1, 3.5), (-1.2, -0.2), (3.7, 4.7), (7.1, -2.8)\}$ をパラメータ s の値を変えて $h_1(r), h_2(r)$ で補間したものである. 図1からわかるように, s の値が大きいほど補間超曲面の形状は振動が少なくなる. 多くの応用ではデータを振動の少ない超曲面で補間することが必要とされる. したがって, $h_1(r), h_2(r)$ を実際に補間に用いる

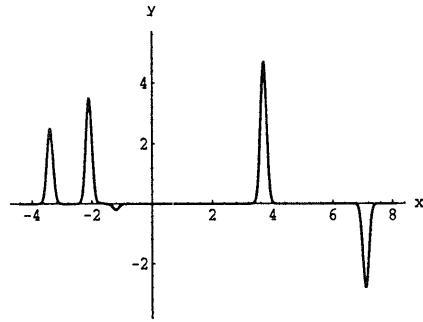
場合にはパラメータ s の値をできるだけ大きくしておかねばならない. 理論的にはこれで十分であるが, 計算機で数値的に取り扱う場合には, さらに次のような点にも注意を払う必要がある. すなわち, s が大きくなるにつれ行列 H は安定でなくなる (あるいは悪条件の場合にある) という点である (文献 9) 参照. (これは, s が大きい値をとるとき H の各行ベクトルがほとんど平行になってしまうことによる.) H が安定でない場合, H の各成分の打ち切り誤差は $Hc=y$ の解 c に大きな影響を及ぼす. その結果, 補間超曲面が入出力関係を正しく記述しなくなってしまふ. このように補間超曲面の振動の少なさと行列 H の安定性はトレードオフの関係にあり, 適切なパラメータ s の値を決めるのは難しい.

ρ_k クラスに属する関数としては次のようなものがある.

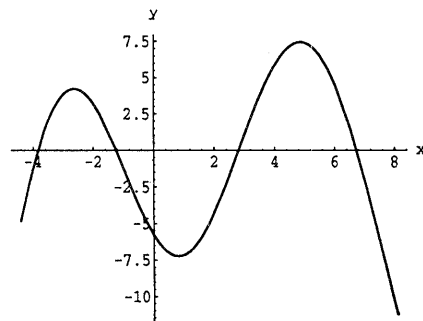
- (1) 擬多項式補間 $g_1(r) = r^{2k-1}$ (11)
- (2) 薄板補間 (ただし, $k=2$, 入力次元 $n=2$) $g_2(r) = r^2 \log r$ (12)



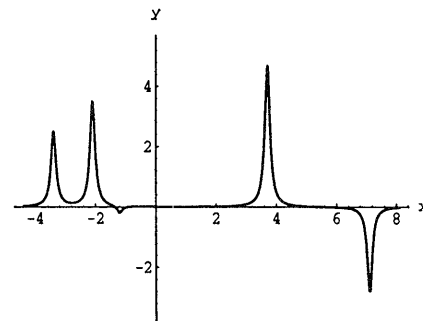
(a) Interpolated graph by $h_1(r)$ $s=10$



(b) Interpolated graph by $h_1(r)$ $s=0.1$



(c) Interpolated graph by $h_2(r)$ $s=10$ $\alpha=-1$



(d) Interpolated graph by $h_2(r)$ $s=0.1$ $\alpha=-1$

図1 与えられたデータを $h_1(r), h_2(r)$ を用いて補間したグラフ
Fig. 1 The interpolated graphs of given data using the function $h_1(r), h_2(r)$.

これらは Duchon⁵⁾ によって求められたが、後に Micchelli⁴⁾ がこれらに関する一般化した証明を与えた (定理 2.1). これらを補間問題に適用する際の注意点は次のようなことである. すなわち、式(3)において $m > N$ のとき式(3)は過剰決定系となり通常 $c_i = 0, (1 \leq i \leq N)$ となってしまう点である. このとき式(2)と式(3)をみたとす c_i, d_i は一意的には存在しなくなり補間問題は可解でなくなる. 式(3)の方程式の個数 m と入力次元 n の間には

$$m = \begin{cases} 0 & k=0 \\ k+n-1 & 1 \leq k \end{cases} C_n$$

なる関係があるので、 $k \neq 0, 1$ のとき、入力が高次元であるほどこのような状況が起こりやすいことがわかる. また、式(2)と式(3)を記述する行列は一般に正の定符号にならないので、 c_i, d_i を求めるときコレスキー法が適用できない点もやや不便である (コレスキー法については文献 3) p 56 を参照.).

2.2 ヒルベルト空間の再生核

定義 2.2 (ヒルベルト空間の再生核)

F を定義域 E の (複素) ヒルベルト空間をなす関数族とする. このとき、 $x, y \in E$ に対して $K(x, y)$ が

- (a) 任意の $y \in E$ に対して $K(x, y)$ が x の関数として F に属する.
- (b) 任意の $y \in E, f \in F$ に対して

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_* \tag{13}$$

をみたすとき $K(x, y)$ をヒルベルト空間 F の再生核という. ここで、 $(\cdot, \cdot)_*$ は変数 x に関する内積である.

再生核には次のような性質がある.

定理 2.2 (再生核の基本的性質⁶⁾)

- (a) もし再生核 K が存在すればそれは一意的である.
- (b) 再生核が存在するための必要十分条件は定義域 E の任意の点 y に対して写像

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow C \\ \in &\in \\ f &\longmapsto f(y) \end{aligned}$$

が連続写像であることである.

(c) 行列 $K = (K_{i,j}) = (K(x_i, x_j))$ は正の半定符号である. すなわち、任意の $x_1, \dots, x_N \in E$ に対して 2 次形式

$$\sum_{i,j=1}^N K(x_i, x_j) \xi_i \xi_j$$

が非負である.

(d) 逆に $K = (K_{i,j}) = (K(x_i, x_j))$ が半定符号ならば、 $K(x, y)$ を再生核として持つヒルベルト空間が一意的に存在する.

(証明) (b) 再生核 K が存在すれば、シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} |f(y)| &\leq \|f\| (K(x, y), K(x, y))^{1/2} \\ &= K(y, y)^{1/2} \|f\| \end{aligned}$$

である. 逆に $f(y)$ が連続汎関数であればリースの定理により $g_y(x) \in F$ が一意的に存在して $f(y) = (f(x), g_y(x))$ が成り立つ. ここで $K(x, y) = g_y(x)$ とおけば、これが再生核を与える. (c) は次のようにして示される. すなわち、

$$\sum_{i,j=1}^N K(x_i, x_j) \xi_i \xi_j = \left\| \sum_{i=1}^N K(x, x_i) \xi_i \right\|^2 \geq 0 \tag{14}$$

だからである.

この証明からもわかるように行列 $K = (K(x_i, x_j))$ の正則性については何もいえない. したがって、一般には式(5)のように再生核 $K(x, y)$ の重ね合わせによって補間を行うことはできない. しかしながら、後で示されるようにヒルベルト空間としてソボレフ空間 $H_0^s(\Omega), s > n/2$ を考えたときには、その再生核から生成される行列 K は正則になり、再生核 $K(x, y)$ を補間に使うことが可能となる.

2.3 一般標本化定理

ヒルベルト空間の再生核を用いた補間法は標本点からの信号の復元に有効である. 小川、井宮による一般標本化定理によりこのことは証明されている. 一般標本化定理について詳しくは文献 11) を参照されたい.

3. ソボレフの埋め込み定理

ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ のもつ性質について簡単にまとめておく.

定義 3.1 (ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$)

ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ とは Ω にコンパクト台を持つ滑らかな関数 $C_0^\infty(\Omega)$ のノルム

$$\| \cdot \|_{H^s(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \| \partial^\alpha(\cdot) \|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \tag{15}$$

による完備化である. ここで ∂ は超微分を表す.

補題 3.1 (ソボレフの埋め込み定理)

$$k \text{ を非負の整数, } n \text{ を定義域の次元, また } s \text{ を } s > k + n/2 \tag{16}$$

をみたす実数とする. このとき $f \in H_0^s(\Omega)$ によらない定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in \Omega} | \partial^\alpha f(x) | \leq C \| f(x) \|_{H_0^s(\Omega)}, (|\alpha| \leq k) \tag{17}$$

が成り立つ。

ソボレフ空間にはこのほかに有効な埋め込み関係が存在するが、ここでは省略する⁷⁾。

$H_0^s(\Omega)$ と $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ の間には次の関係がある。

補題 3.2 Ω を滑らかな境界を持つ \mathbb{R}^n の有界領域とする。このとき、 $f(x) \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$ が $\partial^k f / \partial n^k = 0$ on $\partial\Omega$ $\{k \in \mathbb{Z} | 0 \leq k \leq s-1\}$ をみたすならば $f(x) \in H_0^s(\Omega)$ である (文献 8) p. 52 トレース定理参照)。

4. 行列 $K=(K(x_i, x_j))$ の正則性

まず、 $H_0^s(\Omega)$, $s > n/2$ に再生核が存在することを示そう。

補題 4.1 $H_0^s(\Omega)$, $s > n/2$ には再生核が存在する。

(証明) ソボレフの埋め込み定理より

$$|f(y)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq C \|f(x)\|_{H_0^s(\Omega)}. \quad (18)$$

これにより Aronszajn の定理 (定理 2.2) から再生核が一意的に存在することがわかる。

以上の準備の下で行列 $K=(K(x_i, x_j))$ の正則性について証明する。

定理 4.1 $\{x_i\}_{i=1}^N$ を E 上の任意の異なる N 個の点、 $z=(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ を任意のベクトルとする。ヒルベルト空間 $H(E)$ が次の条件

- (1) $H(E)$ は再生核を持つヒルベルト空間である。
- (2) $\phi(x_i)=z_i$ をみたす $\phi(x) \in H(E)$ がつねに存在する。

をみたすならば、行列 $K=(K_{i,j})=(K(x_i, x_j))$ は正則である。

(証明) 行列 $K=(K(x_i, x_j))$ が正則でないと仮定する。従って $\{c^*=(c_1^*, \dots, c_N^*) \in \text{Ker}(K) | c^* \neq 0\}$ なるベクトル c^* が存在する。ここで $f^*=\sum_{i=1}^N c_i^* K(x, x_i) \in H_0^s(\Omega)$ なる関数を考える。 $\|f^*\|_{H_0^s(\Omega)}$ の値を計算すると

$$\|f^*\|_{H_0^s(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i^* c_j^* K(x_i, x_j) = 0$$

となる。したがって、 $f^*=0$ である。ゆえに、条件 (2)をみたすような $\phi(x) \in H(E)$ に対して

$$\langle \phi(x), f^*(x) \rangle_{H(E)} = 0$$

となる。よって $\langle z, c^* \rangle_{\mathbb{C}^N} = 0$ 。

ここで z は \mathbb{C}^N の任意のベクトルをとり得るので $c^*=0$ が結論される。これは $c^* \neq 0$ に矛盾する。したがって K は正則でなければならない。

注意 4.1 定理 2.2 を考慮すると K は特に正の定符号となる。したがって 1次方程式 $Kc=y$ の解 c を

コレスキー法⁹⁾ によって求めることができる。

次に $H_0^s(\Omega)$ ($s > n/2$) は定理 4.1 の $H(E)$ の2つの条件をみたすことを示そう。これにより $H_0^s(\Omega)$ ($s > n/2$) の再生核 $K(x, y)$ からつくられる行列 $K=(K(x_i, x_j))$ の正則性が証明される。条件 (1)については補題 4.1 で示されているので条件 (2)が成り立つことを示す。

補題 4.2 Ω を \mathbb{R}^n の領域とする。 Ω 上の相異なる N 点 x_1, \dots, x_N に対して

$$\phi = \{(\phi(x_1), \dots, \phi(x_N)) \in \mathbb{C}^N | \phi(x) \in H_0^s(\Omega)\}$$

は \mathbb{C}^N のすべての値をとり得る。

(証明) $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ を任意のベクトルとする。このとき、 $\phi(x_i)=z_i$ ($1 \leq i \leq N$) をみたす $\phi(x) \in H_0^s(\Omega)$ が存在することを示す。

まず、台を 2ϵ に持つ C^∞ 級関数 $c_\epsilon(t)$ を次のようにして構成する。なお、この関数は埋め込み定理 (任意のコンパクト m 次元 C^r 級多様体 M から十分高い数空間 \mathbb{R}^n への埋め込み写像がつねに存在すること) の証明に用いられるものである。

step 1 C^∞ 級関数 $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$a(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

step 2 C^∞ 級関数 $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を使って、関数 $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$b(t) = \frac{a(t)}{a(t) + a(1-t)} \quad (20)$$

この $b(t)$ も C^∞ 級である。

step 3 $\epsilon > 0$ を固定する。 $c_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$c_\epsilon(t) = b(t/\epsilon + 2)b(-t/\epsilon + 2) \quad (21)$$

と定義する。(21)式より

$$\begin{cases} c_\epsilon(t) = 1 & |t| \leq \epsilon \\ 0 < c_\epsilon(t) < 1 & \epsilon < |t| < 2\epsilon \\ c_\epsilon(t) = 0 & 2\epsilon \leq |t| \end{cases}$$

を得る。グラフの概形は図 2 のようになる。

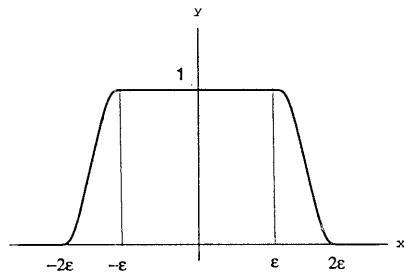


図 2 グラフ $C_\epsilon(t)$

Fig. 2 The graph of $C_\epsilon(t)$.

ここで

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^N z_i c_\epsilon (\|x - x_i\|_{R^n}^\epsilon) \tag{22}$$

と定義する。ここで、 ϵ を十分小さくとれば、各 $c_\epsilon(\|x - x_i\|_{R^n}^\epsilon)$ のサポートは重なりを持たなくなるので任意の $x_i \in R^n$ に対して $\phi(x_i) = z_i$ が成り立つことがわかる。さらに $\phi(x) \in C^\infty_0(\Omega)$ であることから $\phi(x) \in H^s_0(\Omega)$ となることがわかる。以上により証明された。

5. 入力データの幾何学的変換と補間の交換性

$H^s_0(\Omega)$ には幾つもの同値なノルムが存在するが、特に

$$\|\cdot\|_{H^s_0(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=s} \|\partial(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \tag{23}$$

を採用すると、入力データの回転、拡大縮小と式(5)を用いた補間は可換になる。なお、式(23)が $H^s_0(\Omega)$ の同値なノルムを定義することはポアンカレ不等式よりすぐわかる。

定理 5.1 式(23)を $H^s_0(\Omega)$ のノルムに採用すると、式(5)を用いた補間はデータの回転、拡大縮小と可換である。特にデータの拡大縮小と可換になることから、補間を行った結果は単位系に依存しなくなる。

(証明)

(1) データの拡大縮小と補間の交換性について $\{(x_i, y_i) \in R^n \times R \mid i=1, \dots, N\}$ をデータ 1, $\{(tx_i, y_i) \in R^n \times R \mid i=1, \dots, N\}$ をデータ 2 とする。データ 2 はデータ 1 の入力に t 倍の相似変換を行ったものである。また、データ 1 を式(5)を用いて補間した後、座標変換 $x' = tx$ を行った超曲面を $k(x')$ 、データ 2 を同様にして補間した超曲面を $f(x')$ とする。ただし、データ 2 の補間に用いる再生核は $H^s_0(\Omega_t)$ のものである。この再生核を $F(x, y)$ で表すことにする。 Ω_t は Ω を t 倍相似変換した領域である。証明は $k(x') = f(x')$ が成り立つことを示せばよい。 $k(x')$ の具体的な表現は

$$k(x') = \sum_{i=1}^N c_i K(x'/t, x_i) \tag{24}$$

となる。係数 c_i は

$$\begin{pmatrix} K(x_1, x_1) \cdots K(x_1, x_N) \\ \vdots \\ K(x_N, x_1) \cdots K(x_N, x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \tag{25}$$

をみtas。一方、 $f(x')$ の具体的な表現は

$$f(x') = \sum_{i=1}^N d_i F(x', tx_i) \tag{26}$$

となる。同様に、係数 d_i は

$$\begin{pmatrix} F(tx_1, tx_1) \cdots F(tx_1, tx_N) \\ \vdots \\ F(tx_N, tx_1) \cdots F(tx_N, tx_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \tag{27}$$

をみtas。

ところで、 $F(x, y)$ と $K(x, y)$ の間には

$$t^{n-2s} F(tx, ty) = K(x, y) \tag{28}$$

という関係式がある。なぜならば、

$$(\phi(x), F(x, y))_{H^s_0(\Omega_t)} = \phi(y) \quad (\forall \phi \in H^s_0(\Omega_t)) \tag{29}$$

において $tx' = x$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} & (\phi(x), F(x, y))_{H^s_0(\Omega_t)} \\ &= \sum_{|\alpha|=s} \int_{\Omega_t} \partial^\alpha \phi(x) \cdot \partial^\alpha F(x, y) dx \\ &= \sum_{|\alpha|=s} \int_{\Omega} t^{-s} \partial^\alpha \phi(tx') \cdot t^{-s} \partial^\alpha F(tx', y) t^n dx' \end{aligned}$$

となるので

$$(\phi(tx'), t^{n-2s} F(tx', y))_{H^s_0(\Omega)} = \phi(y) \tag{30}$$

となり、さらに $\phi(tx') = \phi(x')$ とおくと

$$\begin{aligned} & (\phi(x'), t^{n-2s} F(tx', ty))_{H^s_0(\Omega)} = \phi(y) \\ & \quad (\forall \phi \in H^s_0(\Omega)) \end{aligned} \tag{31}$$

となるからである。この関係式(28)を式(25)に代入し式(27)と比べると $d = t^{n-2s} c$ であることがわかる。これを用いて $f(x')$ は次のように $k(x')$ に変形される。

$$\begin{aligned} f(x') &= \sum_{i=1}^N d_i F(x', tx_i) = \sum_{i=1}^N t^{n-2s} c_i F(x', tx_i) \\ &= \sum_{i=1}^N t^{n-2s} c_i t^{2s-n} K(x'/t, x_i) = k(x') \end{aligned}$$

3 番目の等式において

$$t^{n-2s} F(x', tx_i) = K(x'/t, x_i)$$

を用いた。

以上により証明された。

(2) データの回転と補間の交換性について

$\{(Rx_i, y_i) \in R^n \times R \mid i=1, \dots, N\}$ をデータ 3 とする。データ 3 はデータ 1 の入力に回転 R を施したものである。データ 3 を式(5)を用いて補間した超曲面を $g(x')$ とする。ただし、データ 3 の補間に用いる再生核は $H^s_0(\Omega_R)$ のものである。この再生核を $G(x, y)$ で表すことにする。ここで、 Ω_R は Ω に回転 R を施した領域である。 $K(x, y)$ と $G(x, y)$ には

$$G(Rx, Ry) = K(x, y) \tag{32}$$

という関係式が成り立つ。なぜならば、

$$(\phi(x), G(x, y))_{H^s_0(\Omega_R)} = \phi(y) \quad (\forall \phi \in H^s_0(\Omega_R)) \tag{33}$$

において $Rx' = x$ と変数変換すると s 重調和作用素の回転に関する不変性 (文献 12) p. 21) より

$$\begin{aligned}
 &(\phi(x), G(x, y))_{H_0^s(\Omega_R)} \\
 &= \sum_{|\alpha|=s} \int_{\Omega_R} \partial_x^\alpha \phi(x) \cdot \partial_x^\alpha G(x, y) dx \\
 &= \int_{\Omega_R} \Delta^{(s)} \phi(x) \cdot G(x, y) dx \\
 &= \int_{\Omega} \Delta^{(s)} \phi(Rx') \cdot G(Rx', y) dx' \\
 &= \int_{|\alpha|=s} \int_{\Omega} \partial_x^\alpha \phi(Rx') \cdot \partial_x^\alpha G(Rx', y) dx' \\
 &= (\phi(Rx'), G(Rx', y))_{H_0^s(\Omega)} = \phi(y) \\
 & \text{となり, さらに } \phi(Rx') = \phi(x') \text{ とおくと} \\
 & (\phi(x'), G(Rx', Ry)) = \phi(y) \quad (\forall \phi \in H_0^s(\Omega)) \\
 & \text{が成り立つからである. これを用いて} \\
 & k(x') = g(x') \tag{34} \\
 & \text{が示される.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{-3R^5 + 10R^3y^2 - 15Ry^4}{8} \\
 & + \frac{5(-R^4y + 6R^2y^3 + 3y^5)x}{8R} \\
 & + \frac{5(R^4 - 6R^2y^2 - 3y^4)x^2}{4R} \\
 & + \frac{5(3R^4y + 6R^2y^3 - y^5)x^3}{4R^3} \\
 & + \frac{5(-3R^4 - 6R^2y^2 + y^4)x^4}{8R^3} \\
 & + \frac{(15R^4y - 10R^2y^3 + 3y^5)x^5}{8R^5} \tag{37}
 \end{aligned}$$

は $H_0^s(-R, R)$, ($s=1, 2, 3$) の再生核をそれぞれ与える。

なお, 行列 $K^1 = (K_{i,j}^1) = (K^1(x_i, x_j))$ が正の定符号となることについては別証明がある。こちらの方法はより直接的である (証明は付録(a).).

6. $H_0^s(\Omega)$ の再生核の具体例

6.1 $H_0^s(-R, R)$ の再生核の構成

式(23)をノルムに持つ, $H_0^s(-R, R)$ の再生核の具体的な表現を与える。式(23)をノルムに持つ $H_0^s(R^1)$ の再生核は $E^s(x, y) = C_s |x - y|^{2s-1}$ である (C_s は s によって決まる定数.)。ゆえに補題 3.2 より式(23)をノルムに持つ $H_0^s(-R, R)$ の再生核を構成するには, $E^s(x, y)$ の $(-R, R)$ への制限に

$$\frac{d^{2s}e(x)}{dx^{2s}} = 0 \tag{35}$$

かつ, 境界 $x = \pm R$ で

$$\left. \frac{d^k E^s(x, y)}{dx^k} \right|_{x=\pm R} = - \left. \frac{d^k e(x)}{dx^k} \right|_{x=\pm R} \tag{36}$$

($1 \leq k \leq s-1$)

をみたすような補正項 $e(x)$ を加えてやればよいことがわかる。このような考えにしたがって構成した再生核が次の例である。

例 6.1 y を開区間 $(-R, R)$ 内の点とする, このとき

$$\begin{aligned}
 K^1(x, y) &= -\frac{1}{2} \left(|x-y| - R + \frac{xy}{R} \right) \\
 K^2(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(|x-y|^3 + \frac{R^3 - 3Ry^2}{2} \right. \\
 & \quad + \frac{3(R^2y + y^3)x}{2R} + \frac{-3(R^2 + y^2)x^2}{2R} \\
 & \quad \left. + \frac{(3R^2y - y^3)x^3}{2R^3} \right) \\
 K^3(x, y) &= -\frac{1}{2 \cdot 5!} |x-y|^5
 \end{aligned}$$

6.2 実験

再生核 $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$ を用いた補間がデータの相似変換と実際, 交換可能になるかどうか調べた。表 1 は補間を行う入出力点の集合である。図 3 の (a), (b), (c) は表 1 のデータをそれぞれ $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$ を用いて補間したグラフである。図 3 の (d), (e), (f) は表 1 の入力を 3, 5, 7 倍したデータを $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$ を用いて補間し, x 軸を 1/3, 1/4, 1/7 倍して描いたグラフである。

(a) と (d), (b) と (e), (c) と (f) を比べるとそれぞれ同形であることがわかる。このことからデータの相似変換と補間が交換可能であることがわかる。また, 復元されたグラフは, 一般標本化定理¹¹⁾が保証するように原信号とかけ離れたものにはなっていない。

7. 多変数補間への拡張

前章の $H_0^s(-R, R)$ の再生核を用いた補間を多変数に拡張することを考える。次のような拡張は自然であろう。すなわち,

表 1 実験に用いたデータ
Table 1 The data used for experiment.

No	1	2	3
	(-2.244, 0.526)	(-1.346, -3.523)	(-0.449, -0.947)
	4	5	6
	(0.449, -0.737)	(1.346, 0.719)	(2.244, 9.975)

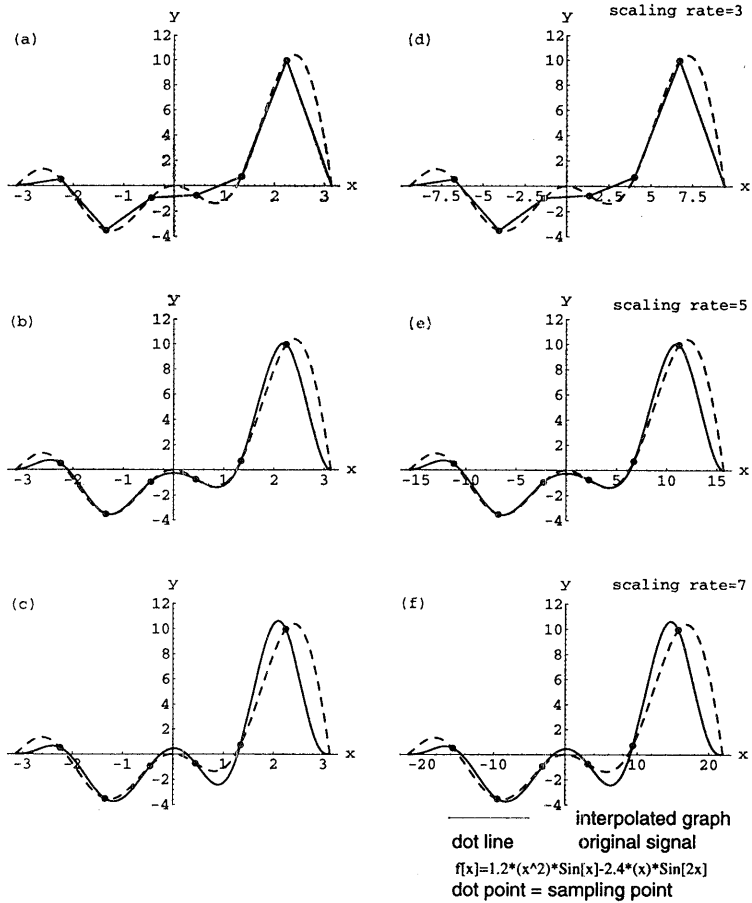


図 3 (a), (b), (c)のグラフは表1のデータをそれぞれ $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$ を用いて補間したグラフ。(d), (e), (f)のグラフは表1のデータの入力を適当にスケールしたものをそれぞれ $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$ を用いて補間したグラフ。
 Fig. 3 Each figure (a), (b), (c) represents the interpolated graph of given data of Table 1 using the reproducing kernel $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$, respectively. And each figure (d), (e), (f) represents the interpolated graph of scaled data of Table 1 using the reproducing kernel $K^1(x, y)$, $K^2(x, y)$, $K^3(x, y)$, respectively.

$$F(t) = \sum_{i=1}^N c_i K^{s_1}(t_1, x_{i,1}) \cdots K^{s_n}(t_n, x_{i,n}) \quad (38)$$

によって補間を行う方法である $(x_{i,j})$ は点 x_i の第 j 成分を表し, $K^{s_j}(x, y)$ は, $H_0^{s_j}(\Omega)$ の再生核を表す.). 係数 c_i は

$$K'c = \begin{pmatrix} K^{s_1}(x_{1,1}, x_{1,1}) \cdots K^{s_n}(x_{1,n}, x_{1,n}) \cdots \\ \vdots \\ K^{s_1}(x_{N,1}, x_{1,1}) \cdots K^{s_n}(x_{N,n}, x_{1,n}) \cdots \\ \vdots \\ K^{s_1}(x_{N,1}, x_{N,1}) \cdots K^{s_n}(x_{N,n}, x_{N,n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (39)$$

によって定まる。したがって行列 K' が正則であることが必要となるが, これは, $K^{s_1}(t_1, v_1) \cdots K^{s_n}(t_n, v_n)$ がヒルベルト空間 $H_0^{s_1}(-R, R) \otimes \cdots \otimes H_0^{s_n}(-R, R)$ の再生核になっていることと補題 7.1, 定理 4.1 から証明される。

$K^{s_1}(t_1, v_1) \cdots K^{s_n}(t_n, v_n)$ がヒルベルト空間 $H_0^{s_1}(-R, R) \otimes \cdots \otimes H_0^{s_n}(-R, R)$ の再生核になっていることは, 次の Aronszajn の定理⁶⁾からわかる。

定理 7.1 (Aronszajn の定理⁶⁾)

$K^1(x_1, y_1)$, $K^2(x_2, y_2)$ をそれぞれヒルベルト空間 F_1, F_2 の再生核とする。このとき, $K^1(x_1, y_1)K^2(x_2,$

y_2) はテンソル積 $F_1 \otimes F_2$ の再生核となる。

この定理の証明とテンソル積の定義は付録(b)で述べる。

補題 7.1 Ω を R の領域とする。 Ω 上の相異なる N 点 x_1, \dots, x_N に対して

$$\phi = \{(\phi(x_1), \dots, \phi(x_N)) \in C^N \mid \phi(t) = \phi(t_1, \dots, t_n) \in H_0^s(\Omega) \otimes \dots \otimes H_0^{s_n}(\Omega)\}$$

は C^N のすべての値をとり得る。

証明は付録(c)で述べる。

以上により式(38)を用いた多変数補間が可能であることがわかった。

8. おわりに

ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$, ($s > n/2$) の再生核が補間に利用できることを示した。特に式(23)をノルムとして採用すると、この再生核を用いた補間はデータの相似変換、回転と交換可能となることがわかった。

また、式(23)をノルムに持つ $H_0^s(-R, R)$ の再生核を具体的に計算し、それらの積を利用した多変数補間が可能であることを示した。しかしながら、この方法ではデータの回転と補間は交換可能でない ($n > 1$ のとき)。したがって、データの回転とも交換可能であるためには式(23)をノルムに持つ $H_0^s(\Omega)$ の再生核を構成する必要がある。 $\partial\Omega = S^{n-1}$ の場合、この再生核を構成することは興味深い問題ではないだろうか？

$n=2, s=2$ の場合には、これを構成することは可能で、それは Bergman 核¹⁰⁾となる。

謝辞 日頃ご指導頂く防衛大学校情報工学科柏木英一、生天目章両博士に感謝します。防衛大学情報工学科山田武夫博士は付録(a)について、査読者は定理4.1について筆者にとって貴重な御意見を下さった。これにより証明の大幅な簡略化がなされている。両氏に深謝申し上げます。

参考文献

- 1) Poggio, T. and Girosi, F.: Networks for Approximation and Learning, *Proc. of IEEE*, Vol. 78, No. 9, pp. 1481-1497 (1990).
- 2) Chui, C.K. (桜井 明, 新井 勉 共訳): マルチスプライン, 東京電機大学出版局 (1991).
- 3) 戸川隼人: マトリクスの数値計算, オーム社 (1971).
- 4) Micchelli, C.: Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionary Positive Definite Functions, *Constr. Approx.*, Vol. 2, pp. 11-22 (1986).

- 5) Duchon, J.: *Spline Minimizing Rotation-Invariant Semi-norms in Sobolev Spaces*, Lecture Notes in Math. 571, Springer-Verlag (1977).
- 6) Aronszajn, N.: Theory of Reproducing Kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 68, pp. 337-404 (1950).
- 7) Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).
- 8) Temam, R. (藤田 宏, 米口 肇 共訳): 数値解析特論, 産業図書 (1977).
- 9) 篠原能材: 数値解析の基礎, 日新出版 (1978).
- 10) Bergman, S.: The Kernel Function and Conformal Mapping, *Mathematical Surveys*, No. V, American Mathematical Society (1950).
- 11) 小川英光: 一般標本化定理, 電子情報通信学会論文誌(A), Vol. J71-A, No. 2, pp. 163-170 (1988).
- 12) 島倉紀夫: 楕円型偏微分作用素, 紀伊国屋書店 (1977).

付 録

(a) $K^1 = (K^1_{i,j}) = (K^1(x_i, x_j))$ が正定値であることの別証明

$K^1(x, y)$ は

$$K^1(x, y) = \begin{cases} (R-x)(R+y)/R & \text{if } y \leq x \\ (R+x)(R-y)/R & \text{if } x \leq y \end{cases}$$

と因数分解される。今、 $R < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N < R$ と仮定する。また、 $p_i = R + x_i, q_i = R - x_i$ とおく。したがって、

$$K^1(x_i, x_j) = \begin{cases} p_i q_j & (i \leq j) \\ q_i p_j & (j < i). \end{cases}$$

よって、

$$K^1 = \begin{pmatrix} p_1 q_1 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & \dots & p_1 q_{N-1} & p_1 q_N \\ p_1 q_2 & p_2 q_2 & p_2 q_3 & \dots & p_2 q_{N-1} & p_2 q_N \\ p_1 q_3 & p_2 q_3 & p_3 q_3 & \dots & p_3 q_{N-1} & p_3 q_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_1 q_{N-1} & p_2 q_{N-1} & p_3 q_{N-1} & \dots & p_{N-1} q_{N-1} & p_{N-1} q_N \\ p_1 q_N & p_2 q_N & p_3 q_N & \dots & p_{N-1} q_N & p_N q_N \end{pmatrix}$$

となる。

$$A_j := \begin{pmatrix} K^1(x_1, x_1) \dots K^1(x_1, x_j) \\ \vdots \\ K^1(x_j, x_1) \dots K^1(x_j, x_j) \end{pmatrix} \quad (40)$$

とおく。 K^1 が正定値であることを示すには $\det(A_j) > 0, (1 \leq j \leq N)$ を証明すればよい。

$j=1$ のとき $A_1 = p_1 q_1 > 0$ である。

$j=N-1$ まで $\det(A_j) > 0$ と仮定する。 N 行目から $N-1$ 行目 $\times q_N/q_{N-1}$ を引くと

$$\det(A_N) = \det(A_{N-1})(p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N)/q_N$$

となる。仮定より $\det(A_{N-1}) > 0$, また $(p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N) > 0$ だから $\det(A_N) > 0$ である。以上より証明さ

れた。

(b) 定理 7.1 の証明

定理 7.1 の証明を Aronszajn⁶⁾ にしたがって述べる。まず、 $F_1 \otimes F_2$ を次のように定義する。 $\{g_i^{(k)}\}$, $(i = 1, 2)$ を E を定義域とするヒルベルト空間 F_1, F_2 の完全正規直交系とする。そして、 $E \times E$ を定義域とするヒルベルト空間 $F_1 \otimes F_2$ を

$$F_1 \otimes F_2 = \left\{ \{g'(x_1, x_2) \in F_1 \otimes F_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,l} g_i^{(k)}(x_1) \cdot g_j^{(l)}(x_2), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_{k,l}|^2 < \infty \right\}, \quad (41)$$

付随する内積は $(\cdot, \cdot)' = ((\cdot, \cdot)_1)_2$ として定義する。ここで $(\cdot, \cdot)_i$ は F_i の内積である。 $F_1 \otimes F_2$ が完備であることは、 $\{g_i^{(k)}(x_1)g_j^{(l)}(x_2)\}$ が正規直交系になっている、パーセバルの等式が成り立つことから容易にわかる。次に

$$f'(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N f_i^{(k)}(x_1)f_j^{(k)}(x_2)f_i^{(k)}(x_1) \in F_1, \\ \text{and } f_j^{(k)}(x_2) \in F_2$$

のような任意の元が $F_1 \otimes F_2$ に属することを示す。これにより

$$\sum_{i=1}^N c_i K^1(x_1, y_{i1})K^2(x_2, y_{i2}) \in F_1 \otimes F_2$$

が保証される。

まず、任意の $f_i^{(k)}$ に対して $g_i^{(l)}$ の有限線形和 $h_i^{(k)}$ によって

$$\|h_i^{(k)}\|_i \leq \|f_i^{(k)}\|_i, \|f_i^{(k)} - h_i^{(k)}\|_i \leq \epsilon \quad (42)$$

とできることに注意する。また、不等式

$$\|f'\|' \leq \sum_{k=1}^N \|f_i^{(k)}\|_1 \|f_j^{(k)}\|_2 \quad (43)$$

が成り立つ。なぜなら、

$$\|f'\|'^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (f_i^{(k)}, f_i^{(l)})_1 (f_j^{(k)}, f_j^{(l)})_2 \\ \leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \|f_i^{(k)}\|_1 \|f_i^{(l)}\|_1 \|f_j^{(k)}\|_2 \|f_j^{(l)}\|_2 \\ = \left(\sum_{k=1}^N \|f_i^{(k)}\|_1 \|f_j^{(k)}\|_2 \right)^2$$

となるからである。

$$h'(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N h_i^{(k)}(x_1)f_j^{(k)}(x_2) \\ g'(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^N h_i^{(k)}(x_1)h_j^{(k)}(x_2)$$

とおく。 $\|f_i^{(k)}\|_i$ の最大値を M とおくと、

$$\|f' - g'\|' \leq \|f' - h'\|' + \|h' - g'\|'$$

$$\|f' - h'\|' = \sum_{k=1}^N \|(f_i^{(k)}(x_1) - h_i^{(k)}(x_1))f_j^{(k)}(x_2)\|' \\ \leq \sum_{k=1}^N \|f_i^{(k)} - h_i^{(k)}\|_1 \|f_j^{(k)}\|_2 \leq NM\epsilon$$

$$\|h' - g'\|' = \sum_{k=1}^N \|(f_j^{(k)}(x_2) - h_j^{(k)}(x_2))h_i^{(k)}(x_1)\|' \\ \leq \sum_{k=1}^N \|f_j^{(k)} - h_j^{(k)}\|_2 \|h_i^{(k)}\|_1 \leq NM\epsilon$$

となる。よって

$$\|f' - g'\|' \leq 2NM\epsilon$$

となり、 $f' \in F_1 \otimes F_2$ であることが証明された。

$K^1(x_1, y_1)K^2(x_2, y_2)$ が $F_1 \otimes F_2$ の再生核であることは

$$(g'(x_1, x_2), K^1(x_1, y_1)K^2(x_2, y_2))' \\ = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \alpha_{k,l} (g_i^{(k)}(x_1), K^1(x_1, y_1))_1 \\ \cdot (g_j^{(l)}(x_2), K^2(x_2, y_2))_2 \\ = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \alpha_{k,l} g_i^{(k)}(x_1)g_j^{(l)}(x_2) = g'(x_1, x_2)$$

からわかる。

(c) 補題 7.1 の証明

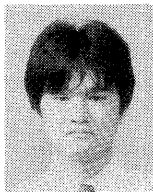
$(z_1, \dots, z_N) \in \mathbf{C}^N$ を任意のベクトルとする。このとき、 $\phi(x_i) = \phi(x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) = z_i$ ($1 \leq i \leq N$) をみたく $\phi(t) \in H_0^1(Q) \otimes \dots \otimes H_0^n(Q)$ が存在することを示す。補題 4.2 における関数 $C_\epsilon(t)$ を用いて

$$\phi(t) := \sum_{i=1}^N z_i c_\epsilon(\|t_1 - x_{i,1}\|_{R_n}^2) \dots c_\epsilon(\|t_n - x_{i,n}\|_{R_n}^2) \quad (44)$$

と定義する。 Aronszajn の定理の証明より $\phi(t) \in H_0^1(Q) \otimes \dots \otimes H_0^n(Q)$ となることがわかる。また、 ϵ を十分小さくとれば $\phi(x_i) = z_i$ が成り立つことは補題 4.2 と同様である。以上により証明された。

(平成 5 年 11 月 26 日受付)

(平成 6 年 6 月 20 日採録)



渡辺宏太郎 (正会員)

平成 2 年東京工業大学大学院数学専攻修士課程修了。現在、防衛大学校情報工学科助手。非適切問題の正則化技法等を研究中。電子情報通信学会、日本応用数学会、日本数学

会各会員。