

5 次 Pythagorean Hodograph 曲線の対話的生成

片山諒一*

吉田典正**

斎藤隆文***

*日本大学大学院

**日本大学

***東京農工大学

1. はじめに

Pythagorean Hodograph 曲線(以下 PH 曲線)は 1990 年に R.T.Farouki らによって考案された多項式曲線である[1]. PH 曲線は弧長が多項式となり, オフセット曲線が有理関数となる曲線デザインやモデリングにおいて望ましい特性を持った曲線形式である. しかし, Bézier や B-spline などの自由曲線とは異なり, 各制御点を単独で操作することができない. そのため, 曲線形状を変形するには複数のパラメータをユーザが指定する必要があるが, パラメータが曲線形状に与える影響は直観的に理解し難い.

よって, PH 曲線はパラメータを変化させての直観的な曲線形状操作が難しく, 対話性に問題がある. 本研究では 3 次 Bézier 曲線のように, ユーザが四点を指定することで 5 次 PH 曲線を生成する手法を提案する. これにより, ユーザが端点の位置と接線方向を制御することが可能となる.

2. 5 次 Pythagorean Hodograph 曲線

$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$ を曲線式とする. $\dot{x}(t)$ と $\dot{y}(t)$ をそれぞれ $x(t)$ と $y(t)$ の一次微分としたとき, $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2$ が t に関する多項式の平方となるならば, 式(1)が PH 曲線の曲線式となる[2].

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{p}_0 + x(t)\mathbf{T} - y(t)\mathbf{N} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1)$$

ここで, \mathbf{p}_0 は始点, \mathbf{T} と \mathbf{N} はそれぞれ $t=0$ にお

ける単位接線・法線ベクトルである.

5 次 PH 曲線の Bézier 制御点は, 式(2)~(6)によって計算することができる[2].

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2)\mathbf{T} - \frac{2}{5}u_0v_0\mathbf{N} \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}(u_0u_1 - v_0v_1)\mathbf{T} - \frac{1}{5}(u_0v_1 + u_1v_0)\mathbf{N} \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 + \frac{1}{15}(2u_1^2 - 2v_1^2 + u_0u_2 - v_0v_2)\mathbf{T} - \frac{1}{15}(4u_1v_1 + u_0v_2 + u_2v_0)\mathbf{N} \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}(u_1u_2 - v_1v_2)\mathbf{T} - \frac{1}{5}(u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{N} \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2)\mathbf{T} - \frac{2}{5}u_2v_2\mathbf{N} \quad (6)$$

3. 対話的生成

5 次 PH 曲線の対話的生成について述べる. 5 次 PH 曲線は, \mathbf{p}_0 , \mathbf{T} , \mathbf{N} , u_0 , u_1 , u_2 , v_0 , v_1 , v_2 の計九つのパラメータを持っており, ユーザがパラメータを指定することによって曲線が描かれる. しかし, 各パラメータが曲線形状に与える影響は直感的に分かり難い. そこで, 図 1 に示すように \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 の計四つの点を任意に指定し, 四点の位置関係から各パラメータを求めて曲線を生成する. これにより, 四点を操作することによって曲線形状を変形することが可能となる. 以下に各パラメータを求める手順を示す.

Interactive Generation of Quintic Pythagorean Hodograph Curves

*Ryo Katayama · Graduate School of Nihon University

**Norimasa Yoshida · Nihon University

***Takafumi Saito · Tokyo University of Agriculture and Technology

まず、始点の単位接線・法線ベクトルを \mathbf{T} と \mathbf{N} の値とする。このためには $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ または $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ である必要がある。本研究では $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ とした。

次に、 $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$, $\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i$ としたとき $\Delta \mathbf{a}_0$ と $\Delta \mathbf{p}_0$ を一致させるために、式(2)の関係から式(7)を導き u_0 を求める。

$$u_0 = \sqrt{\frac{5\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0\|}{\|\mathbf{T}\|}} \quad (7)$$

続いて、 $\Delta \mathbf{a}_2$ と $\Delta \mathbf{p}_4$ を一致させるために式(6)の関係より式(8)を導き、 u_2 と v_2 を求める。

$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2 = \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2)\mathbf{T} - \frac{2}{5}u_2v_2\mathbf{N} \quad (8)$$

式(8)を u_2 と v_2 について解くと、二組の虚数解と二組の実数解を得る。実数解の u_2 は、符号は異なるが絶対値は等しく、式(9)で表わされる。

$$u_2 = \frac{f}{5|\Delta a_{2x}|T_y - 5|\Delta a_{2y}|T_x} \quad (9)$$

ここで、 f は無理関数であり、 T_x と T_y はそれぞれ \mathbf{T} の x 成分と y 成分、 Δa_{2x} と Δa_{2y} はそれぞれ $\Delta \mathbf{a}_2$ の x 成分と y 成分である。図 2 と図 3 に f が正となる場合と、負となる場合の u_2 を用いて描いた曲線を示す。 f が正となる場合、図 2 に示すように \mathbf{a}_2 と \mathbf{p}_4 が一致しない。そのため、本手法では f が負となる場合の u_2 を用いる。

最後に、 \mathbf{a}_3 と \mathbf{p}_5 が一致するように、式(10)がゼロとなるような u_1 と v_1 を最適化によって求める。最適化には滑降シンプレックス法を用いる。

$$f(u_1, v_1) = \|\mathbf{a}_3 - \mathbf{Q}(1)\| \quad (10)$$

以上で、九つ全てのパラメータが定まったため、曲線の描画が可能となる。なお、本手法では u_0 を $\Delta \mathbf{a}_0$, u_2 と v_2 を $\Delta \mathbf{a}_2$ より求めているため、接線ベクトルの方向だけでなく、 $\Delta \mathbf{a}_0$ と $\Delta \mathbf{a}_2$ のノルムによっても曲線形状が変化する。

4. まとめ

本研究では、四点から 5 次 PH 曲線を対話的に生成する手法を提案した。生成は実時間で対話的に行う事ができる。

今後の展望としては、曲率対数グラフを利用し

た他の曲線との関連性の分析や、曲線の性質の解明などが挙げられる。

参考文献

- [1] R. T. Farouki, T. Sakkalis, Pythagorean hodographs. IBM J. Res. Develop. 34, pp. 736-752, 1990.
- [2] D. J. Walton, D. S. Meek, G^2 curve design with a pair of Pythagorean Hodograph quintic spiral segments, Computer Aided Geometric Design 24, pp. 267-285, 2007.
- [3] 平岩智之, 吉田典正, 斎藤隆文, 一般的な Class A Bezier 曲線の対話的生成, 精密工学会秋期退会学術講演会, pp. 353-354, 2007.

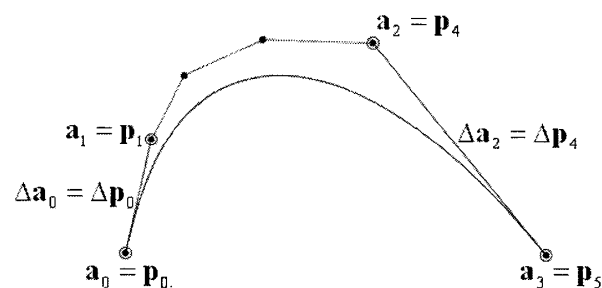


図 1 四点の指定

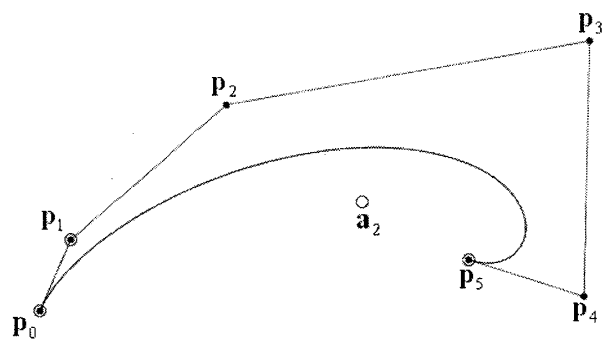


図 2 f が正の場合

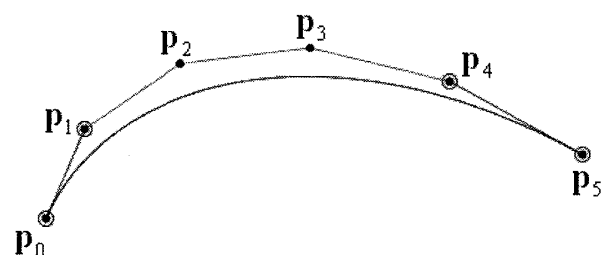


図 3 f が負の場合