連結度に注目した難しい 3 彩色インスタンスの組織的生成

仲 健次[1] 長澤 圭孝[2] 水野 一徳[1] 西原 清一[3]
拓殖大学工学部情報工学科[1] 拓殖大学大学院工学研究科[2]
筑波大学大学院システム情報工学研究科[3]

1. はじめに

色数 3 のグラフ彩色問題(3COL)において，極小非可解グラフ(MUG)同士を使って埋め込みを行うことによって相転移(PT)領域に存在するような難しいインスタンスを生成することが試みられている[2, 3, 4]．本稿ではまず，[2, 4]で生成されたインスタンスにおいて，効率的に解けてしまう場合があることを考察し，それを解決するための新たな生成方法を提案する．また，本方法で組織的に生成したインスタンスに対して実験を行い，探索コストが頂点の指数オーダの手間を要することを示す．

2. 研究分野の概要

2.1 3COL

3COL とは，無向グラフの隣接する頂点が同じ色にならないように，グラフの全ての頂点に決められた 3 色の色のうち 1 色を塗り分ける問題である．

2.2 n4c-free MUG

MUG(極小非可解グラフ)とは，非可解であるが任意の辺を 1 本削除することによって可解になってしまうグラフのことである．この MUG は，問題空間の可解/非可解が共に 50%の極端に狭い領域(相転移領域)に存在している．文献[2, 4]では，難しいインスタンスを生成するための，準正則な n4c-free MUG を提案している．その特徴として，頂点の次数が 3 と 4 に限定された準正則であり，n4c(4 クリークから任意の辺を 1 本削除したもの)を含まないという特徴を持つ．図 1 は文献[2, 4]で提案されている n4c-free MUG の一例である．また，n4c-free MUG に対して繰り返し埋め込み操作をすることで，インスタンスサイズを大きくすることができ，結果として非常に計算手間を要するインスタンスを生成する方法が提案されている[2, 4]．図 2 は実際に生成されたインスタンスの一例である．

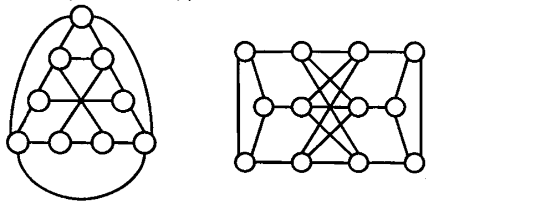


図 1 ： 準正則な n4c-free MUG(一例)

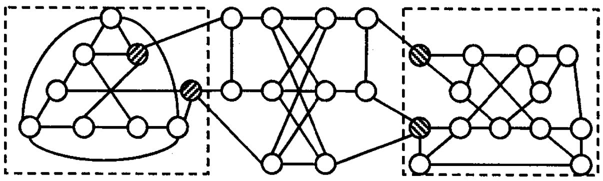
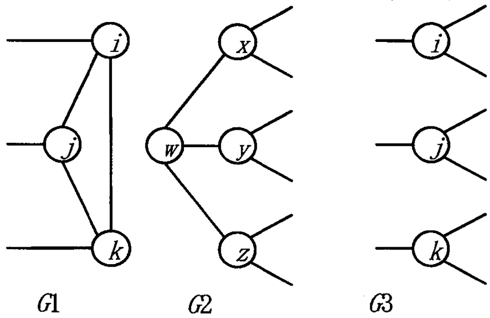


図 2 ： 生成されたインスタンスの一例

3. 連結度に注目したインスタンスの生成

3.1 連結度 2 のインスタンス

文献[2, 4]で提案されている n4c-free MUG は 3 連結である．しかし実際に生成されるインスタンスは，合併する際に注目した 2 頂点（図 2 のグラフでは網掛けされた頂点組）を切断点とした連結度が 2 のグラフである．ただし，連結度(vertex connectivity)とは，グラフを非連結にするのに除去しなければならない頂点の最小数のことであり，このようなグラフの切断点となる 2 頂点組は多項式時間ですべて発見することができる．さらに，図 2 の破線内に存在する頂



G1, G2 ： 合併前のMUGの一部
G3 ： 生成されたMUGの一部

図 3 ： 連結度 3 の合併方法

Constructive Generation of hard 3-Colorability Instances Focusing on Vertex Connectivity of Minimal Unsolvable Structures
Kenji Naka[1], Yoshitaka Nagasawa[2], Kazunori Mizuno[1], and Seiichi Nishihara[3]
[1,2]Department of Computer Science, Takushoku University
[3]Department of Computer Science, University of Tsukuba

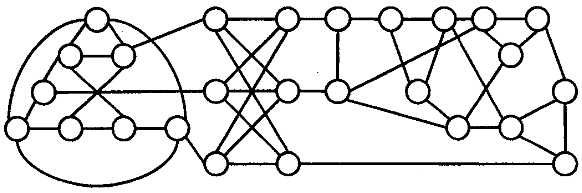


図4：連結度が3のインスタンスの一例

点からなる誘導部分グラフに注目すると，網掛けの頂点に同じ色を塗らなければならなくなる．そこで，前処理としてこのような部分グラフを探索してそれぞれのグラフを先に解き，ひとつの頂点に合併していくといった方法をとることができれば，グラフを効率的に解くことができてしまう．

3.2 連結度3のインスタンスの生成方法

本研究では，連結度を3に増やした，合併可能な部分グラフを容易に発見できないインスタンスについての生成方法を提案する[3]．

図3では，連結度3での生成方法を示している．ここで，$G1$，$G2$ を合併前のMUG，$G3$ を合併後のMUGのそれぞれ一部とする．ただし本方法で用いるMUGは，すべて，部分グラフとして3クリークを含んでいるものを用いている．まず，$G1$ の3クリークの辺 $(i,\ j)$, $(i,\ k)$, $(j,\ k)$ を削除する．また $G2$ の次数3の頂点 w と隣接する辺を削除する．次に $G1$ の頂点 i, j, k と $G2$ の頂点 x, y, z を合併し，頂点 i, j, k とする．このとき，$G1$ の3クリークの3点には異なる色を塗らなければならず，同時に $G2$ の次数3に隣接している3点はすべて異なる色を塗らなければならない．合併後の3頂点 i, j, k には，$G1$，$G2$ の性質が残っているので4-critical性は維持される．ただし，準正則性を保つため，つまり，合併後の頂点の次数が5になるのを防ぐために頂点の少なくとも合併する片方の頂点の次数が3でなければならない．図4は，連結度が3のインスタンスの一例である．

4. 実験

3章で示した生成方法を用いて生成された3COLインスタンスの難しさについての実験を行った．評価するためのアルゴリズムは，以下の代表的な2つのCOLソルバ，Brélazヒューリスティクスを組み込んだ木探索法(以下，Brélaz)[1]及び，Smallk Coloring Program(以下，Smallk) [5]を使用した．インスタンスは埋め込み回数 h = 1～10の10ケースに対して，各300問(計3000問)生成した．実験では，生成されたインスタンスのうち，Brélazは h = 1～7の7ケース，Smallkは h = 1～10の10ケースをそれぞれ用いた．図5にBrélaz及びSmallkのインスタンスの探索コストの実験結果を示す．図5より，連結度3のインスタンスは，文献[2, 4]で生成している連結度2のインスタンス同様に指数オーダの手間を要していることが分かる．

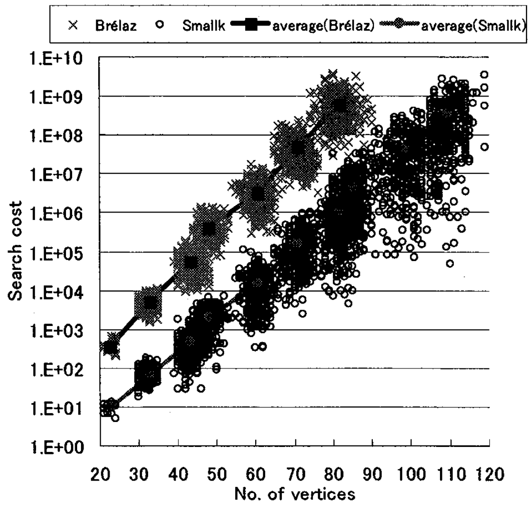


図5：Brélaz, Smallkの実験結果(search cost)

5. おわりに

本稿では，解決に非常に手間のかかる連結度3の3COLインスタンスを組織的に生成する方法を提案した．また本方法によって生成したインスタンスについて，Brélaz，Smallkを用いて実験を行い，その探索コストがほぼ頂点数の指数オーダの手間を要することを確認した．今後は我々の生成したインスタンスの困難さを理論的に明らかにすることが重要である．

参考文献

[1] D. Brélaz, “New method to color the vertices of a graph,” Commum. ACM, Vol.22, No.4, 1979, 251-256.
[2] K. Mizuno, S. Nishihara, : Constructive generation of very hard 3-colorablity instances, Discrete Applied Mathematics, 156(2) : 2008, 218-229.
[3] 仲 健次，長澤 圭孝，水野 一徳，西原 清一：点連結度に注目した難しい3COLインスタンスの組織的生成：第76回人工知能基本問題研究会，2009, 83-88
[4] Y. Nagasawa, K. Mizuno, H. Sasaki, Y. Miki, and K. Nishihara, Constructive Generation of 3COL Instances by Embedding Minimal Unsolvable Structures, Proc. KSE2009, 2009, 100-105.
[5] Overview of the Smallk Graph Coloring Program : http://www.cs.ualberta.ca/~joe/Coloring/Colorsrc/smallk.html