クリプキ・モデルに基づくディジタル画像表現と位相に関する考察

村井 哲也[1)] 生方 誠希[2)] 工藤 康生[3)] 赤間 世紀[4)]
北海道大学[1)] 北海道大学[2)] 室蘭工業大学[3)] 筑波大学[4)]

1. まえがき

クリプキ・モデルは可能世界の非空集合，その上の二項関係(到達可能関係)，および，原子命題の各世界における真偽を与える付値関数から構成され，様相論理や直観主義論理など非古典論理に対するいわゆる可能世界意味論を提供する．このモデルは自然に多重集合を表現し，特別な場合として通常の(部分)集合を含み，世界の集合として自然数全体を取れば，自然に順序関係が２項関係として設定され，直観主義論理やある種の時相論理のモデルとなるが，これが列の表現している．

更に，自然数集合の直積を取れば，有向集合になり，ディジタル画像を表現する．ディジタル画像には元の２次元ユークリッド空間の位相を２重に粒状化した位相が入り，４近傍や８近傍など画像処理における位相概念を表現できる．

2. 準備

本学会別稿[6]の内容を要約する．記号の集合をPとする．カルナップ・モデルとは組$\langle W, v\rangle$である．ここで，W は非空集合，v は写像 $v:P\times W\to 2$ (ただし，$2=\{0, 1\}$)である．W の要素を可能世界と呼ぶ．写像 v は様相命題論理では，各原子命題の各世界における真理値(0 or 1)を与える．カルナップ・モデルはクリプキらが拡張し，W 上の2項関係 R $(\subseteq W\times W)$ を追加した組$\langle W, R, v\rangle$を一般にクリプキ・モデルと呼び，W の任意の部分集合 $X(\subseteq W)$ に対する様相演算子，すなわち，必然・可能の演算子がそれぞれ，

$$[R]X=\{w\in W \mid W_w\subseteq X\},$$

$$\langle R\rangle X=\{w\in W \mid W_w\cap X\neq\emptyset\}$$

によって定義される．ここで，$W_w=\{w'\in W \mid wRw'\}$である．これらは位相空間[7]ではそれぞれ，X の開核・閉包，ラフ集合論[4,6]ではそれぞれ，(一般化)下近似・(一般化)上近似と呼ばれる．

記号集合 P に対し，カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ は 2^P 上の多重集合と同等である．実際，写像 v から，$\varphi_M(w)=\{p\in P \mid v(p, w)=1\}$によって，$2^P$ 上の多重集合(2^P 上の W-族)$\varphi_M : W\to 2^P$を構成できる．カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ が与えられた時，任意の部分集合 $X(\subseteq W)$に対して，$M_X=\langle X, v_X\rangle$を M の部分カルナップ・モデルと呼ぶ．これから導かれる 2^P 上の多重集合(2^P 上の X-族) $\varphi_{M_X} : X\to 2^P$ は明らかに，φ_M の部分多重集合である．

直観主義論理や時相論理では，2項関係を順序とするクリプキ・モデルで意味論を与える．例えば，可能世界の集合として時点を表す自然数の集合$\mathbb{N}$を取れば，自然に全順序関係$\leq$を伴い，$\mathbb{N}$-族は無限列と同等であり，クリプキ・モデル$\langle \mathbb{N}, \leq, v\rangle$は 2^P 上の列を表現する．後者の場合は論理式の集合列である．

インデックス集合 W 上に2項関係 $R(\subseteq W\times W)$が与えられたクリプキ・モデル$\langle W, R, v\rangle$において，部分多重集合の様相演算子を定義する．集合 A 上の W-族 φ と W の非空部分集合 $X(\subseteq W)$ に対して，部分多重集合 $\varphi|_X : X\to 2^P$ を考える．この時，クリプキ・モデルでは，X から2つの部分集合$[R]X$ と$\langle R\rangle X$ が定義され，それぞれから部分多重集合が生成される：

$$[R]\varphi_X=\varphi_{[R]X},$$

$$\langle R\rangle\varphi_X=\varphi_{\langle R\rangle X}.$$

この定義は列にも適用できる．

A Formulation of Digital Images es Directed Sets in Kripke models for non-classical logics
1) Tetsuya MURAI, Hokkaido University
2) Seiki UBUKATA, Hokkaido University
3) Yasuo KUDO, Muroran Institute of Technology
4) Seiki AKAMA, The University of Tsukuba

3. 画像の表現

自然数の順序集合$(\mathbb{N},\leq)$に対して，直積 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上の2 項関係を任意の$(m,k), (m',k')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して

$$(m,k)\leq(m',k') \Leftrightarrow m\leq m' \wedge k \leq k'$$

によって定義すれば，$(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq)$は有向集合である．

RGB によるカラー・ディジタル画像を考え，

$$A = \{R,G,B\}$$

$$256 = \{0,1, . . . ,255\}$$

とおけば，有向集合$(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq)$上の 256 値クリプキ・モデルで画像を表現できる：

$$img=\langle\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \leq,\ v_{256}\rangle$$

ここで，$v_{256} : A\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to 256$ は画像の高さを h，幅を w とする時，矩形部分集合$[0,w)\times[0,h)\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$で定義された部分写像である．

写像 v_{256} は次のように書き換えられるので，RGB によるカラー・ディジタル画像である:

$$f_{256}: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to256^A,$$

ここで，$256^A=\{p \mid p: A\to256\}$.

4. 粒状化位相

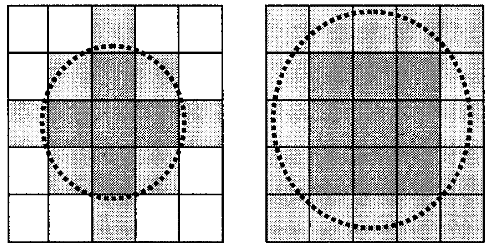
ディジタル画像は 2 次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の矩形を量子化することで得られる．量子化は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の分割を与える．この分割を与える同値関係を R とする時，$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}/R$ である．一方，同値関係 R は $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ における R-ラフ集合(上・下近似)[6]を導入できる．分割の要素(同値類)およびそれを基底として生成される集合はラフ集合の位相では閉かつ開(clopen)である．すなわち，ディジタル画像にはラフ集合の位相から導かれた離散位相が入る．

よって，位相空間(平面)$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ における通常 ε 開近傍 $B_\varepsilon(x)$の R による上・下近似を

$$[R]B_\varepsilon(x)=\{p\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid p\subseteq B_\varepsilon(x)\},$$

$$\langle R\rangle B_\varepsilon(x)=\{p\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid p\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset\}$$

はディジタル画像における閉かつ開集合である．ここで，よって定義される．これらの近似によって，4近傍，8近傍などを表現できる．次の図では，各セルは一つのピクセル，点線の円が中央のセルの中心からの ε 開近傍，濃い網掛け部分が下近似，それに薄い網掛けを付加した部分が上近似である：



中心から半径 ε を広げて行く時，一定の値で，ピクセルが下近似に含まれる．次図にその順を記入した：

6	5	4	5	6
5	3	2	3	5
4	2	1	2	4
5	3	2	3	5
6	5	4	5	6

値2以下を取れば，4近傍，3以下を取れば8近傍である．これら値は距離をなさないが，適当な修正により距離にできる．

謝辞．本研究の一部は日本学術振興会科学研究費基盤研究(B) No.19300074 および挑戦的萌芽研究 No. 19650046 の援助を得た．ここに謝意を表する．

文献

[1] R.A.Bull and K.Segerberg (2001), Basic Modal Logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic: Vol.3 (2nd ed.), Springer, pp.1-82.

[2] B.F.Chellas (1980), Modal Logic: an Introduction. Cambridge University Press.

[3] W.K.Grassmann and J.-P. Tremblay (1996), Logic and Discrete Mathematics: A Computer Science Perspective. Prentice-hall.

[4] S.Miyamoto (2004), Generalizations of Multisets and Rough Approximations, International Journal of Intelligent Systems, Vol.19, pp.639-652.

[5] 村井哲也，宮本定明，生方誠希，工藤康生，赤間世紀 (2010)，非古典論理のクリプキ・モデルにおける列・多重集合・集合の表現と粒状性の定式化．情報処理学会創立50周年記念全国大会(第72回全国大会)講演論文集CD-ROM: 6D-5.

[6] Z.Pawlak (1991), Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers.

[7] W.Sierpinski (1956), General Topology, University of Toronto Press.