# 非古典論理のクリプキ・モデルにおける列・多重集合・集合の表現と粒状性の定式化

村井 哲也 [1)]　宮本 定明 [2)]　生方 生希 [3)]　工藤 康生 [4)]　赤間 世紀 [5)]
北海道大学 [1)]　筑波大学 [2)]　北海道大学 [3)]　室蘭工業大学 [4)]　筑波大学 [5)]

## 1. まえがき

多重(マルチ)集合および，列，通常の(部分)集合の概念を表現する数学的定式化として，代数的方法，族(写像)による方法，帰納的定義など種々のアプローチがある(cf.[3])．様相論理や直観主義論理など非古典論理の意味論を定式化するクリプキ・モデル[1,2]は族(写像)の拡張と見なすことができる．本稿ではこの点に着目して，列と多重集合，通常の(部分)集合の概念を表現する族(写像)に基づく方法をクリプキ・モデルの枠組で再検討する．その結果，これら3つの概念に対して，粒状性に関する近似を表す様相演算子を統一的に定義できる．

## 2. 準備

### 2.1. 多重集合

集合 A 上の多重集合(cf.[4])はカウント関数 $Ct: A\to\mathbb{N}$ のことである．Ct(a)は A の要素 a が多重集合において出現する回数(重複度)を表す．A 上の多重集合 Ct, Ct'に対して，

$$Ct = Ct' \Leftrightarrow \forall a\in A(Ct(a) = Ct'(a)),$$

$$Ct \subseteq Ct' \Leftrightarrow \forall a\in A(Ct(a) \le Ct'(a))$$

によって相等関係と包含関係(部分多重集合)が定義される．多重集合間の 2 項演算として，和集合，積集合，加算がある．

2つの集合 A,I に対して，写像$\varphi: I\to A$ を A 上の I-族と呼び，I を A のインデックス集合という．I が有限集合の時，有限族という．集合 A 上の I-族 φ においては，相異なるインデックス $i\neq j\ (i,j\in I)$ に対して，$\varphi(i)=\varphi(j)$ となることが可能であるから，φ は一般に，A 上のマルチ集合と同等である．

集合 A 上の I-族$\varphi: I\to A$ に対して，インデックス集合 I の任意の部分集合 $J(\subseteq I)$ に対して，φ の定義域を J への制限した写像 $\varphi|_J$ は A 上の J-族であり，φ の部分族と呼ぶ．部分族 φ' は族 φ の定義域を制限したものなので，同値類の要素数は減ることはあって増えることはない：$|[i]_{\sim\varphi'}| \le |[i]_{\sim\varphi}|$．すなわち，部分族は部分マルチ集合である．

A 上の I-族 φ 自身が単射である時は，任意の $i\in I$ について，$[i]_{\sim\varphi}=\{i\}$ であり，φ は A の部分集合と同等である．単射な族 φ の部分族 φ' は明らかに単射であるから，φ' は φ の通常の部分集合である．

インデックス集合 I として自然数の集合 $\mathbb{N}$ を取り，自然数間の通常の全順序関係 ≤ を考えると，A 上の $\mathbb{N}$-族 $s: \mathbb{N}\to A$ は A 上の無限列である．A 上の $\mathbb{N}$-族 s の部分族を s の部分列と呼ぶ．$\mathbb{N}$-族の有限部分族は A 上の有限列である．

### 2.2. クリプキ・モデル[1]

記号の集合を P とする．例えば，命題論理では原子命題の集合となる．カルナップ・モデルとは組$\langle W, v\rangle$である．ここで，W は非空集合，v は次の写像 $v: P\times W\to 2$ (ただし，$2=\{0, 1\}$)である．W の要素はしばしば可能世界と呼ばれる．写像 v は様相命題論理では，各原子命題の各世界における真理値(0 or 1)を与える．カルナップ・モデルは様相論理 S5 (KT5) に対

---

A Formulation of Modal Operators for Sequences, Multisets, and Subsets in Kripke models for non-classical logics
1) Tetsuya MURAI, Hokkaido University
2) Sadaaki MIYAMOTO, The University of Tsukuba
3) Seiki UBUKATA, Hokkaido University
4) Yasuo KUDO, Muroran Institute of Technology
5) Seiki AKAMA, The University of Tsukuba

するモデルである．このモデルはクリプキらによって更に追究され，カルナップ・モデル$\langle W, v\rangle$に W 上の2項関係 R ($\subseteq W\times W$) を追加した組$\langle W, R, v\rangle$を一般にクリプキ・モデルと呼ぶ．クリプキ・モデル$\langle W, R, v\rangle$において，W の任意の部分集合 X ($\subseteq W$) に対する様相演算子，すなわち，必然・可能の演算子がそれぞれ，

$$[R]X=\{w\in W \mid W_w\subseteq X\},$$

$$\langle R\rangle X=\{w\in W \mid W_w\cap X\neq\emptyset\}$$

によって定義される．ここで，$W_w=\{w'\in W \mid wRw'\}$である．これらは位相空間[8]ではそれぞれ，X の開核・閉包，ラフ集合論[4,7]ではそれぞれ，(一般化)下近似・(一般化)上近似と呼ばれる．2項関係 R が満たす条件に依存して，種々の様相論理や直観主義論理に対する健全性 and/or 完全性が成り立つ．

## 3. クリプキ・モデルと多重集合

### 3.1. カルナップ・モデルと多重集合

記号集合 P に対し．カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ は $2^P$ 上の多重集合と同等である．実際，写像 v から，$\varphi_M(w)=\{p\in P \mid v(p, w)=1\}$によって，$2^P$ 上の多重集合 ($2^P$ 上の W-族)$\varphi_M$ : $W\to 2^P$ を構成できる．逆に，$2^P$ 上の W-族 $\varphi$ に対して，$v_\varphi(p, w)=1 \Leftrightarrow p\in\varphi(w)$によって，カルナップ・モデル $M_\varphi=\langle W,v_\varphi\rangle$を構成できる．

カルナップ・モデル $M=\langle W, v\rangle$ が与えられた時，任意の部分集合 X($\subseteq W$)に対して，$M_X=\langle X, v_X\rangle$を M の部分カルナップ・モデルと呼ぶ．これから導かれる $2^P$ 上の多重集合($2^P$ 上の X-族) $\varphi_{MX}$ :$X\to 2^P$は明らかに，$\varphi_M$ の部分多重集合である．

### 3.2. クリプキ・モデルと列

直観主義論理や時相論理では，2項関係を順序関係とするクリプキ・モデルで意味論を与えることができる．例えば，可能世界の集合として時点を表す自然数の集合$\mathbb{N}$を取れば，2.2 節で述べたように，自然に全順序関係$\leq$を伴い，$\mathbb{N}$-族は無限列と同等であった．よって，クリプキ・モデル$\langle \mathbb{N}, \leq, v\rangle$は $2^P$ 上の列を表現する．後者の場合は論理式の集合列である．

## 4. 列と多重集合の様相演算子

集合 A 上に2項関係 S($\subseteq A\times A$) が定義されている場合もインデックス集合 W に2項関係$R_S$を $wR_Sw' \Leftrightarrow \varphi(w)S\varphi(w')$ によって導くことができる．一般に，インデックス集合 W 上に2項関係 R($\subseteq W\times W$)が与えられたクリプキ・モデル$\langle W, R, v\rangle$において，部分多重集合の様相演算子を定義する．集合 A 上の W-族 $\varphi$ と W の非空部分集合 X($\subseteq W$) に対して，部分多重集合 $\varphi|_X : X\to 2^P$ を考える．この時，クリプキ・モデルでは，X から2つの部分集合[R]X と$\langle R\rangle X$ が定義され，それぞれから部分多重集合が生成される：

$$[R]\varphi_X=\varphi_{[R]X},$$

$$\langle R\rangle\varphi_X=\varphi_{\langle R\rangle X}.$$

この定義は列にも適用できる．画像処理や音楽情報処理への応用は本学会別稿[5,6]で述べる．

**謝辞**．本研究の一部は日本学術振興会科学研究費基盤研究(B) No.19300074 および挑戦的萌芽研究 No. 19650046 の援助を得た．ここに謝意を表する．

## 文献

[1] R.A.Bull and K.Segerberg (2001), Basic Modal Logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic: Vol.3 (2nd ed.), Springer, pp.1-82.

[2] B.F.Chellas (1980), Modal Logic: an Introduction. Cambridge University Press.

[3] W.K.Grassmann and J.-P. Tremblay (1996), Logic and Discrete Mathematics: A Computer Science Perspective. Prentice-hall.

[4] S.Miyamoto (2004), Generalizations of Multisets and Rough Approximations, International Journal of Intelligent Systems, Vol.19, pp.639-652.

[5] 村井哲也，生方誠希，工藤康生，赤間世紀 (2010)，クリプキ・モデルに基づくディジタル画像表現と位相に関する考察．情報処理学会創立50周年記念全国大会(第72回全国大会) 講演論文集CD-ROM: 2E-4.

[6] 村井哲也，生方誠希，工藤康生，赤間世紀 (2010),クリプキ・モデルに基づく音楽のコード表現と生成に関する基礎的考察．情報処理学会創立50周年記念全国大会(第72回全国大会) 講演論文集CD-ROM: 2D-1.

[7] Z.Pawlak (1991), Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers.

[8] W.Sierpinski (1956), General Topology, University of Toronto Press.