

1/f ゆらぎにもとづく 2 次元セルオートマトンの探索
1/f Noise at the Edge of Chaos

蜷川 繁

金沢工業大学 情報学部 情報工学科

〒 924-0838 石川県白山市八東穂 3-1

e-mail: ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

1 はじめに

1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトン (Cellular Automaton, CA) のルール 110, および 2 次元 CA のライフゲームとよばれるルールはいずれも計算万能性をもつことが知られている [1], [2]. さらにこれらのセルオートマトンにおいてランダム初期様相から開始した場合のパワースペクトルは 1/f ゆらぎを示すことが知られている [3], [4]. これらのことから計算万能性と 1/f ゆらぎの間には何らかの関連性があるのではないかと予想される. 本研究では 2 次元 3 状態 9 近傍 CA において 1/f ゆらぎを示すルールを遺伝的アルゴリズムを用いて探索する.

2 適合度の計算

N 個のセルからなる 1 次元 CA において, i 番目のセルの t ステップ目の状態を $x_i(t)$ とする. $t = 0, 1, \dots, T-1$ の T 個の時系列データに対して次の式 (1) で定義されるフーリエ変換を施す.

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}), \quad (f = 0, 1, \dots, T-1). \quad (1)$$

これを次の式 (2) のように全セルにわたって総和をとり, パワー $S(f)$ とする.

$$S(f) = \sum_{i=1}^N |\hat{x}_i(f)|^2. \quad (2)$$

(2) 式によって得られたパワースペクトルに対して, 最小自乗法を用いて $\log S(f) = \log a + b \log f$ と近似し, (3) 式に示すように指数 b と残差平方和 σ^2 から次

式によって適合度 F を求める.

$$\sigma^2 = \sum_{f=1}^N \frac{(S_f - S(f))^2}{N} \quad F = \frac{|b|}{\sigma^2 + \delta}. \quad (3)$$

ここで, N は σ^2 を求める際に用いるデータ数であり, $\delta = 0.000001$ は分母がゼロになることを避けるための項である. こうすることによって, パワースペクトルが 1/f ゆらぎに近い個体ほど大きな適合度をもつ.

本研究では, セル空間は縦 × 横 = 100 × 100 個のセルからなり, 初期様相は 0, 1 の状態が等確率で出現するようにランダムに生成し, 境界条件としてセル平面が 2 次元トーラスとなる周期境界条件を用いている.

3 実験

本研究で対象となる 2 次元 3 状態 9 近傍セルオートマトンの遷移関数 d は次式で表現される.

$$d(c, n_1, n_2) = x_i, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}. \quad (4)$$

ここで $c \in \{0, 1, 2\}$ は近傍の中心セルの状態, n_1, n_2 は周囲 8 セルのうち, それぞれ, 状態が 1, 2 のセル数を表し, $x_i \in \{0, 1, 2\}$ は中心セルの次ステップでの状態を示す. ただし, $i = 45c + b(19 - b)/2 + c$. 本研究では $d(0, 0, 0) = 0$ という遷移規則のみを対象とするので, 遷移規則を表わす遺伝子型は 134 桁の 3 進数 $x_{134} \dots x_1$ となる. 本稿では, 3 進数 2 ケタ (00~22) を 9 進数 1 ケタ (0~8) で表わすことにより, 遷移規則を 67 桁の 9 進数で表わすことにする.

本研究では $T=7200$ ステップに渡り状態遷移を行い, パワースペクトルを求めるが, そのためには膨大な計算時間が必要となる. そこで, GA を用いた最適化に

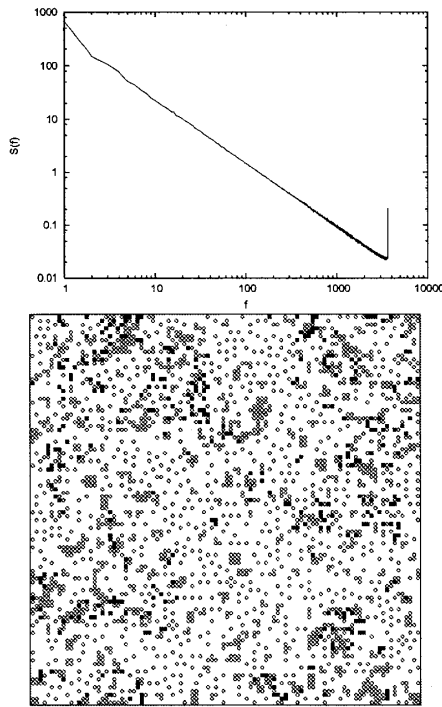


図 1: 最大適合度をもつルールのパワースペクトル (上) と様相 (下). 黒いマスは状態 1, 白抜きのマスは状態 2 のセルをそれぞれ表す.

先立ち, $1/135 \leq \lambda \leq 90/135$ の範囲でランダムに生成した初期集団に対し, $T = 1024$ の場合にパワースペクトルを求め, 最小 2 乗法を用いて $f = 1 \sim 400$ にわたって $S(f) = af^b$ と近似し, $b \leq -0.3$ となる遷移規則だけを取り出す. こうすることによってあらかじめ, $1/f$ ゆらぎから大きくはずれたものを除外することができる. こうして得られた遷移規則を 180 個まとめて 1 集団とし, $T = 7200$ としてパワースペクトルから, 先ほどと同様に適合度を求める.

また, b については, 低周波域での振る舞いを調べるために $f = 1 \sim 10$ の範囲で求め, σ^2 については, スペクトル全体が $1/f$ ゆらぎに近いかどうか調べるために, $f = 1 \sim 2700$ の範囲で求める. 選択はルーレット選択 (エリート数は 20) とし, 交叉確率 0.6 の一様交叉とし, ビット当たりの突然変異確率は 0.03 および 0.01 とした.

4 実験結果

現在のところ 80 通りの初期集団に対して合計 18789 世代まで実験が進んでおり, 2859382 通りのルールのパワースペクトルを求めた. 現在までに得られた遷移規則の中で, もっとも高い適合度 9039.94 ($b = -1.24, \sigma^2 = 1.36 \times 10^{-4}$) をもつ遷移規則は

```
1061514846216616838887822116100020
506606105213076215851220080326200
```

となる. このルールのパワースペクトルを図 1 (上) に, 様相を同図 (下) に示す. 様相において黒いマスは状態 1, 白抜きのマスは状態 2 のセルをそれぞれ表す. このルールでは, 状態 2 のセルが孤立して存在し, その隙間を状態 1 のセルが変化するという振る舞いを示す.

5 おわりに

本研究では GA を用いて $1/f$ ゆらぎを示す CA を探索した. 今後は, このルールがライフゲームのような計算万能性を示すかどうか調べる. 具体的には計算機能力を実現するために必要とされるグライダーのような伝播パターンが存在するかどうか調べる予定である.

6 謝辞

本研究は科研費 (20500216) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] E.R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Vol.2, Academic Press, New York (1982).
- [2] M. Cook: *Universality in Elementary Cellular Automata*. *Complex Systems* **15** (2004) 1–40.
- [3] Ninagawa, S., Yoneda, M., Hirose, S.: *1/f Fluctuation in the "Game of Life"*. *Physica D* **118** (1988) 49–52.
- [4] S. Ninagawa: *Power Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata*. *Complex Systems* **17** (2008) 399–411.