

## 2 段数陰的 Runge-Kutta 法について

田中正次<sup>†</sup> 山下忠志<sup>††</sup> 山下茂<sup>†††</sup>

硬い常微分方程式の数値解を求める有効な方法の研究は、今花盛りといってもよいだろう。それらの模索の原点に位置しているのが、強い安定性と高い打ち切り精度を保証する陰的 Runge-Kutta 法である。ただ、この方法は陰的であるから、計算の手間がネックになっている。近年のこの分野における様々な研究は、前述のネック克服の課題に対する挑戦と、安定性の本質の究明に向けられているように思われる。本研究は、特に 2 段数陰的 Runge-Kutta 法に限って、この原点となっている陰的 Runge-Kutta 法を見直そうとするものである。すなわち、2 段数陰的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解がもつ自由パラメータを、実用的に有意義な領域で変動させ、それに伴って打ち切り誤差や安定性がどのように変化するかをグラフに表示し、その中に既知公式の自由パラメータの値を座標とする点を記入し、既知公式を表現させる。また、1つの自由パラメータを安定性を支配するパラメータと置き換え、安定性を支配するパラメータの任意の値に対して打ち切り精度最良の公式を導く。さらにこの安定性を支配するパラメータの変動に伴い、安定性や最小打ち切り精度がどのように変化するかをグラフに描く。この研究で作成したグラフにより、我々は既知公式の特性や優劣を直観的に知ることができる。また、既知公式の改良や、より特性のよい新公式が導出できるか否かを容易に判断することができ、直ちに所望の公式を導くことができる。

## On 2-Stage Implicit Runge-Kutta Methods

MASATSUGU TANAKA,<sup>†</sup> TADASI YAMASITA<sup>††</sup> and SHIGERU YAMASITA<sup>†††</sup>

We research the relations among the truncation error, the stability and the free parameters of the solution for the equations of order conditions in the 2-stage 3rd-order implicit Runge-Kutta method, and make tables and graphs from their relationship. By the observation them we can know the merits, demerits and the possibility of betterment in the known methods. We derive the method that has minimum truncation error in a sense for any stability.

1. ま え が き<sup>3), 6), 7)</sup>

硬い常微分方程式の数値解を求める効果的な方法の研究は、今花盛りといってもよいだろう。それらの模索の原点に位置しているのが、強い安定性と高い打ち切り精度を保証する陰的 Runge-Kutta 法である。ただ、この方法は陰的であるから、計算の手間がネックになっている。近年のこの分野における様々な研究は、前述のネック克服の課題に対する挑戦と、安定性の本質の究明に向けられているように思われる。

本研究は、特に 2 段数法に限って、この原点となっている陰的 Runge-Kutta 法を見直そうとするもので

ある。すなわち、2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解がもつ 2 つの自由パラメータを、実用的に有意義な領域で変動させ、それに伴って打ち切り誤差や安定性がどのように変化するかをグラフに表示し、その中に既知公式の自由パラメータの値を座標とする点を記入し、既知公式を表現させる。また、自由パラメータの 1 つを安定性を支配するパラメータと入れ換え、安定性を支配するパラメータの任意の値に対して、打ち切り精度最良の公式を導く。ついで、次数条件式の解が 1 自由度をもつ半陰的法について、パラメータが実用的に有意義な範囲で変動するとき、打ち切り誤差や安定性がどのように変化するかを、自由パラメータを横軸にとってグラフで表示する。なお、横軸上に既知公式のパラメータの値を記入し、既知公式を表現させる。これらのグラフを活用することにより、我々は既知公式の特性や優劣を直観的に知ることができる。また、既知公式の改良や、より特性のよい新公式が導出できるか否かを容易に判断することができ、直ちに所望の公式を導くことができる。

<sup>†</sup> 日本大学工学部情報工学科

Department of Computer Science, College of Engineering, Nihon University

<sup>††</sup> シンク情報システム

SYNC Company Ltd.

<sup>†††</sup> 山梨大学工学部電子情報工学科

Department of Electrical Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Yamanashi University

以下 2 章において 2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法について述べ、3 章において同法の次数条件式とその解について説明する。4 章において 3 章で得られた 2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法の打ち切り誤差とその大小の判定法について述べ、さらに 5 章において同法の安定性について考察し、任意の安定性に対して打ち切り精度最良の公式を導く。6 章において 2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法の打ち切り精度と安定性の関係を示すグラフを描き、既知公式を評価しまた改良する。7 章において数値例を掲げ、8 章において結論を述べる。

2. 2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法

常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

において、 $f$  は十分滑らかなものとしよう。

$x = x_n$  における数値解  $y_n$  から、 $x = x_{n+1} = x_n + h$  における数値解  $y_{n+1}$  を求める次の方法を、2 段数陰的 Runge-Kutta 法という。

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n + a_1h, y_n + b_{11}k_1 + b_{12}k_2) \\ k_2 = hf(x_n + a_2h, y_n + b_{21}k_1 + b_{22}k_2) \\ y_{n+1} = y_n + c_1k_1 + c_2k_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで  $a_i, b_{ij}, c_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) は公式を特徴づける定数で、公式 (2.2) が 3 次の打ち切り精度をもつように選ばれる。(2.2) は、特に  $b_{12} = 0$  のとき半陰的 (または半陽的) であるといわれる。我々は、それらをも特別な場合として含む 2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法について研究した。我々が考察の対象とした、2 段数陰的 Runge-Kutta の既知公式を付録に掲げる<sup>1)~6)</sup>。

3. 次数条件式とその解<sup>1)~3), 6)</sup>

(2.2) が 3 次法になるために係数  $a_i, b_{ij}, c_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) が満たさなければならない条件式は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 c_i &= 1, \quad \sum_{i=1}^2 c_i a_i = 1/2, \quad \sum_{i=1}^2 c_i a_i^2 = 1/3 \\ \sum_{i,j=1}^2 c_i b_{ij} a_j &= 1/6, \quad \sum_{j=1}^2 b_{ij} = a_i \quad (i=1, 2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

これらの条件式を  $a_1, b_{12}$  を自由パラメータとして解くと、

$$\begin{aligned} a_2 &= (3a_1 - 2) / \{3(2a_1 - 1)\} \\ b_{11} &= a_1 - b_{12} \\ b_{21} &= (-2a_1 + b_{12} + 1) / \{3(2a_1 - 1)\}^2 \\ b_{22} &= (6a_1^2 - 5a_1 - b_{12} + 1) / \{3(2a_1 - 1)\}^2 \\ c_1 &= 1 / \{4(3a_1^2 - 3a_1 + 1)\} \\ c_2 &= 3(2a_1 - 1)^2 / \{4(3a_1^2 - 3a_1 + 1)\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

が得られる。

ここで、 $3a_1^2 - 3a_1 + 1 = 3(a_1 - 1/2)^2 + 1/4 > 0$  であるから、 $a_1 = 1/2$  のとき (3.2) は解をもたない。また、2 段数 3 次半陰的 Runge-Kutta 法の次数条件式の解は、(3.2) において  $b_{12} = 0$  と置けば得られる。

解系 (3.2) は、Butcher による 4 次法を特殊な場合として含んでいる。2 段数 4 次法はただ 1 つで、この公式以外には存在しない。

4. 打ち切り誤差とその大小の判定<sup>1)~3)</sup>

3 章で導いた 2 段数 3 次法 (2.2) の数値解  $y_{n+1}$  の局所打ち切り誤差  $T_{n+1}$  は、

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \tau_n h^4 + O(h^5) \\ \tau_n &= a_{31} Df f_x^2 + a_{32} f_y D^2 f + a_{33} Df_y Df \\ &\quad + a_{34} D^3 f \Big|_{\substack{x=x_n \\ y=y(x_n)}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} a_{31} &= \sum_{i,j,k=1}^2 c_i b_{ij} b_{jk} a_k - 1/24 \\ a_{32} &= \left( \sum_{i,j=1}^2 c_i b_{ij} a_j^2 - 1/12 \right) / 2 \\ a_{33} &= \sum_{i,j=1}^2 c_i a_i b_{ij} a_j - 1/8 \\ a_{34} &= \left( \sum_{i=1}^2 c_i a_i^3 - 1/4 \right) / 6 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f_n \frac{\partial}{\partial y}, \quad f_n = f(x_n, y_n)$$

である。

(3.2) と (4.2) より

$$\begin{aligned} a_{31} - a_{33} &= \{8(b_{12} - a_1)(3a_1^2 - 3a_1 + 1) + 1\} / \\ &\quad \{72(2a_1 - 1)\}^2 \\ a_{32} - 3a_{34} &= -(6a_1^2 - 6a_1 + 1) / \{72(2a_1 - 1)\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

が得られる。

打ち切り誤差の大小を判定するために次の数量を使用する。

$$A_{33} = \sum_{i=1}^4 a_{3i}^2 \tag{4.4}$$

また、(4.3) と (4.4) より

$$A_{33} = 2a_{31}^2 + \frac{10}{9} a_{32}^2 \tag{4.5}$$

(4.4) または (4.5) によって定義される  $A_{33}$  を、2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法 (2.2) の打ち切り精度判定基準という。

5. 安定性<sup>3),4)</sup>

テスト方程式

$$y' = \lambda y \quad (\lambda \text{ は複素定数}) \tag{5.1}$$

に(2.2)を適用し,

$$\beta_0 = b_{11} + b_{22} \tag{5.2}$$

と置いて整理すると,

$$y_{n+1} = R(h\lambda, \beta_0)y_n \tag{5.3}$$

が得られる。ここで

$$R(h\lambda, \beta_0) = \frac{\{1 + (1 - \beta_0)h\lambda - (\beta_0/2 - 1/3)h^2\lambda^2\}}{\{1 - \beta_0 h\lambda + (\beta_0/2 - 1/6)h^2\lambda^2\}} \tag{5.4}$$

である。

(5.4)を(2.2)の安定関数といい、 $Re(h\lambda) < 0$  であるようなすべての  $h\lambda$  に対して  $|R(h\lambda, \beta_0)| < 1$  ならば、(2.2)はA安定であるという。

$$\beta_0 \geq 1/2 \tag{5.5}$$

のとき(2.2)はA安定である。(5.5)と(3.2)から

$$b_{12} \leq a_1 - 1 / \{8(3a_1^2 - 3a_1 + 1)\} \tag{5.6}$$

のとき、(2.2)はA安定であることが分かる。また、半陰的法の場合は、 $b_{12} = 0$  から、

$$a_1 > 1/2 \tag{5.7}$$

のときA安定となる。

ここでB安定、代数的安定などの安定性の新しい概念の定義を述べ、(2.2)がA安定な領域で、B安定でもまた代表的安定でもあることを示そう。ここでは初期値問題(2.1)を  $m$  元連立微分方程式と考へ、(2.2)を一般の  $s$  段数陰的 Runge-Kutta 法

$$k_i = hf(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^s b_{ij} k_j) \quad (i=1, 2, \dots, s)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s c_i k_i \tag{5.8}$$

に置き換えて考察する。

(2.1)が

$$\langle f(x, \xi_1) - f(x, \xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle \leq 0, \quad x \geq 0, \quad \xi_1, \xi_2 \in R^m \tag{5.9}$$

を満足するとき、(2.1)を消散方程式とよぶことにしよう。また、同一の Runge-Kutta 法の相異なる初期値から得られる二つの数値解を  $y_n, \hat{y}_n$  とする。そのとき、(5.9)を満足する自励系とすべての  $y_n, \hat{y}_n, h > 0$  に対して  $\|y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}\| \leq \|y_n - \hat{y}_n\|$  ならば、その陰的 Runge-Kutta 法はB安定であるといわれる。

また、

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_s \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

$$M = CB + B^T C - C_1 C_1^T$$

であるとき、行列  $C$  および  $M$  が非負値行列ならば、 $s$  段数陰的 Runge-Kutta 法(5.8)は代数的安定であるといわれる。詳述は避けるが、代数的安定は極めて強い安定性で、勿論代数的安定ならばA安定でもあり、またB安定でもある。

次に、2段数3次法(2.2)が代数的安定であるための条件を求める。(5.10)で定義された  $C, M$  を自由パラメータの形式で表現し、それぞれが非負値行列になるために必要な自由パラメータの条件を求めた。その結果、(2.2)がA安定であるための条件と同一の条件(5.6)が得られた。また、半陰的法の場合は(5.7)となった。したがって、2段数3次法(2.2)ではA安定と代数的安定とが等価であることが分かる。

ここで、安定性を支配するパラメータ  $\beta_0$  が任意の値をとるとき、打ち切り精度最良な公式を導いておこう。

(4.3)で与えられた  $a_{31}$  は、(5.2)によって定義される安定性を支配するパラメータ  $\beta_0$  の関数として、次のように表される。

$$a_{31} = (1 - 2\beta_0)/24 \tag{5.11}$$

一方、打ち切り精度判定基準  $A_{33}$  は(4.5)によって表されるので、任意の  $\beta_0$  に対して  $A_{33}$  を最小にするには、

$$a_{32} = -(6a_1^2 - 6a_1 + 1) / \{72(2a_1 - 1)\} = 0 \tag{5.12}$$

となるように自由パラメータ  $a_1$  を選ばばよい。これより、

$$a_1 = (3 \pm \sqrt{3})/6 \tag{5.13}$$

が得られ、求める公式は表1によって与えられる。

公式(2.2)の簡潔な表示法としては、次に示すマトリックス表示がしばしば使用される。

$$\begin{array}{c|cc} a_1 & b_{11} & b_{12} \\ a_2 & b_{21} & b_{22} \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

公式(2.2)のマトリックス表示

表1の表示もこの慣行にしたがった。

(5.11)および(5.12)から、表1に示す公式の打ち切り

精度判定基準は、

$$A_{33} = (1 - 2\beta_0)^2 / 288 \quad (5.14)$$

となることが分かる。この公式を Opt. st1 として引用する。

### 6. 安定性と打ち切り精度の関係

図1は、横軸に  $a_1$ 、縦軸に  $b_{12}$  をとり、それぞれを  $[-1, 1]$  の範囲が変動させたときの  $A_{33}$  の等高線図で、方法(2.2)が A 安定 (この場合は代数的安定でもある) になるような領域、および既知公式の  $(a_1, b_{12})$  を座標とする点も記入されている。ここで等高線の高さは、 $10^{-1}, 5 \times 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 10^{-5}, 5 \times 10^{-6}, 10^{-6}, 5 \times 10^{-7}$  である。

この図で  $b_{12}=0$  の直線上を見れば、半陰的 Runge-Kutta 法に対する  $A_{33}$  の変動の模様と、A 安定 (代数的安定) であるための  $a_1$  の範囲が分かる。これをさらに詳細に調べたものが図2である。

この図は横軸に  $a_1$  をとり、縦軸上方に  $-\log_{10}(A_{33})$

表1  $\beta_0$  が与えられたときの打ち切り精度最良の公式  
Table 1 The formula with the minimum truncation error for any  $\beta_0$ .

$(3 + \sqrt{3})/6$	$\beta_0/2$	$(3 + \sqrt{3} - 3\beta_0)/6$
$(3 - \sqrt{3})/6$	$(3 - \sqrt{3} - 3\beta_0)/6$	$\beta_0/2$
	1/2	1/2

$$A_{33} = (2\beta_0 - 1)^2 / 288$$

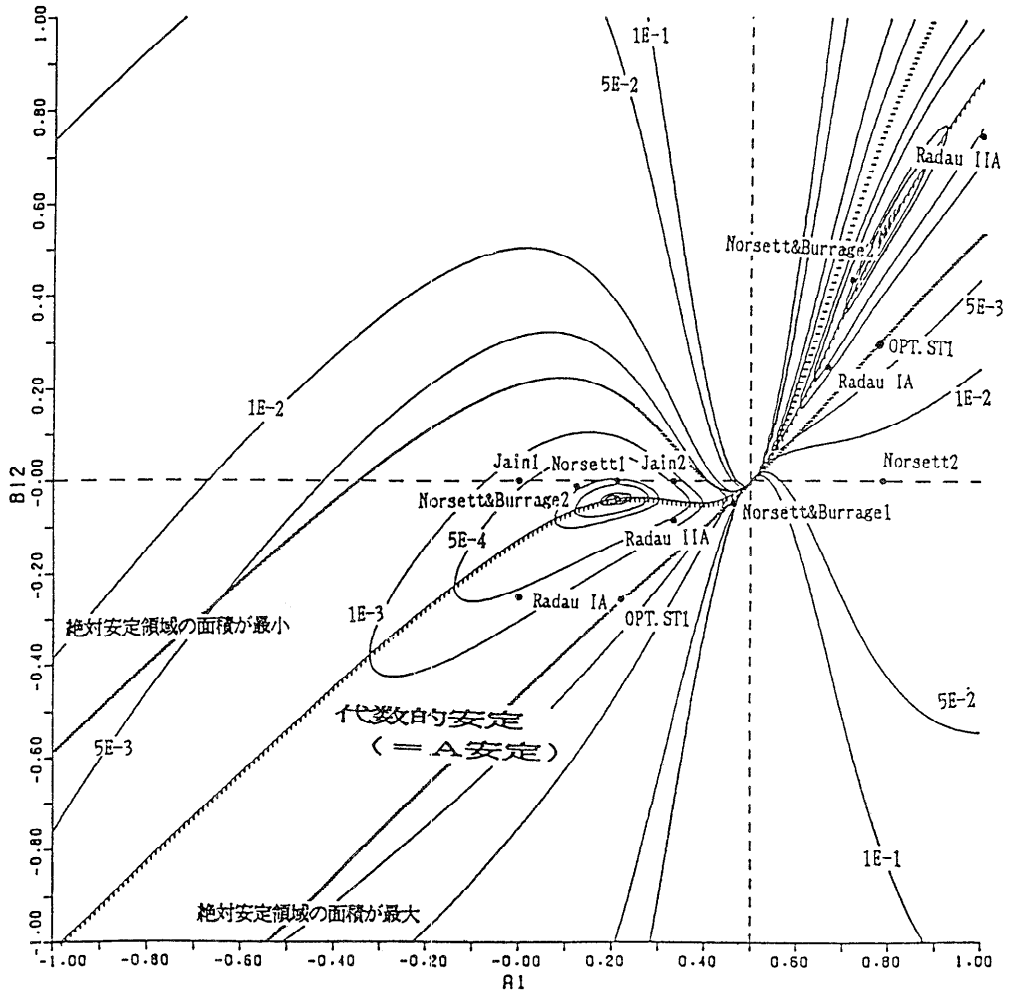


図1 安定性と打ち切り精度の関係 I  
Fig. 1 The relation between stability and truncation error I.

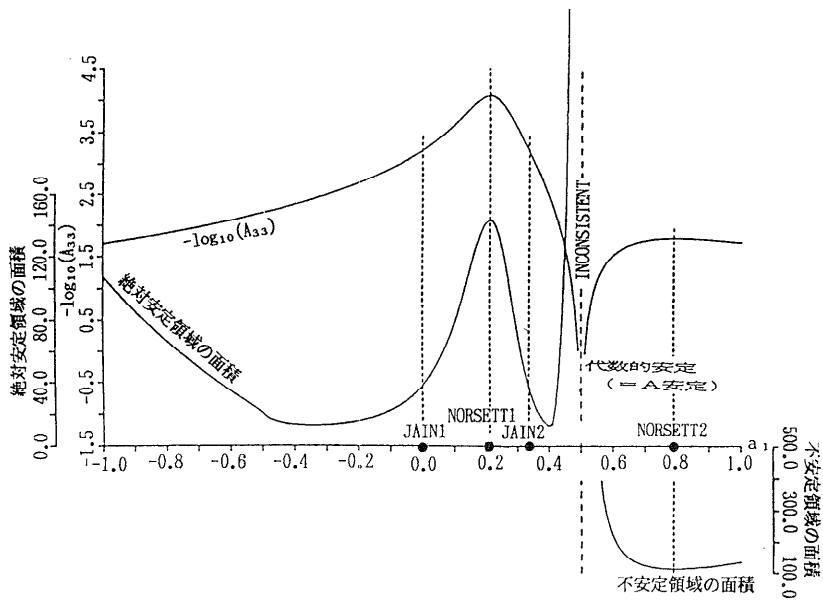


図 2 安定性と打ち切り精度の関係 II

Fig. 2 The relation between stability and truncation error II.

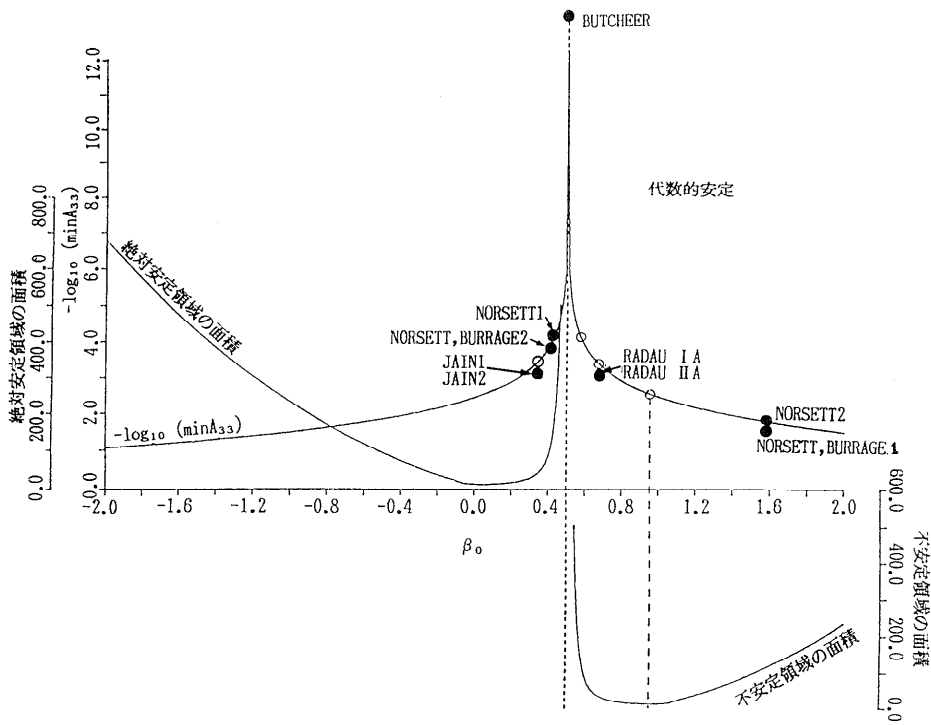


図 3 安定性と打ち切り精度の関係 III

Fig. 3 The relation between stability and truncation error III.

と絶対安定領域の面積 ( $a_1 < 1/2$  の場合), 縦軸下方に不安定領域の面積 ( $a_1 > 1/2$  の場合) をとって, 自由パラメータ  $a_1$  とそれらの関係を示したものである。

さらに図 3 は, 横軸に  $\beta_0$ , 縦軸上方に  $-\log_{10}(\min A_{33})$  と絶対安定領域の面積 ( $\beta_0 < 1/2$  の場合), 縦軸下方に不安定領域の面積 ( $\beta_0 > 1/2$  の場合) をとって, それらの関係を示したものである。

また, 図中の 9 個の既知公式の絶対安定領域の面積と,  $A_{33}$  の値は表 2 のようになっており, 各公式に対する絶

表 2 2 段数法の既知公式の特性

Table 2 The characteristics of known formulas in the 2-stage method.

公式名	$\beta_0$	安定性		$A_{33}$
		面積	区間	
Butcher	1/2		代数的安定	0.
Radau IA	2/3		代数的安定	6.00137 e-4
Radau IIA	2/3		代数的安定	6.00137 e-4
Norsett 1	$(3-\sqrt{3})/3$	143.816	(-12.928)	8.30981 e-5
Norsett 2	$(3+\sqrt{3})/3$		代数的安定	1.61206 e-2
Norsett, Burrage 1	$(3+\sqrt{3})/3$		代数的安定	2.50765 e-2
Norsett, Burrage 2	$(3-\sqrt{3})/3$	143.816	(-12.928)	1.29264 e-4
Jain 1	1/3	37.926	(-6.000)	6.00137 e-4
Jain 2	1/3	37.926	(-6.000)	6.00137 e-4
Opt. st 1	19/20		代数的安定	2.81250 e-3

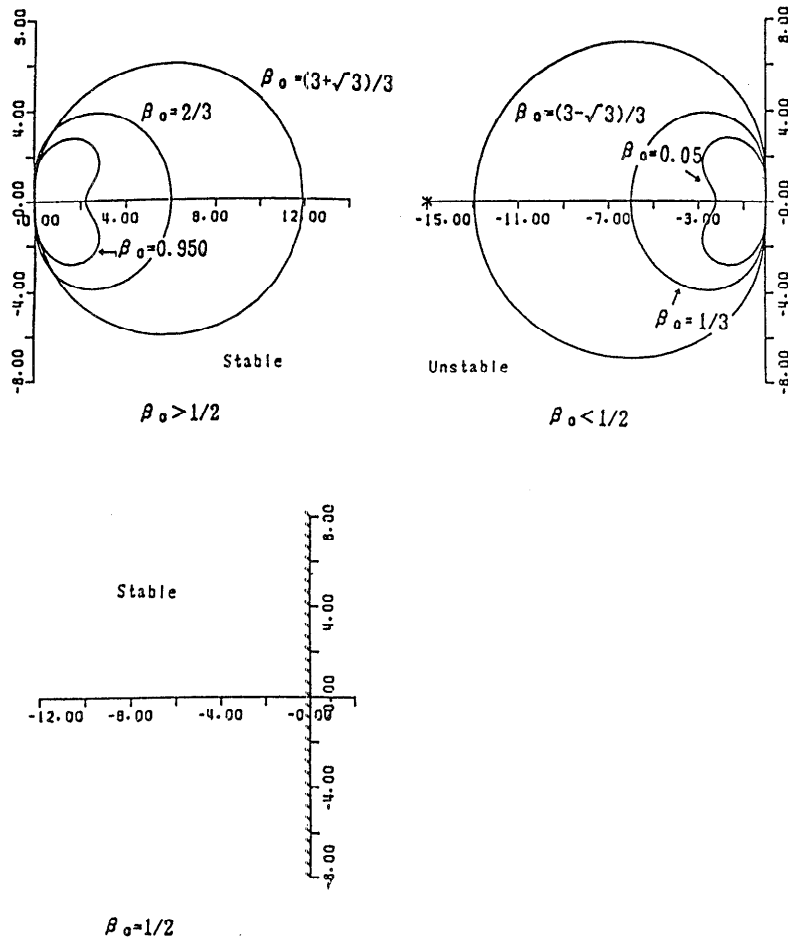


図 4 2 段数陰的 Runge-Kutta 法の絶対安定領域  
Fig. 4 Stability domains for 2-stage implicit Runge-Kutta methods.

対安定領域の図は図4に示される。

表2および図1～図4の観察から次のような結論を引き出すことができる(付録参照)。

1. Butcherの公式はかろうじて代数的安定性(A安定性)を持ち、最良の打ち切り精度をもつ。

2. 既知公式は、ほぼ打ち切り精度の良いところに集まっている。

3. Norsett, Burrage 1の公式はNorsett 2の公式に、Norsett, Burrage 2の公式はNorsett 1の公式に、それぞれ安定性を変えずに打ち切り精度の面で改良できる。また、Radau IA, Radau IIAの公式およびJain 1, Jain 2の公式も、安定性は変えずに打ち切り精度の面で改良できる(ただしJain 1, Jain 2は半陰的ではなくなってしまう)。さらに、Norsett 1, Norsett, Burrage 2の公式は同じ打ち切り精度をもつ代数的安定な公式に改良することができる(この場合もNorsett 1は半陰的ではなくなってしまう)。改良された公式を表3に示す。また、それらの公式の特性を表

表3 改良された公式  
Table 3 Improved formulas.

M. Radau IA & IIA

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{6}$
$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

M. Jain 1 & 2

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{6}$
$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{2-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

M. Norsett 1

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

表4 改良された公式の特性

Table 4 The characteristics of improved formulas.

公式名	$\beta_0$	面積	区間	$A_{53}$
M. Radau IA & IIA	2/3	代数的安定		3.85802 e-4
M. Jain 1 & 2	2/5	144.971	(-11.842)	3.80802 e-4
M. Norsett 1	$\sqrt{3}/3$	代数的安定		8.30981 e-5

表5 安定性がほぼ最良の公式の中で打ち切り精度最良の公式

Table 5 The one with the minimum truncation error among the formulas which have the largest stability domain.

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{3+20\sqrt{3}}{120}$
$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-20\sqrt{3}}{120}$	$\frac{9}{40}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4に示す。改良された公式やOpt. st 1は、図3において白丸で示される。白丸と公式との対応は容易に知られるだろう。

4. 好ましい公式は $\beta_0 \geq 1/2$ 側で作られる。

5.  $\beta_0 = 0.9503231$ の曲線上で、ほぼ最良の安定性をもつ公式(不安定領域の面積最小な公式)が作られる。この曲線上で打ち切り精度が最良になるのは、表1の公式に上の $\beta_0$ を代入することによって得られる。係数の簡単さや、上の $\beta_0$ の付近では絶対安定領域の面積の変化が少ないことを考慮して、表5に $\beta_0 = 0.95$ のときの公式を示す。

6. 半陰的法の中では、Norsett 1の公式は打ち切り精度がほぼ最良で、A安定ではないが安定性も相当良い公式である。またNorsett 2の公式は、代数的安定な公式中最良に近い打ち切り精度と、ほぼ最大な絶対安定領域をもつ公式である。この2公式は半陰的Runge-Kutta法で、しかも係数の対角成分がすべて等しいので、2段数半陰的公式中最良の特性を持つといってもよいだろう。

### 7. 数値例

既知公式と改良された公式を用いて、次の2問題について数値実験を行った。

I.  $y' = -\frac{1}{3}x^2y^2$   $y(2) = 1$

理論解  $y(x) = 9/(x^3 + 1)$

$h = 0.01$  100 ステップ

表 6 数値実験結果  
Table 6 Results of numerical experiments.

I $y' = -x^2y^2/3$ $y(2)=1$ $h=0.01$ 100 ステップ	第一ステップ		最終ステップ		
	真値	誤差	真値	誤差	最大誤差
	BUTCHER	9.86777077519 D-01	-3.73 D-12	3.21428571429 D-01	-3.22 D-11
NORSETT 1		-8.73 D-10		-8.76 D-09	-1.31 D-08
M. NORSETT 1		8.63 D-10		8.67 D-09	1.30 D-08
NORSETT, BURRAGE 2		-7.75 D-10		-8.20 D-09	-1.20 D-08
RADAU IA		2.08 D-09		2.00 D-08	3.05 D-08
RADAU IIA		1.65 D-09		1.75 D-08	2.55 D-08
M. RADAU IA & IIA		1.86 D-09		1.87 D-08	2.79 D-08
JAIN 1		-1.67 D-09		-1.77 D-08	-2.58 D-08
JAIN 2		-2.09 D-09		-2.00 D-08	-3.05 D-08
M. JAIN 1 & 2		-1.88 D-09		-1.89 D-08	-2.82 D-08
NORSETT 2		1.18 D-08		1.19 D-07	1.78 D-07
NORSETT, BURRAGE 1		1.05 D-08		1.11 D-07	1.62 D-07

II $y' = 100(\sin x - y)$ $y(0) = 0$ $h = 0.15$ 100 ステップ	第一ステップ		最終ステップ		
	真値	誤差	真値	誤差	最大誤差
	BUTCHER	1.39536471106 D-01	-4.56 D-03	6.57818937392 D-01	7.09 D-05
NORSETT 1		-1.14 D-02		-1.53 D+03	-1.53 D+03
M. NORSETT 1		-1.37 D-03		-6.93 D-04	-1.37 D-03
NORSETT, BURRAGE 2		-1.15 D-02		-4.34 D+03	-4.34 D+03
RADAU IA		5.93 D-04		-1.86 D-03	-2.68 D-03
RADAU IIA		8.44 D-04		-1.29 D-05	8.44 D-04
M. RADAU IA & IIA		6.94 D-04		-9.20 D-04	-1.34 D-03
JAIN 1		-4.77 D-02		-4.69 D+65	-4.69 D+65
JAIN 2		-4.60 D-02		-4.37 D+65	-4.37 D+65
M. JAIN 1 & 2		-4.70 D-02		-4.55 D+65	-4.55 D+65
NORSETT 2		5.45 D-03		-1.19 D-03	5.45 D-03
NORSETT, BURRAGE 1		6.10 D-03		-2.40 D-04	6.10 D-03

II.  $y' = 100(\sin x - y)$   $y(0) = 0$

理論解  $y(x) = (\sin x - 0.01 \cos x + 0.01e^{-100x})/1.001$

$h = 0.15$  100 ステップ

数値実験は倍精度で行われ、 $k_i$  を求めるには Newton 法を用いた。それぞれについて、第 1 ステップの誤差、最終ステップの誤差、最大誤差を表 6 に示す。I の結果は、判定基準で測られた各公式の打ち切り精度をよく反映している。また II の結果からは、 $h\lambda$  がその安定領域を越えてしまった Norsett 1, Norsett, Burrage 2, Jain 1, Jain 2 の公式に対する計算結果の発散が観察される。なお、Opt. st 1 の数値実験結果は示されていないが、表 2 と他の公式の数値例から、それがどのようになるかは容易に推測されるであろう。

### 8. むすび

本研究は、2 段数 4 次法を特別な場合として含む 2 段数 3 次陰的 Runge-Kutta 法について、打ち切り誤差と安定性の関係を研究し、それに基づき既知公式の評価と比較および改良の可能性について考察することを目的として進められてきた。これらの結果は既に本文に述べられているので、ここでは簡単にまとめておく。

1. 任意の 2 段数 3, 4 次法が与えられたとき、その公式の自由パラメータやその対、または  $\beta_0$  と打ち切り精度判定基準を座標とする点を打ち切り精度と安定性の関係を示した図上に記入することにより、その公式の特性を既知公式との対比において位置づけることができ、また、その公式の改良の可能性も容易に知るこ



とができる。

2. A安定でない公式は、打ち切り精度を一定に保ちながらA安定な公式に改良可能であるから、何かほかに長所がなければ、 $\beta_0 < 1/2$ の公式はあえて採用する価値はないと思われる。

3. 最適次数の2段数4次法は $\beta_0 = 1/2$ のときに現れ、かろうじてA安定性をもつ。

4. 安定性を支配するパラメータ $\beta_0$ が与えられたとき、打ち切り精度が最良である公式が誘導された。

この研究は、陽的 Runge-Kutta 法で試みられた既知公式の評価法の、陰的 Runge-Kutta 法への拡張版である。この研究を利用することにより、既知公式の優劣、位置づけ、評価が一層明確になる。なお、本文中の数式のほとんどにおいて、その誘導または誘導が正しく行われたかどうかの確認に、数式処理システム REDUCE 3.0<sup>9)</sup> が使用されたことを付記する。

謝辞 有益な助言をいただいた中央大学田口東教授、セイコーエプソン(株)の三村和正君に深謝する。

### 参考文献

- 1) Butcher, J.C.: Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration Processes, *J. Austral. Math. Soc.*, Vol. 3, pp. 185-201 (1963).
- 2) Butcher, J.C.: Implicit Runge-Kutta Processes, *Math. Comp.*, Vol. 18, pp. 50-64 (1964).
- 3) Hall, G. and Watt, J.M. (eds.): *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press (1976).
- 4) Dekker, K. and Verwer, J.G.: *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, North-Holland (1984).
- 5) Jain, M.K.: *Numerical Solution of Differential Equations* (second edition), John Wiley & Sons (1984).
- 6) Butcher, J.C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge-Kutta and General Linear Methods*, John Wiley & Sons (1987).
- 7) 三井斌友: 数値解析入門, 朝倉書店 (1985).
- 8) Hearn, A.C.: *REDUCE 3 User's Manual*, Univ. of Utah (1983).

### 付録 2段数3次法の既知公式

(公式1) Butcher<sup>2)-5)</sup>

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(公式2) Radau IA<sup>4)</sup>

0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(公式3) Radau IIA<sup>4)</sup>

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(公式4) Norsett 1<sup>4)</sup>

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	0
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(公式5) Norsett 2<sup>4)</sup>

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	0
$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(公式 6) Norsett, Burrage 1<sup>4)</sup>

$(2-\sqrt{2})r$	$\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)r$	$\left(1-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)r$
$(2+\sqrt{2})r$	$\left(1+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)r$	$\left(1+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)r$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}r^{-1} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}r^{-1}$		
$r = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$		

(公式 7) Norsett, Burrage 2<sup>4)</sup>

$(2-\sqrt{2})r$	$\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)r$	$\left(1-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)r$
$(2+\sqrt{2})r$	$\left(1+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)r$	$\left(1+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)r$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2}r^{-1} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}r^{-1}$		
$r = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$		

(公式 8) Jain 1<sup>5)</sup>

0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4} \quad \frac{3}{4}$		

(公式 9) Jain 2<sup>5)</sup>

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	0
$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{4}$		



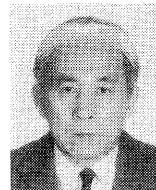
田中 正次 (正会員)

昭和 2 年生。昭和 32 年東北大学理学部数学科卒業。昭和 36 年同大学大学院理学研究科修了。同年富士電機(株)研究部に入社。昭和 37 年同社を退職し、山梨大学講師となる。ついで同大学計算機科学科教授、電子情報工学科教授を経て、現在は日本大学工学部情報工学科教授。専門は数値解析、主として常微分方程式の数値解法とその応用に関する研究に携わる。日本数学会、日本応用数理学会各会員。



山下 忠志 (正会員)

1962 年生。1984 年山梨大学工学部計算機科学科卒業。1986 年同大学大学院工学研究科修士課程修了。同年(株)サンニチ印刷入社。現在は(有)シンク情報システム取締役。数値解析、オペレーションズリサーチ、POS 情報分析、応用ソフトウェアの研究開発に従事。



山下 茂

昭和 18 年生。昭和 37 年山梨大学高等学校デザイン科卒業。現在は文部技官として山梨大学工学部電子情報工学科に勤務。日本体育学会、日本方法学会各会員。