多項式曲線の曲率単調性の確認手法について

片山諒一[*]　　吉田典正[**]　　斎藤隆文[***]

日本大学大学院[*]　　日本大学[**]　　東京農工大学[***]

1. 研究目的

美しい形状のデザインにおいて，曲線の曲率変化の単調性は重要な要素の一つである．特に，自動車のボディデザインの設計において反射像にうねりが生じないためには，曲面のキーラインに使用される曲線の曲率変化の単調性が保証されている必要がある．しかし，CAD システムなどで利用されているBézier 曲線や B-spline 曲線などの自由曲線は，それらの制御点の操作から曲率変化を単調にすること自体に困難さがあるため，曲率単調な曲線の生成は一般的には手間のかかる作業である．

本報告では，多項式曲線の曲率単調性を確認する二つの手法について，その特性の比較を行う．第一の手法は 3.1 節で述べる曲線の定義区間 $0 \le t \le 1$ を分割して分割点ごとに曲率を計算し，単調性を確認する手法である．第二の手法は，3.2 節で述べる曲率の傾きの正負から確認する手法である [1)2)]．以上の二つの手法の多項式Bézier 曲線に対する計算効率を比較し，どちらがより効率的かを明らかにする．

2. Bézier 曲線

パラメトリック曲線の代表的なものとして，Bézier 曲線がある．Bézier 曲線は制御ポリゴンさえ決まれば曲線形状を一意に決めることができるため，ポリゴンの形状から直観的に曲線を予想できる．このため設計者にとっても馴染みやすい曲線である．

Bézier 曲線の形状は制御点を基に作られる．n 次のBézier 曲線 $\mathbf{x}(t)$ は $n+1$ 個の制御点から生成され，次の式で表わされる．

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{p}_i \quad (0 \le t \le 1) \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{p}_i$ は制御点，B_i^n は Bernstein 基底関数である．

On the Monotonicity of the Curvature of Polynomial Curves

[*] Ryo Katayama・Graduate School of Nihon University

[**] Norimasa Yoshida・Nihon University

[***] Takafumi Saito・Tokyo University of Agriculture and Technology

3. 曲率とその単調性確認手法

曲率とは曲線の曲り具合を表す量であり，曲線 $\mathbf{x}(t)$ の曲率 κ は次の式で表わされる．

$$\kappa = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3} \tag{2}$$

ここで $\mathbf{x}'$，$\mathbf{x}''$ はそれぞれ t に関する一次微分，二次微分である．曲率単調とは，曲線の定義区間において曲率が常に単調に増加または減少し続けていることをいう．

3.1 分割点ごとの単調性確認手法

曲率変化の単調性を調べる最も単純な手法は，曲線の分割点ごとに κ を計算し，定義区間において κ が常に増加，または減少し続けているかを確認することである．

この手法は，分割点ごとの曲率で単調性を確認しているため，単調性の確実性が分割数に依存する．そのため，分割数によっては曲率プロットが図 1 のようになり，誤って判定されてしまうという問題がある．分割数を増やすことによって確実性を高めることはできるが，逆に計算効率が低下する．

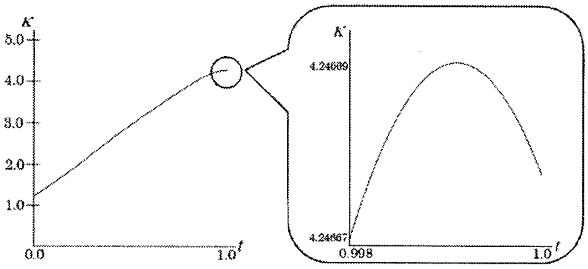

図 1　誤判定の起きる曲率プロットの例

3.2 曲率の傾きの正負による単調性確認手法 [1)2)]

曲率の傾きは $d\kappa/ds$ として表わされ，次の式で求められる．

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{\det(\mathbf{x}', \mathbf{x}''')\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' - 3\det(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'|^6} \tag{3}$$

ここで s は弧長，$\mathbf{x}'''$ は t に関する三次微分である．曲率変化の単調性を示すには，定義区間において $d\kappa/ds$ が常に正または負となっているかを確認すれば良い．なお，式(3)の分母は曲線が正則であ

る場合は必ず正となるため，実際は分子についてのみ考えれば良い．

図2のように式(3)の分子をBernstein基底へ変換し，制御点を利用して曲率単調性を確認する．制御点を利用して曲率単調性を確認するにあたって，次の二つの条件を利用する．

(a) $b_m \geq 0 \ or \ b_m \leq 0 \quad (0 \leq m \leq 4n-6)$

(b) $b_0 \cdot b_{4n-6} < 0$

ここで，b_mは Bernstein 基底への変換によって得た制御点である．

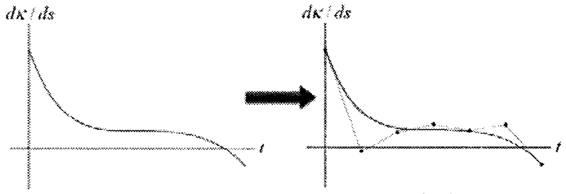

図 2　Bernstein 基底への変換

図 3 に示すように条件(a)が満たされていれば，Bézier 曲線の性質である凸閉包性から曲率の傾きが定義区間において常に正，または負であると判定できるため，曲線は必ず曲率単調である．一方，条件(b)が満たされている場合は，凸閉包性から曲率の傾きが定義区間において正と負に分かれると判定できるため，曲線は必ず曲率単調ではない．

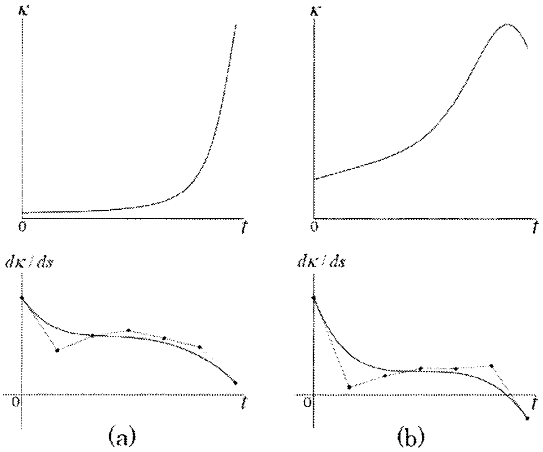

図 3　(a)または(b)を満たすκ及び$d\kappa / ds$

条件(a)，(b)が両方とも満たされない場合は，de Casteljau のアルゴリズムを適用し，曲線を再帰的に分割することによって曲率単調性を確認する．分割された曲線の全てが条件(a)を満たすか，分割された曲線の一つが条件(b)を満たすまで分割を行う．

以上の確認手法ではBernstein基底への変換によって得た制御点を利用しているため，曲率変化の単調性を確実に確認することができる．

4.　曲率単調性確認手法の比較

二つの曲率単調性確認手法で 3 次，4 次，5 次 Bézier 曲線の単調性確認に要する計算時間を比較する．比較結果を図 4 に示す．

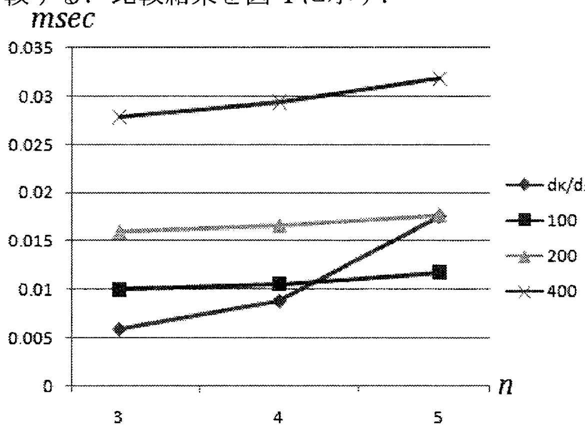

図 4　比較結果

分割点ごとに曲率を計算し確認する手法では，分割数を 100，200，400 と変化させて計測を行った．計算時間は分割数と次数の両方に対してほぼ線形に変化する．曲率の傾きの正負をBernstein 基底に変換することによって単調性を確認する手法では，計算時間は分割数には影響を受けず，次数によって変化する．

二つの手法を比較してみると，後者の手法は前者に対して次数が増すことによる計算時間の増加量が大きいため，次数が低いほど有効であると言うことができる．

5.　まとめ

本報告では，3 次，4 次，5 次多項式Bézier 曲線に対して，二つの手法の曲率単調性確認に要する計算時間の計測・比較を行った．比較結果より，曲率の傾きの正負をBernstein 基底に変換することによって単調性を確認する手法は，次数が低いほど有効であることが判明した．この結果から，分割数や次数，単調性の確実性，計算効率などを考慮して二つの手法を使い分ける必要がある．

参考文献

1) Norimasa Yoshida and Takafumi Saito, Quasi-aesthetic curves in rational cubic bézier forms, Computer-Aided Design and Applications, Vol.4, Nos. 1-4, pp.477-486, 2007.
2) Yulin Wang, Bingyan Zhao, Luzou Zhang, Jiachuan Xu, Kanchang Wang, and Shuchun Wang, Designing fair curves using monotone curvature pieces, Computer Aided Geometric Design, Vol.21, No.5, pp.512-527, 2004.