曲率・捩率対数グラフの性質と多項式曲線の変曲点近傍の性質

吉田　典正[†]　　斎藤　隆文[‡]
日本大学[†]　　東京農工大学[‡]

1．　はじめに

高品質な曲線・曲面の生成を行うため，CAD システムは，曲線に関して曲率プロット，曲面に関しては反射線，ガウス曲率の表示などいくつかのツールを備えている．本研究では，曲線を評価する新たなツールの一つとして曲率・捩率対数グラフを提案し，その性質を明らかにする．また，曲率対数グラフの応用例として，多項式曲線の変曲点近傍の性質を明らかにする．

2．曲率・捩率対数グラフ

曲率対数グラフは，和歌山大学の原田らによって示された，美しい曲線の多くはその曲率対数グラフが直線で表されるという指摘に基づくものである．曲率対数グラフが直線で表される曲線を，対数美的曲線と呼ぶ[3)]．

曲率半径を ρ，曲率を $\kappa(=1/\rho)$，弧長を s で表す．曲率対数グラフは，縦軸が $\log(\rho|\mathrm{d}s/\mathrm{d}\rho|)$，横軸が $\log\rho$ で表されるグラフである．ρ が s に対して単調に増加する場合，曲率対数グラフの直線性は，α を直線の傾き，c を定数としたとき，

$$\log\left(\rho\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}\right)=\alpha\log\rho+c \tag{1}$$

によって表される．$\Lambda=e^{-c}$ とした時，式(1)を変形することによって，曲率と弧長に関して次式の関係を得ることができる[3)]．

$$\kappa=\begin{cases} e^{-\Lambda s} & \text{if } \alpha=0 \\ (\Lambda\alpha s+1)^{-1/\alpha} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

曲率対数グラフの傾き α は，曲線の種類（例：$\alpha=-1$ の時，クロソイド曲線）を表す[3)]．

捩率半径を μ，捩率を $\tau(=1/\mu)$ としたとき，捩率対数グラフは，縦軸が $\log(\mu|\mathrm{d}s/\mathrm{d}\mu|)$，横軸が $\log\mu$ で表されるグラフである．

The Properties of Logarithmic Curvature and Torsion Graphs and the Properties of Polynomial Curves near the Inflection Points
† Norimasa Yoshida, Nihon University
‡ Takafumi Saito, Tokyo University of Agriculture and Technology

捩率対数グラフの直線性は，β を傾き，d を定数としたとき，

$$\log\left(\mu\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\mu}\right)=\beta\log\mu+d \tag{3}$$

で表される．捩率と弧長の関係は，$\Omega=e^{-d}$ としたとき，

$$\tau=\begin{cases} e^{-\Omega s} & \text{if } \beta=0 \\ (\Omega\beta s+1)^{-1/\beta} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

によって表される．

図 1 に，曲率対数グラフ (Logarithmic Curvature Graph, LCG) と捩率対数グラフ (Logarithmic Torsion Graph, LTG) を示す．曲率・捩率対数グラフを描くための計算手法については，文献[1)]を見られたい．

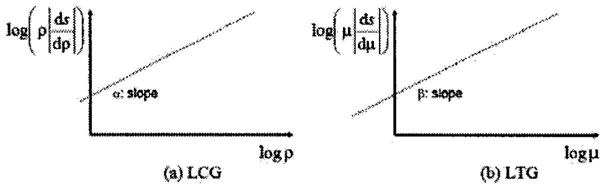

図 1　曲率対数グラフ(LCG)と捩率対数グラフ

曲率（捩率）対数グラフは次の性質を持つ．

(1) $\mathrm{d}\kappa/\mathrm{d}s=0$（$\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s=0$）の点において，縦軸が無限大になる．従って，曲線の曲率（捩率）対数グラフは，曲率（捩率）の極値の数だけ縦軸の値が無限になる点を持つ．

(2) $\rho=\infty$（$\mu=\infty$）の点において，横軸は無限大となる．$\rho=\infty$（$\mu=\infty$）の点までの距離が有限の場合，$\rho=\infty$（$\mu=\infty$）の点へ向かって縦軸は $-\infty$ へ近づく．距離が無限の場合，縦軸は一定または $-\infty$ へ近づく．

(3) 曲率（捩率）対数グラフがほぼ直線であることは，曲率（捩率）が式(2)（または式(3)）の関数で表されることを意味する．平面曲線の曲率対数グラフのある領域がほぼ直線で表されることは，その領域の曲線が傾き α の曲線で近似できることを意味する．空間平面曲線の曲率および捩率対数グラフのある領域がともにほぼ直線で表されることは，その領域の曲線が傾き

αおよびβの曲線で表されることを意味する.

3．数学的曲線の曲率・捩率対数グラフ

曲率・捩率曲線は，有理式・多項式を問わず任意の Bézier 曲線や NURBS 曲線またはその他の数学曲線から描くことが可能である．文献[1]に提案した手法では，従来の手法[2]と異なり，数学的に定義されたパラメトリック曲線から直接曲率・捩率対数グラフを描くことが可能である．

図２に，$y=x^2, y=x^3, y=x^4$ の曲率プロットと曲率対数グラフを示す．$y=x^2$ の曲線は，$x=0$（図２(a),(b)の A）において $d\kappa/ds=0$ となるため，曲率対数グラフの縦軸が無限になる．$y=x^n(n\geq 3)$ の曲線の $x=0$ の近傍の曲率は，$\kappa=nx^{n-2}$ で近似できる．式(2)と照らし合わせることによって，図２(d),(f)における点 AB 間の直線の傾きはそれぞれ-1，-1/2 となる．

図３は，対数螺旋を３次元へ拡張した曲線 $L(t)=\left(e^{at}\cos t, e^{at}\sin t, be^{t}\right)$，Twisted Cubic $T(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$，Viviani の曲線 $V(t)=\left(a(1+\cos t), a\sin t, 2a\sin(t/2)\right)$ の曲率対数グラフを示す．３次元対数螺旋は，曲率・捩率対数グラフともに傾きが１の曲線となる．

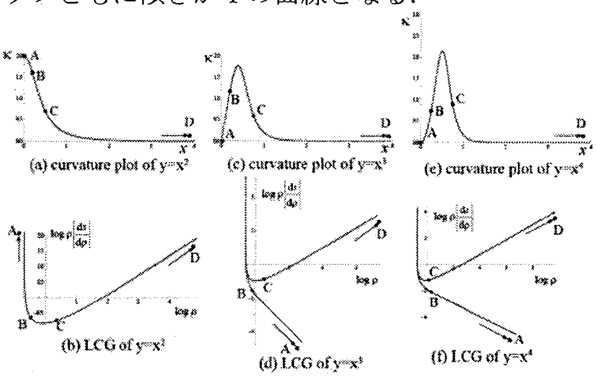

図２　$y=x^2, y=x^3, y=x^4$ の曲率プロットと曲率対数グラフ

4．多項式 Bézier 曲線の変曲点近傍の性質

曲率対数グラフの応用例の一つとして，図４に多項式 Bézier 曲線の曲率対数グラフを示す．図４(a),(b)に示すように，曲線が変曲点を持つ場合，ほとんどの場合において，変曲点近傍における曲率対数グラフの傾きが-1（クロソイド曲線）になるということが見られた．ただし，図４(c),(b)のような配置に置いた場合には変曲点近傍での傾きが変化した．なお，この性質に関しては，さらなる解析が必要である．

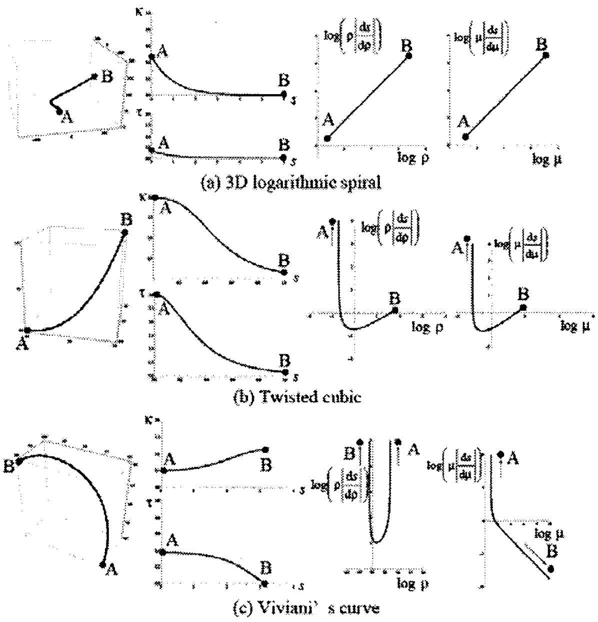

図３　数学曲線の，曲率・捩率プロットと曲率・捩率対数グラフ

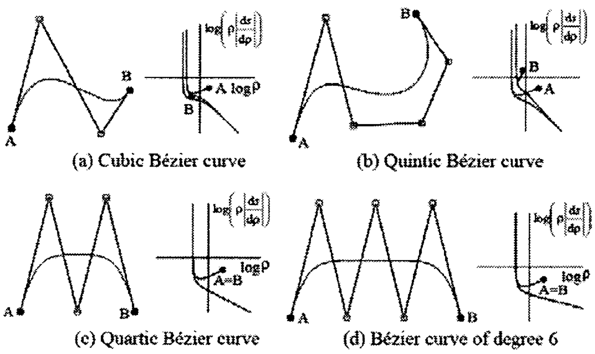

図４　変曲点を持つ Bézier 曲線の曲率対数グラフ

5．まとめ

本研究では，曲率・捩率対数グラフの性質およびいくつかの曲線の曲率・捩率対数グラフを示した．また，変曲点近傍において，（特別な場合を除いて）多項式 Bézier 曲線の曲率対数グラフの傾きが-1 の直線（すなわちクロソイド曲線）に近くなることを指摘した．

参考文献

1) 福田諒，吉田典正，斎藤隆文，対話的 Class A Bézier 曲線，情報処理学会グラフィクスと CAD 研究会，Vol. 2008, No.80, pp.1-8, 2008.
2) 井上治郎，原田利宣，多項式による空間曲線の近似手法とそれを用いた性質分析，情報処理学会グラフィクスと CAD 研究会，Vol.2007, No. 49-54, 2007.
3) N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.