

極小非可解構造の埋め込み操作による 3COL インスタンスの組織的生成

長澤 圭孝[†] 水野 一徳[†] 西原 清一[‡]

[†]拓殖大学工学部情報工学科 [‡]筑波大学大学院システム情報工学研究科

1. はじめに

グラフ彩色問題 (Graph Colorability: COL) は CSP の代表的な例題であり, 計算複雑さ及び解探索アルゴリズムの観点から研究されている. COL に関しては多くの研究報告が存在し, 解くのに非常に手間のかかる具体的問題 (インスタンスを生成するための多くの有効なパラメータが提案されている. 本研究では極小非可解構造に注目した, 非常に難しいインスタンスの組織的生成方法を提案する. また, 色数を 3 色に限定した COL (3COL) について, 本手法によって生成されたインスタンスを解く計算量が問題サイズ (頂点の数) の指数オーダーの手間になることを実験的に示す.

2. COL と極小非可解グラフ

2.1 COL

COL とは, 無向グラフの隣接する頂点が同じ色にならないようにグラフのすべての頂点に, ある定められた個数の色のうち一色を塗り分けていく問題である.

2.2 極小非可解グラフ (MUG)

極小非可解グラフ (Minimal Unsolvable Graph: MUG) は問題空間の可解/非可解の極端に狭い領域 (相転移領域) に存在している. そのため非常に計算手間を要することが知られている [1].

[定義: MUG]

非可解であるが, 任意の辺を一本削除することによって可解になる (3COL では 4-critical グラフに相当する).

ここで, 次の条件をもつ MUG にたいして, 同じ条件をもつ MUG を (その条件を満たしつつ) Hajos の合併に相当する方法で繰り返し埋め込むことで, 任意の大きさの, 解探索が非常に困難な 3COL インスタンスを意図的に生成することができる [1].

(条件 1) 次数が 3 と 4 (および 5) に限定された準正則である.

(条件 2) $n4c$ 構造 (4 クリークから辺を一本除いたもの) を部分グラフとして含まない.

以下にその生成手順を示す.

Step 0: 生成するインスタンスの素となる MUG をいくつか用意する.

Step 1: 用意した MUG のうちひとつを初期グラフに選ぶ.

Step 2: 用意した MUG から, 埋め込む MUG をひとつ選ぶ.

Step 3: 初期グラフ, および Step 2 で用意した埋め込むための MUG から, 少なくとも一方の次数が 3 となる隣接する二つの頂点をそれぞれ選び, Hajos の合併をおこなう.

Step 4: Step 3 のグラフを初期グラフとして, Step 2 へ任意の回数だけ戻る. Step 2 へ戻らない場合は, Step 3 のグラフを出力として終了する.

3. 新たな MUG と埋め込み操作の提案

3.1 新たな MUG の提案

ある互いに同型な MUG のみを繰り返し埋め込むことによって生成されたインスタンスは, 別の同様のインスタンスと同程度に難しくなるために必要な頂点数が, それぞれ異なる傾向がある (ただし, [1] で示された MUG はそのすべての場合で頂点数の指数オーダーの難しさ

をもつことが実験的に確かめられている)[1].
そこで、同型なグラフを繰り返し埋め込んで
行った時により早く(頂点数があまり多くない
ときに)難しいインスタンスを形成する MUG
は、その意味でより優れた MUG と言える。本
研究では、MUG の定義の有効性をさらに確かめ
ると共に、より難しいインスタンスを生成す
るために有効な、新たな条件を模索するため、
新たにいくつかの MUG を用意し、それぞれ、
単体での評価実験を行った。図 1 は新たに用
意した MUG の一例である。

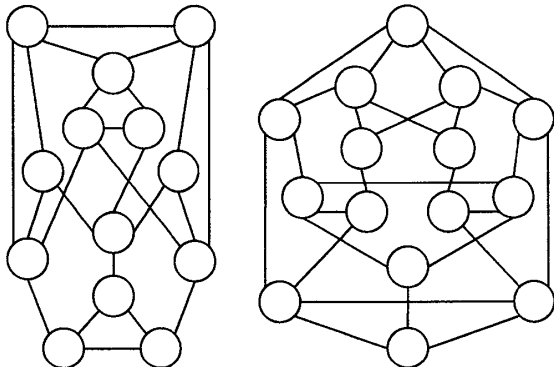


図 1: 極小非可解グラフ (MUG) の例

3.2 埋め込み操作と triangle-free 構造

Triangle(3-クリーク)-free 構造はイン
スタンスが難しいための、重要な指標の一つで
あることが知られている.[2]の 4-critical
graph units(4-CGUs)は、生成手順の一部に
Hajos の合併の応用を含む、4-critical であり、
かつ triangle-free 構造をもつイン
スタンスである。4-CGUs を解くためには頂点数の
指数オーダーの計算手間を要することが[2]の著
者らによって報告されている。本研究では 2.2
で示した生成手順の一部 (step3) を以下のよ
うに変更した、triangle をなるべく (または
完全に) 含まない MUG の生成方法およびイン
スタンスについても言及する。

Step 3' :初期グラフ、および Step 2 で用意
した埋め込むための MUG から、少なくとも一
方の次数が 3 であり、かつともに同一の
triangle 構造の一部を形成している隣接す
る二つの頂点をそれぞれ選び、Hajos の合併
をおこなう。

4. 評価実験

図 2 は、[1](2,2)の方法によって生成した
インスタンスについて、[1]の 7 つの MUG の中
から、または今回新たに用意した MUG のなか
で (単体での埋め込み操作による評価実験の
結果) 最も優れていると仮定した 7 つ MUG の

中からそれぞれランダムで埋め込んでいった
場合の 2 パターンについて、trick および
smallk[3]ソルバを用いて、その難しさにつ
いて、CPUtime を比較した結果である。イン
スタンスは、それぞれ埋め込み回数 4~9 およ
び 4~7 についてそれぞれ 50 間ずつ生成した。
また、図中の trick および smallk は[1]の MUG
を、trick' および smallk' は今回新たに用意
した MUG を使用したインスタンスをそれぞれ
解いた場合の結果である。

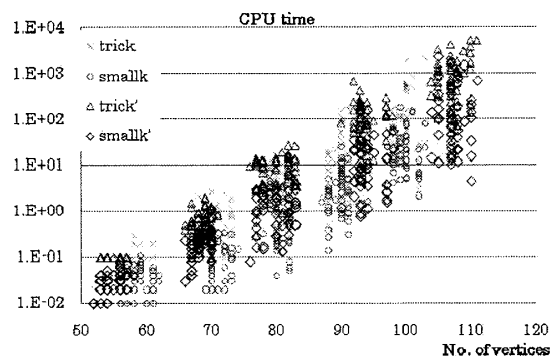


図 2: CPU time(sec)

5. おわりに

本研究では、実際に使用した素となる MUG、
および解くために使用した各ソルバにおいて、
[1](2.2)の手法によって生成されたイン
スタンスは 3.1 で新たに用意した MUG につ
いても、解くための計算量が問題サイズの指
数オーダーの手間になることを実験的に示
した。しかし 3.2 で提案した triangle 構
造をなるべく減らしていく埋め込み方法に
ついては、どちらのインスタンスについて
も、指数オーダーの難しさではあるが、2.2
の方法よりも簡単なインスタンスを生成し
てしまうことを確認した。

参考文献

- [1] Mizuno, K. and Nishihara, S. :
Constructive generation of very hard 3-
colorability instances, Discrete Applied
Mathematics, 156(2):218-229, 2008.
- [2] S. Liu and J. Zhang. Using hajos
construction to generate hard graph 3-
colorability instances. Lecture Notes in
Computer Science, 4120:211-225, 2006.
- [3][http://www.adaptivebox.net/research/book
mark/gpcodes_link.html](http://www.adaptivebox.net/research/bookmark/gpcodes_link.html)