

カオスの縁における 1/f ゆらぎ
1/f Noise at the Edge of Chaos

蜷川 繁

金沢工業大学 情報学部 情報工学科

〒 924-0838 石川県白山市八束穂 3-1

e-mail: ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

1 はじめに

セルオートマトンにおいて、ルールを漸進的に変化させた場合、規則的な振る舞いを示すルールからカオス的なルールへの変化の際に、相転移に似た現象が発生することが知られており、カオスの縁 (edge of chaos) とよばれている。カオスの縁では複雑な振る舞いを示すルールが存在することがあり、計算万能性をもつと予想されている。これをカオスの縁仮説とよぶ [1]。

単純セルオートマトン (elementary cellular automaton, ECA) とよばれる 1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトンにおいてルール 110 は計算万能性をもつことが証明されている [2] ことから、カオスの縁に位置する可能性が高い。いっぽう ECA のうちルール 110 がもっとも長期にわたり 1/f ゆらぎを示す [3] ことから、カオスの縁に位置するルールと 1/f ゆらぎが関連することが予想される。従来、カオスの縁を検出するための指標として摂動拡大率や相互情報量等が用いられてきたが、本研究では、パワースペクトルの指数を新たな指標として提案する。

2 単純セルオートマトン

ルール 110 ($\lambda = 5/8$) から 1 ビットだけ異なるルールは、 $\lambda = 4/8$ であるルール 46, 78, 102, 106, 108 と $\lambda = 6/8$ であるルール 126, 238 がある。時空間パターンの目視による観測から、これらのルールのうち、ルール 46, 78, 108, 238 は規則的、ルール 102, 106, 126 はカオス的なルールと判断される。また、ルール 110 は複雑なルールとする。これらのルールについて摂動拡大長さ、時空エントロピー、相互情報量、およびパワースペクトルの傾きを求める。セル数はいずれも 1000 とし、周期境界条件を用いる。ランダム初期様

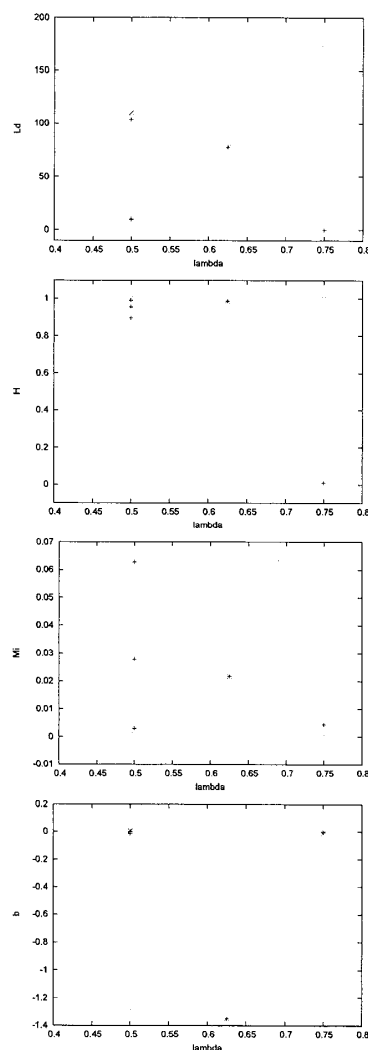


図 1: ルール 110 およびそれと隣接するルールの λ ごとの、(上から順に) 摂動拡大長さ、時空エントロピー、相互情報量、相互情報量、パワースペクトルの傾き。+, x, * はそれぞれ規則的、カオス的、複雑なルールを表す。

相と、その内の連続した10個のセルの0と1を反転した様相を用意し、100ステップ後の異なる連続した領域のセル数を摂動拡大長 L_d とする。ステップ t における i 番目のセルの状態を $x_i(t)$ とする。相互情報量はランダム初期様相から開始した1024ステップ分のセルの状態遷移の内、 $x_i(t)$ と $x_i(t+1)$ から求めた。またパワースペクトルは

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp(-i \frac{2\pi t f}{T}), \quad (1)$$

とフーリエ変換し

$$S(f) = \sum_i |\hat{x}_i(f)|^2, \quad (2)$$

で求め、 $f = 1 \sim 10$ の範囲で最小自乗法により $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$ と近似して傾き β を求める。一般に1次元セルオートマトンは初期様相による諸量の変動が大きいので、いずれも100回の平均値をとる。こうして求めた各ルールの λ ごとの種々の量を図1に示す。これより、摂動拡大率と時空エントロピー、相互情報量を用いた場合、ルール110を他のルールと識別することはできないが、パワースペクトルの傾きはルール110のみが他のルールの値と大きく異なることがわかる。

3 1次元2状態5近傍セルオートマトン

つぎに1次元2状態5近傍セルオートマトンにおいて同様に実験を行った。ただし、一方向に伝播するようなパターンを生成するルールを避けるために、左右対称性をもつルールのみを扱う。テーブルウォークスルー法を用いて $\lambda = 1/32 \sim 30/32$ の範囲で18個のルールを生成し、それらの摂動拡大率、時空エントロピー、相互情報量、およびパワースペクトルの傾きを先ほどと同じ条件で求めた。これを30回繰り返し、計540ルールについてデータを得た。そのうち、時空間パターンを目視で調べ、クラスIVと思われるものは19個あった。

パワースペクトルの傾きを昇順にソートして並べたものを図2に示す。これより目視によりクラスIVと判定された19ルールは $-1.58 < \beta < -0.31$ の範囲に入っていることがわかる。そのうち15ルールは $-1.58 < \beta < -0.83$ の範囲に入っており $1/f$ ゆらぎをしているといえる。

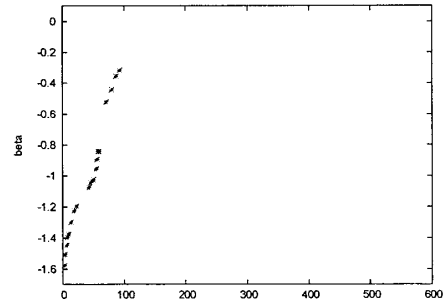


図2: 540個のルールについてパワースペクトルの傾き β の昇順にソートした結果。*はクラスIVと判定したルール。

4 おわりに

本研究ではカオスの縁を検出するために摂動拡大率、時空エントロピー、相互情報量、パワースペクトルの傾きを用いたところ、ECAの場合はパワースペクトルの傾きがもっとも有効であることがわかった。さらに、5近傍の場合、目視によりクラスIVと判定されたルールの多くが $1/f$ ゆらぎをしていることがわかった。この結果は $1/f$ ゆらぎがカオスの縁を検出するための有効な指標となる可能性を示している。今後は、パラメータを変えて追加実験を行い、本手法の有効性をさらに検証する予定である。

5 謝辞

本研究は科研費(20500216)の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] C. G. Langton: Computation at the Edge of Chaos: Phase Transitions and Emergent Computation. *Physica D* **42** (1990) 12-37.
- [2] M. Cook: Universality in Elementary Cellular Automata. *Complex Systems* **15** (2004) 1-40.
- [3] S. Ninagawa: Power Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata. *Complex Systems* **17** (2008) 399-411.