ホモトピー法のパラメータに一次分数変換を適用したホモトピーパスの視覚化

黒坂 翔一 † 鈴木 秀男 ‡
株式会社創夢 † 職業能力開発総合大学校東京校 ‡

1. はじめに

筆者らはこれまで連立代数方程式の近接根分離や重複度計算のための手法を開発してきた．その手法は方程式系に代数的な手法である一次分数変換を適用するものであり，一次分数変換を適用した方程式系を解くことにより，元の方程式系の解を得ている．

その際，実際の計算ではホモトピー法を利用しているが，実は一次分数変換はホモトピー法にも適用され，変換された新しいホモトピーを得ている．

本論文では，一次分数変換を適用した新しいホモトピーを利用して，近接根問題におけるホモトピーパスを視覚化したので報告する．

2. ホモトピー法について

一般にホモトピー法は連立代数方程式の根を統一的に解くことができるが，ここではパスの追跡精度がどの程度変化するかを確認するために一変数の方程式に限定する．

解くべき方程式 $f(x) = 0 (n = \deg f)$ が与えられたとき，次数が同じで根が簡単に求められる方程式を $g(x) = 0$ (例えば $c_1 \in C$ に対し $x^n - c_1 = 0$) とおくと，一次のホモトピーは式 (1) になる．

$$h(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x) \tag{1}$$

本論文では，二次のホモトピーを使用する．$f(x)$ と次数が同じ重み多項式を $p(x)$ とおいたときの二次のホモトピーは

$$h(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x) + (1-t)tp(x) \tag{2}$$

となり，$h(x,0) = 0$ のときの根は $g(x) = 0$ の根と一致し， $h(x,1) = 0$ のときの根は $f(x) = 0$ の根と一致する．

ホモトピー法は，$t = 0$ のときの $h(x,0) = 0$，すなわち $g(x) = 0$ の根を初期値として，パラメータ t を $t = 1$ まで変化させたときに $h(\tilde{x},1) = 0$ を満たせば，$\tilde{x}$ が $f(x) = 0$ の根の近似値を与えるという方法である．

3. 一次分数変換について

ホモトピー法のパラメータ t についての一次分数変換を考える．t は $t \in [0,1]$ で定義されているため，$s = \varphi(t)$ として，$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ を満たし，$\varphi(\infty) = -\delta$ となる一次分数変換を採用する．具体的には，式 (3) のような変換となる．

$$t = \frac{(1+\delta)s}{s+\delta}, s = \frac{\delta t}{1-t+\delta} \tag{3}$$

†Shoichi Kurosaka, SOUM Corporation
‡Hideo Suzuki, Tokyo Institute, Polytechnic University

なお，一次分数変換は座標空間に対しても適用できるが，ここではホモトピー法のパラメータのみの適用とする．

4. ホモトピー法への一次分数変換の適用

ホモトピー法のパラメータ t に一次分数変換を適用したとき，二次のホモトピーは式 (4) のようになる．

$$\begin{aligned} h(x,s,\delta) \quad = \quad & (s+\delta)(1+\delta)sf(x) \\ & +\delta(s+\delta)(1-s)g(x) \\ & +\delta(1+\delta)(1-s)sp(x) \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) から $h(x,s,\delta) = 0$ も一次分数変換適用前のホモトピー $h(x,t) = 0$ と同様に，$s = 0$ のとき $g(x) = 0$ の根と一致し，$s = 1$ のとき $f(x) = 0$ の根と一致している．したがって，式 (4) は，ホモトピーの性質を満たしていることがわかる．

ここで δ は十分小さな正の値とし，値を小さくすればパス追跡の分解能が向上する．

5. 微分方程式の導出と計算手法の概略

5.1 微分方程式の導出

ここでは，式 (4) から微分方程式を導き，ホモトピーパスの弧長に沿って $s = 1$ まで数値計算により微分方程式を解く．

x, s は，弧長 r をパラメータとして，$x(r), t(r)$ と表すことができるので，パス追跡のための微分方程式は，$h(x(r), t(r), \delta) = 0$ の両辺を r で微分した式 (5) となる．

$$\frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial h}{\partial t}\frac{dt}{dr} = 0 \tag{5}$$

ただし，パラメータ r を弧長とするため，式 (6) の条件を満たす必要がある．

$$\left|\frac{dx}{dr}\right|^2 + \left|\frac{dt}{dr}\right|^2 = 1 \tag{6}$$

式 (5) と式 (6) から，弧長に沿った $x(r)$ と $t(r)$ が計算される．

5.2 計算手法の概略

本論文では，計算効率を向上させるため，数式処理と数値計算のハイブリッド計算を用いている．具体的な計算手法の概略は，以下の通りである．

1. 方程式，及び各種パラメータを入力し，数式処理にて一次分数変換を適用した式 (4) ，及び微分方程式を解くための数式を導出する

2. 導出された各種の数式を数値計算用の形式として出力する

3. 数式処理より数値計算用のプログラムを呼び出す

4. $s = 1$ になるまですべてのパスを追跡し，得られた方程式の近似値を数式処理に取り込む

5. 必要に応じて，ホモトピーパスの描画処理を行う

6. 数値例

一次分数変換によるパス追跡の精度向上をみるため，以下のような代数方程式を考える．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{12} + 6.0 \times 10^{-6}x^{10} \\ &\quad +9.3 \times 10^{-11}x^8 + 4.08 \times 10^{-16}x^6 \\ &\quad +1.956 \times 10^{-21}x^4 \\ &\quad +1.536 \times 10^{-27}x^2 + 6.4 \times 10^{-33} \end{aligned} \tag{7}$$

この方程式は，12 個の近接根を持ち，通常の二次のホモトピーでは，パス追跡の精度が不足し，十分な精度を持った近似値が得られない．一方，一次分数変換を適用したホモトピー (4) を使用した場合，パスの終値付近の分解能が向上するため，正確にパスを追跡することができ，結果として十分な精度を持った近似値が得られる．

例えば，式 (7) の根の一つである $0.001+0.001i$ について具体的な数値で確認すると，通常の二次のホモトピーで解いたときは，パスを $1-t = 4.23883 \times 10^{-13}$ まで追跡でき，このときの近似値は $9.15887139975490\times10^{-2}+1.87025693980006\times10^{-3}i$ である．これに対し，一次分数変換を適用したホモトピーを利用した場合は，パスを $1-t = 5.60000\times10^{-49}$ まで追跡でき，このときの近似値は $9.99999998361186\times10^{-4}+9.99999999001952\times10^{-4}i$ となる．

このことは，パスの全体図 1 と近接根付近の拡大図 2 を見てもわかる．図 1 では，パスは直線的に収束しているように見えるが，実は図 2 のように根の周辺でパスの曲率が変わっている．これは一次分数変換を適用したことにより，近接根付近でのパスの振る舞いが正確に把握できるようになったため描画可能となった．

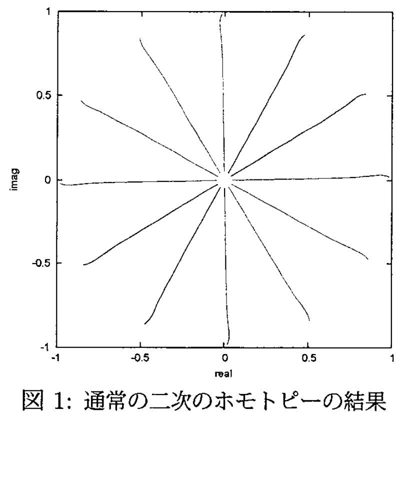

図 1: 通常の二次のホモトピーの結果

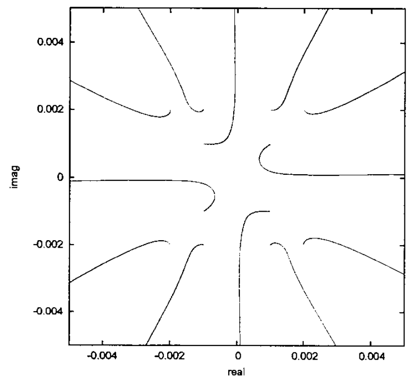

図 2: 一次分数変換を適用した二次のホモトピーの結果

7. おわりに

通常の二次のホモトピーと一次分数変換を適用した二次のホモトピーのそれぞれのグラフを描くことにより，近接根付近での根の振る舞いを視覚的に確認することができた．

今後，多変数や高次の方程式について，ホモトピーパスを視覚化し根の振る舞いを視覚的に確認することを考えている．その際は，計算効率を向上させるために，グリッド化を図る予定である．

参考文献

[1] Hidetsune Kobayashi, Hideo Suzuki, Yoshihiko Sakai: Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations, Mathematics of Computation, Vol.67 No.221, American Mathematical Society, pp.257–270 (1998).

[2] 鈴木秀男，小林英恒：ホモトピー法のパラメータに一次分数変換を適用した近接根の解法について，情報処理学会論文誌，Vol.44, No.12, pp.3112–3122(2003).

[3] 鈴木秀男, 小林英恒: 一次分数変換を利用した近接根の分離方法とその誤差について, 情報処理学会論文誌, Vol.38, No.2, pp.180–191 (1997).

[4] 鈴木秀男, 小林英恒, 三浦正浩: グリッドコンピューティングを用いた連立代数方程式の解法 - 根の振る舞いの解析に向けて - , FIT2004 講演論文集, pp.33–34(2004).

[5] 鈴木秀男, 小林英恒, 三島健稔: ホモトピー法への一次分数変換の適用法について, 情報処理学会第 59 回全国大会, pp.95-96(1999).

[6] Eugene L. Allgower, Kurt Gerg: Numerical Continuation Methods, Springer-Verlag (1990).