

エルミート多項式に基づく任意の確率分布をもつ 不規則信号の発生*

岸 篤史[†], 南原英生[‡]

[†]岡山理科大学大学院 工学研究科 [‡]岡山理科大学 工学部

1. はじめに

様々な要因が複雑に絡み合っ不規則に変動する現実の騒音や振動などの物理現象は、一般に典型的なガウス分布を示すとは限らず、複雑な確率分布形状を示すことが多い。このような非ガウス形不規則信号に対して、その確率密度関数としてガウス分布を初項としたエルミート多項式に基づく直交展開形表現を採用した研究が多くなされている¹⁾⁻³⁾。また、これらの評価理論の検証には、デジタルシミュレーション手法が用いられ、任意の確率分布形状をもつ不規則信号が必要になる。

一方、三角級数モデルを用いることにより任意の周波数スペクトルをもつガウス形不規則信号の発生が可能であることが知られている⁴⁾。本報告では、このエルミート多項式に基づく確率分布表現と三角級数モデルを用いることにより、任意の周波数スペクトルと任意の確率分布形状をもつ不規則信号を発生する手法について検討する。最後に本手法を用いて実際に不規則信号を発生させ、理論値との比較を行うことにより本手法の有効性を確認する。

2. 理論的考察

2.1 ガウス形不規則信号の発生

平均値0の定常確率ガウス過程 $x(t)$ がパワースペクトル密度関数 $S_x(\omega)$ を有するとする。このとき、 $x(t)$ のサンプル信号は次に示す三角級数モデルを用いることにより得られる⁴⁾。

$$x_g(t) = \sum_{k=1}^N a_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \quad (1)$$

ここで、 a_k は平均値0、標準偏差 σ_k のガウス確率変数であり $k = 1, 2, \dots, N$ に対して互いに独立である。また、 ϕ_k は a_k に独立な0から 2π で一様な確率変数で、それ自身が $k = 1, 2, \dots, N$ に対して互いに独立とする。 σ_k は $x(t)$ のパワースペクトル密度関数における $S_x(\omega)$ の正の ω 領域において、上限値 ω_u と下限値 ω_l との間を N 等分し、 $\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N, \omega_k =$

$\omega_l + (k - 1/2)\Delta\omega ; k = 1, 2, \dots, N$ とするとき、

$$\sigma_k^2 = 4S_x(\omega_k)\Delta\omega ; k = 1, 2, \dots, N$$

として与えられる。また、 N は十分に大きな整数とする。

2.2 エルミート多項式を用いた確率密度関数表現

いま、任意の不規則信号 $x(t)$ について考察するとき、その確率密度関数はガウス分布を初項として次のように直交展開表現される⁵⁾。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \times \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} \quad (2)$$

ただし、非ガウス性を反映する展開係数 A_n は

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\langle H_n\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right\rangle \quad (3)$$

で定義され、 μ, σ は任意定数、 $\langle \rangle$ は集合平均を表している。また、 $H_n(x)$ はエルミート多項式を表し、標準ガウス分布を $N_0(x)$ とするとき

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} N_0(x) / N_0(x)$$

で定義される。ここで、特に、 μ, σ としてそれぞれ平均値および標準偏差を採用し、更に $\mu = 0, \sigma = 1$ と正規化条件を導入するなら、(2) 式は次式のように表される。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \left\{1 + \sum_{n=3}^{\infty} A_n H_n(x)\right\} \quad (4)$$

2.3 任意の確率分布をもつ不規則信号への変換

一般に確率変数 η が確率密度関数 $f(x)$ をもつとき、

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f(x) dx \quad (5)$$

の関係で定義される確率変数 ξ は区間 $[0, 1]$ で一様分布する。したがって一様乱数 $\{\xi_i\}$ を発生して

$$\int_{-\infty}^{\eta_i} f(x) dx = \xi_i \quad (6)$$

*Generating of a random signal with an arbitrary probability distribution based on the Hermite polynomial.

[†]Atsushi Kishi and [‡]Hideo Minamihara

[†]Graduate School of Engineering, Okayama University of Science.

[‡]Faculty of Engineering, Okayama University of Science.

を満たす数列 $\{\eta_i\}$ を求めると、 $\{\eta_i\}$ は与えられた確率密度関数 $f(x)$ をもつ乱数列となる⁶⁾。

例えば、狭帯域特性をもつ不規則信号の包絡線やピーク値分布の確率密度関数などでよく用いられるレイリー分布 ($\sigma = 1$ とする) の場合は、その確率密度関数が

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (7)$$

となることから、これに (5) 式を適用し

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}\eta^2}$$

となる。ここで両辺の対数をと η について解くと、

$$\eta = \sqrt{-2\log(\xi)}$$

となる。つまり、一様乱数 $\{\xi_i\}$ を発生して、 $\eta_i = \sqrt{-2\log(\xi_i)}$ に変換することにより、 $\{\eta_i\}$ はレイリー分布をもつ不規則信号となる。

2.4 任意の展開係数をもつ不規則信号の発生

不規則信号 $x(t)$ が非ガウス形の任意分布を示すとき、 $x(t)$ の確率密度関数 $p(x)$ はエルミート多項式に基づいて (4) 式で表されることから、これを (5) 式に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left\{ 1 + \sum_{n=3}^{\infty} A_n H_n(x) \right\} dx = \xi \quad (8)$$

となる。つまり、一様乱数 $\{\xi_i\}$ を発生して上式を用いて $\{\eta_i\}$ に変換することができれば、任意の展開係数をもつ不規則信号の発生が可能になる。しかし、(8) 式において η を与えて ξ を計算することはできるが、任意の ξ に対する η を求めることは不可能である。したがって、あらかじめ様々な η に対する ξ を計算しておき、 ξ が与えられたとき、この ξ を与える最も近い η をすでに計算した中から見つけるという方法を試みる。以上のことから、任意の展開係数をもつ不規則信号は以下の手順で発生することができる。

計算手順

- 1) (1) 式を用いて任意のパワースペクトルを持つガウス形の不規則信号を発生する
- 2) 1) で発生した信号を一様分布をもつ不規則信号 ξ_i に変換する
- 3) 展開係数 A_3, A_4, \dots を与える
- 4) (8) 式より、-5 から 5 まで 0.0001 刻み幅の各 η_i に対する ξ_i を計算する
- 5) $i = 1, 2, \dots, NT$ に対して、2) で求めた ξ_i に対応する η_i を 4) から見つけ、 $x_h(t) (t = i\Delta t)$ とする

3. 実験的考察

本手法の有効性を確認するために、まず、下限角周波数 $\omega_l = 62.83[\text{rad/s}](10\text{Hz})$ 、上限角周波数 $\omega_u = 314.15[\text{rad/s}](50\text{Hz})$ 、 $\Delta t = 0.001[\text{s}]$ 、 $N = 5000$ とし (1) 式を用いてガウス形不規則信号を発生した。次いで、これを本手法を用いて実際に観測した道路交通騒音における展開係数： $A_3 = -0.18, A_4 = 0.03$ をも

つ不規則信号 $x_h(t)$ に変換した。得られた不規則信号から展開係数を計算した結果を表 1 に、確率密度関数とそのパワースペクトルをそれぞれ図 1、図 2 に示す。図より、 $x_h(t)$ は所定の周波数特性と確率密度関数をもつことから本手法の有効性を確認することができる。最後に、理論的な確率密度関数との適合度を調べるために有意水準 $\alpha = 0.05$ で χ^2 検定を行った。その結果、 $X^2 = 38.40 \leq \chi_{28;0.05}^2 = 41.34$ となり、 $x_h(t)$ は展開係数： $A_3 = -0.18, A_4 = 0.03$ をもつ確率過程のサンプル信号であるという仮説が有意水準 $\alpha = 0.05$ で許容される。

表 1：展開係数の比較

展開係数	理論値	実験値
A_3	-0.18	-0.179566
A_4	0.03	0.030767

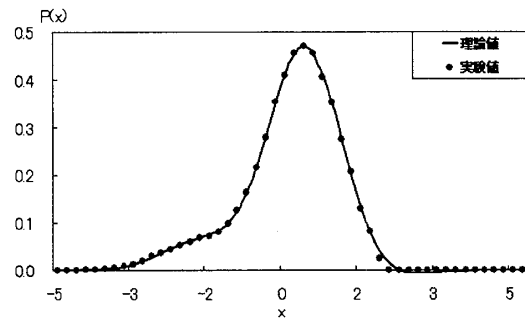


図 1： $x_h(t)$ の確率密度関数

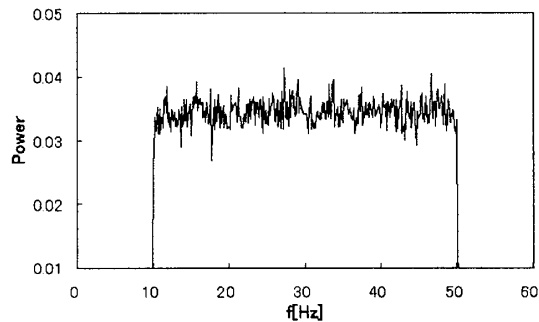


図 2： $x_h(t)$ の周波数スペクトル

参考文献

- 1) H. Minamihara, M. Nishimura, Y. Takakuwa and M. Ohta, J.Sound and Vibration, Vol.141, No.3, 425-434(1990).
- 2) 谷田真, 南原英生: 情報処理学会論文誌, Vol.48, No.5, 2377-2381(2007).
- 3) 中本昌由, 荒木一朗, 南原英生, 雛本孝夫: 情報処理学会論文誌, Vol.42, No.5, 1272-1281(2001).
- 4) 星谷勝: 確率論手法による振動解析, 鹿島出版, P.51(1974).
- 5) 大田光雄: 応用物理, Vol33, No.9, 632-641(1964).
- 6) 津田孝夫: モンテカルロ法とシミュレーション, 培風館, P.51(1977).