

広帯域特性をもつ正領域内不規則変動波の ピーク値分布評価法*

中村大輔[†], 南原英生[‡]

[†]岡山理科大学大学院 工学研究科 [‡]岡山理科大学 工学部

1. はじめに

不規則信号の解析・評価においては統計的手法が不可欠であり、多くの研究が行われてきた。特に、レベル交差やピーク値分布に関する信号処理法は、騒音・振動の統計的評価や地震波、海洋波の分析など、数多くの分野で応用されている^{1),2)}。今までに行われてきたレベル交差やピーク値分布の研究では、対象とする不規則信号が「正負」に変動することを仮定し、典型的なガウス分布もしくはガウス分布を初項とするエルミート展開表現を用いた分布を仮定して解析、実験が行われてきた^{3),4)}。一方で、パワー、騒音・振動のレベル値などその変動域が「正值」のみに限定される不規則信号も存在する。このような場合、従来のガウス分布を仮定したレベル交差評価式やピーク値分布評価式ではなく、「正值」のみ、特に固有の拘束性：「平均値と標準偏差が独立になりえない」に立脚したレベル交差評価式やピーク値分布評価式が必要となる。

このような観点から本報告では、「正值」のみで変動する正領域内不規則信号、特にガンマ分布を仮定した広帯域特性を持つ信号について、あるレベル x を正方向に横切る期待回数とそのレベル以上に存在するピーク数の比率を表す P_u/C を新たに定義する。そして、この P_u/C をもとにレベル交差情報に基づいたピーク値分布評価式の導出を行う。

最後に本手法の有効性および妥当性をデジタルシミュレーションにより確認する。

2. 理論的考察

2.1 狭帯域におけるピーク値分布評価式⁵⁾

いま、考察対象とする不規則信号がガンマ分布に従う場合、信号の瞬時値 $x(t)$ とその微分値 $\dot{x}(t)$ の結合確率密度関数は、瞬時値とその微分値の間の相関を許した形で次式のように表すことができる。

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{x^{m-1}}{s^m} e^{-\frac{x}{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_{\dot{x}}^2}} \quad (1)$$

$$\times \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2(\sigma_{\dot{x}}^2/x)}\right) \quad (1)$$

このとき、単位時間あたりにあるレベル x を正方向に横切る期待回数 $N(x)$ は、式 (1) を用いて次式のように表すことができる⁶⁾。

$$N(x) = \int_0^\infty \dot{x} p(x, \dot{x}) d\dot{x} \\ = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi\mu}} \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{x^{m-\frac{1}{2}}}{s^m} e^{-\frac{x}{s}} \quad (2)$$

また、考察対象とする信号の周波数スペクトルが狭帯域特性を持つ場合、レベル交差回数とそのレベル以上に存在するピーク数は一対一に対応することが知られており⁷⁾、そのピーク値分布評価式は、全ピーク数を表す M_0 と式 (2) を用いることにより次式のように与えられる。

$$p(x) = \frac{x^{m-\frac{3}{2}}}{\mu^{m-\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{s} + m - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{x - \mu_0}{s}\right) \quad (3)$$

2.2 広帯域におけるピーク値分布評価式

まず、帯域パラメータである ε_0 をパワースペクトル密度関数の n 次モーメント m_n を用いて次式のように定義する。

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (4)$$

ここで、あるレベル x を正方向に横切る期待回数とそのレベル以上に存在するピーク数の比率を表す P_u/C について考察する。いま、 P_u/C はレベル x と帯域パラメータの 2 変数関数であることから、これを $\gamma_g(x, \varepsilon_0)$ とおく。このとき、全ピーク数を M_0 、ピーク値の確率密度関数を $p(x, \varepsilon_0)$ とすると、 $\gamma_g(x, \varepsilon_0)$ は次のように表現することができる。

$$P_u/C \equiv \gamma_g(x, \varepsilon_0) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{単位時間あたりにレベル } x \\ \text{以上に存在するピーク数} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \text{単位時間あたりにレベル } x \\ \text{を正の方向に横切る回数} \end{array} \right\}} \\ = \frac{M_0 \times \int_x^\infty p(x, \varepsilon_0) dx}{N(x)} \quad (5)$$

また、 P_u/C は次のような数学的性質を有している必要がある³⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma_g(x, \varepsilon_0) < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma_g(x, \varepsilon_0) = 1, \quad \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \gamma_g(x, \varepsilon_0) = 1$$

*An evaluation method of peak values distribution for random signals fluctuating over the positive region with wide frequency band.

[†]Daisuke Nakamura and [‡]Hideo Minamihara

[†]Graduate School of Engineering, Okayama University of Science.

[‡]Faculty of Engineering, Okayama University of Science.

$\gamma_g(x, \varepsilon_0)$ はレベル x に対して単調減少であることから、 $x \rightarrow \infty$ のとき、つまり、高いレベルにおいては、周波数帯域に関係なくレベル交差回数とピーク数が一対一の対応関係を持っており、 $\gamma_g(x, \varepsilon_0) \rightarrow 1$ となる。また、 $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ つまり、周波数特性が狭帯域のときには、レベル交差回数とピーク数が一対一に対応し、 $\gamma_g(x, \varepsilon_0) \rightarrow 1$ となる。

以上のような条件を満たす関数として、ガウス形不規則信号における Pu/C の形を参考に³⁾、 $\gamma_g(x, \varepsilon_0)$ を次式のように定義する。

$$\gamma_g(x, \varepsilon_0) = \mu_0^{m-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right) G\left(x\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0}}, m\right) + Q\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) \quad (6)$$

ここで、 $G(\alpha, m)$ 、 $Q(\alpha)$ は以下のように与えられる。

$$G(\alpha, m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{y^{m-1}}{s^m} e^{-\frac{y}{s}} dy$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Pu/C が式 (6) のように定義されると、これを用いて広帯域の周波数特性を持つ場合もレベル交差情報に基づいてピーク値分布の評価が可能となることから、ピーク値分布評価式は次式のように定義できる。

$$p_g(x, \varepsilon_0) = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial}{\partial x} \{ \gamma_g(x, \varepsilon_0) N(x) \} \quad (7)$$

式 (7) に式 (2)、(6) を代入することで広帯域特性を持つ正領域内変動波に対応した新たなピーク値分布評価式として、次式を得ることができる。

$$p_g(x, \varepsilon_0) = -\frac{x^{m-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x-\mu_0}{s}\right)}{\mu_0^{m-\frac{1}{2}}} \left[\mu_0^{m-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x-\mu_0}{s}\right) \times \left\{ \left(-\frac{2x}{s} + m - \frac{1}{2}\right) G\left(x\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0}}, m\right) - \frac{1}{\Gamma(m)} \left(\frac{x}{s}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0}}\right)^m \exp\left(-\frac{x}{s}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0}}\right) \right\} + \left(-\frac{x}{s} + m - \frac{1}{2}\right) Q\left(-x\frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0} e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2} e^{\frac{1}{2}x^2} \right] \quad (8)$$

また、式 (8) はスペシャルケースとして周波数帯域が狭帯域の特性を持つ場合には式 (3) と一致することから、理論の範囲内でも本理論の正当性が確認できる。

3. 実験的考察

理論の正当性、妥当性を確認するために、まず広帯域の周波数スペクトルを持つガウス形不規則信号を三角級数モデルを用いて作成した。そして、その信号の 2 乗変換を行うことにより広帯域特性を持つガンマ分布形の不規則信号を発生させてシミュレーション実験を行った。

まず、式 (6) による Pu/C の妥当性を確認するため、式 (5) に式 (8) を代入し、再度 $\gamma_g(x, \varepsilon_0)$ を導出する再評価手法を用いた。その結果を図 1 に示す。図より、再評価を行った結果とほぼ完全に一致していることから、式 (6) の妥当性を確認することができる。

図 2 は、本手法 ($p_g(x, \varepsilon_0)$) と従来法 ($p(x)$) のピーク値分布と実験値との比較を行ったものである。図より、本手法は従来法に比べよく実験値をとらえていることが分かる。また、表 1 は本手法と従来法について実験値との 2 乗平均誤差 (MSE) の比較を行った結果である。この表でも、本手法の誤差が少ないことから、本手法の有効性を確認することができる。

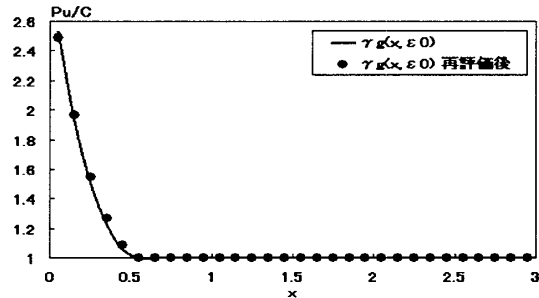


図 1: 正領域内変動波の Pu/C 評価関数

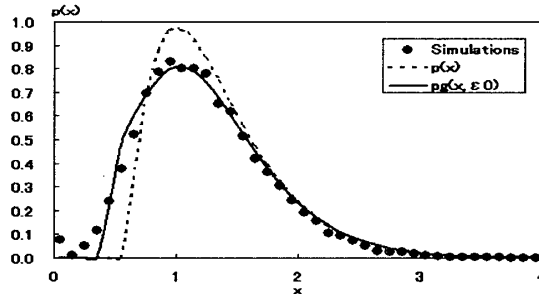


図 2: 正領域内変動波のピーク値分布

表 1: 従来法と本手法の誤差の比較

	MSE
$p(x)$	0.0838
$p_g(x, \varepsilon_0)$	0.0339

参考文献

- 1) Hamilton, J., *Applied Ocean Research*, Vol.15, No.6, pp. 373-380 (1994).
- 2) Gusev, A.A., *Journal of Geophysical Research*, Vol.101, No.B9, pp.20083-20090 (1996).
- 3) 中本, 南原, 太田, 電子情報通信学会誌 (A), Vol. J82-A, No. 3, pp.471-481 (1999).
- 4) 中村, 南原, 情報処理学会論文誌, Vol. 49, No.1, pp.375-380 (2008).
- 5) 南原, 西村, 太田, 電気学会論文誌 C, Vol. 109-C, No. 8, pp.601-606 (1989).
- 6) Rice, S.O., *Bell System Tech. J.*, Vol.23, pp.282-332 (1944).
- 7) Powell, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 30, No. 12, pp. 1130-1135 (1958).