

# 時間シフトの性質を利用した FFT アルゴリズム

山本 広樹<sup>†</sup> 辻本 裕希<sup>‡</sup>

近畿大高専<sup>†</sup> 近畿大高専(専攻科)<sup>‡</sup>

## 1. はじめに

高速フーリエ変換(FFT)のアルゴリズムには、バタフライ演算により計算量を減らす Cooley-Tukey 法を始め、Prime Factor 法、Split-Radix 法など様々な内容のものが提案され、実用に供されている。各アルゴリズムには一長一短があるが、いずれも小規模な汎用マイクロコントローラに対する実装に向いているとは言い難い。

一方、我々はフーリエ変換の時間シフトの性質を利用した逐次更新型の FFT アルゴリズムを考案した。このアルゴリズムは計算処理が簡単であり、低コストで小規模なワンチップマイクロコントローラなどの組み込み向けプロセッサにも容易に実装できると考えられる。

しかしながら、直前のフーリエ係数値を使用して新しい係数値を算出する方式であるため、有限精度のデータ表現と演算では、計算誤差の伝播と蓄積が問題となる。

そこで、この時間シフトの性質を利用した逐次更新型 FFT アルゴリズムについて、その計算原理について述べるとともに、具体的仕様の想定下、実計測データを用いた計算実験により、その実効性について検討を行った。

## 2. 計算アルゴリズム

フーリエ係数の時間シフトに関する性質と線形性を用いると、離散フーリエ変換の計算は次のように高速化できる。

### 2.1 離散フーリエ変換とその性質

変換前のデータを  $f_n$ 、変換処理を行うデータ窓幅を  $N$ 、 $k$  番目の複素フーリエ係数値を  $F_k$  とすると、離散フーリエ変換の計算は次式で表される。 $(f_n, F_k)$  は複素数値、以下同様)

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi \frac{nk}{N} j} \quad (1)$$

この式に従い全ての  $k:0 \sim N-1$  について係数を求めるには、 $O(N^2)$  回の掛け算を必要とする。

ところで、窓内のデータを全て 1 だけ位置を

ずらし、窓外へはみ出した最後のデータをデータ列の先頭へ戻したときの離散フーリエ係数値  $F'_k$  を考えると、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} F'_k &= \frac{1}{N} \left( f_0 e^{-2\pi \frac{(n-1)k}{N} j} + \sum_{n=0}^{N-2} f_{n+1} e^{-2\pi \frac{nk}{N} j} \right) \\ &= e^{2\pi \frac{k}{N} j} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi \frac{nk}{N} j} = e^{2\pi \frac{k}{N} j} F_k \end{aligned} \quad (2)$$

これは、窓外にも窓内のデータと同じデータが無限に繰り返し並んでいるとみなしたときに、1 時刻後の離散フーリエ係数値を計算することを意味しており、複素フーリエ変換における「時間シフトの性質」に相当する。

### 2.2 提案アルゴリズム

ある時刻におけるデータ窓内のデータ列を  $f_n$ 、 $k$  番目の離散フーリエ係数値を  $F_{ok}$  とする。次の時刻におけるデータ窓内のデータ列  $f'_n$  は、「窓外にも  $f_n$  が繰り返し無限に並んでいるとみなしたデータを時間シフトしたデータ列  $f_{shift}$ 」と、「新たに窓内へ入ってくるデータを  $f_i$ 、データ窓から外れるデータを  $f_o$  としたとき、列の最新の要素を  $f_i - f_o$  とし残りの要素を 0 としたインパルスデータ列  $f_{impulse}$ 」との和として表すことができる。すなわち、次のようになる。

$$f'_n = f_{shift} + f_{impulse} \quad (3)$$

ここで、インパルスデータ列  $f_{impulse}$  の離散フーリエ変換値  $F_{impulse}$  は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} F_{impulse} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{impulse} e^{-2\pi \frac{nk}{N} j} \\ &= \frac{1}{N} e^{-2\pi \frac{(N-1)k}{N} j} (f_i - f_o) \\ &= e^{2\pi \frac{k}{N} j} \frac{f_i - f_o}{N} \end{aligned} \quad (4)$$

最新要素を除き、データ値が 0 であるため、積和計算が解消されている。また、前節よりデータ列  $f_{shift}$  の  $k$  番目の離散フーリエ係数値  $F_{shift}$  は、次のように書ける。

$$F_{shift} = e^{2\pi \frac{k}{N} j} F_{ok} \quad (5)$$

A FFT Algorithm based on Time Shift Property

<sup>†</sup>Hiroki YAMAMOTO, Kinki Univ. Tech. College

<sup>‡</sup>Hiroki TSUJIMOTO, Kinki Univ. Tech. College (Student)

従って、次の時刻における離散フーリエ係数値  $F_{1k}$  は、「フーリエ変換の線形性」より、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1k} &= \mathbf{F}_{shift} + \mathbf{F}_{impulse} \\ &= e^{2\pi \frac{k}{N} j} \mathbf{F}_{0k} + e^{2\pi \frac{k}{N} j} \frac{f_i - f_o}{N} \\ &= e^{2\pi \frac{k}{N} j} \left( \mathbf{F}_{0k} + \frac{f_i - f_o}{N} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。この計算を繰り返し行うことにより、直前の係数値を基に、逐次新たな離散フーリエ係数値を求めることが可能である。

なお、本アルゴリズムは、計算開始時に初期係数値を必要とするが、データ窓内のデータが最初に全て 0 であれば、係数値を 0 として開始できる。さらに、データ窓幅分過去のデータである  $f_o$  については、データ保持用のバッファメモリを設けなくとも、直前の離散フーリエ係数値を基に逆フーリエ変換により合成することができる。

### 2.3 特徴と検討すべき問題点

本アルゴリズムによる計算量は  $O(4N)$  である。しかしながら、直前の係数値を繰り返し使用するため、データ表現と計算の精度が低く制限される応用では、計測値の誤差、丸め誤差が伝播・蓄積し、正しい値が得られない恐れがある。

## 3. 計算実験

本アルゴリズムによるスペクトル解析処理の汎用ワンチップマイクロコントローラに対する実装を想定し、加速度実測データ例を基に、C 言語プログラムによる仮想的データ処理を行い、計算結果の信頼性と安定性について検証した。

### 3.1 想定仕様

解析する最高周波数を 160Hz、分解能は 10Hz とした。実装を想定したワンチップマイクロコントローラは Microchip 社の PIC16F87X<sup>1)</sup> である。

そこで、処理対象となる実計測データのフォーマットを標準化周波数  $f_s=320\text{Hz}$ 、AD 変換精度 10bits とし、計測データ及びフーリエ係数値を 16bit 符号付固定小数点データ (表現数値範囲約  $\pm 2.0$ ) により表現して演算処理を行った。なお、割り算を算術シフト演算のみで実現することに配慮し、データ窓幅は  $N=32$  とした。

### 3.2 実計測データ

出力軸へ偏芯錘を取付けた小型 DC モーターの加速度計測データを用いた。計測には OROS 社の OR30 を使用し、加速度データの記録と比較評価用の FFT 分析を行った。各電圧における加速度計測データは、 $\pm 1$  の値の範囲へ正規化した後、

計測データ自体のダイナミックレンジを調整し、計算シミュレーション用実測データとした。ダイナミックレンジは  $\pm 1$  の数値範囲に対し、100% から 1% の範囲で計算実験用データを作成した。

### 3.3 計算結果と考察

Fig.1 に処理結果の例を示す。

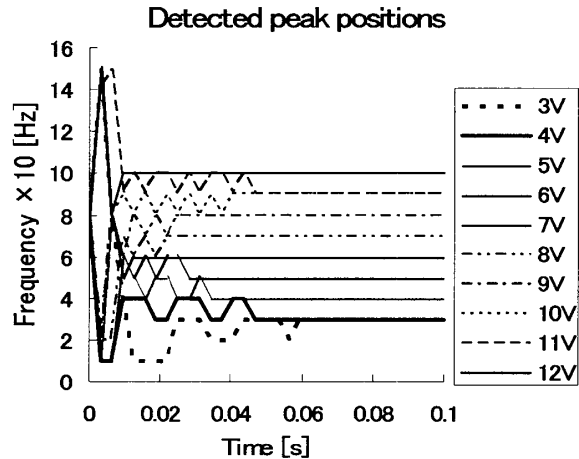


Fig.1 Results of the data at 10% amplitude.

振動の振幅値がデータ表現 (固定小数点) のダイナミックレンジの 10% 以上の場合は、いずれも処理開始より約 0.06 秒 (窓幅の約 60%) 後には安定し、その後、計測データの終わり (20 秒間) まで一定の値を示した。1% の場合には、0.06 秒を過ぎた後も隣の周波数値と揺らぐ状態が一部に観察されたが、検証用の解析結果から、周波数の分解能の閾値に近い周波数値の場合であった。今回の検証データでは、処理結果は安定しており、計算誤差の伝播・蓄積による悪影響は観察されなかった。

## 4. おわりに

時間シフトの性質を利用した逐次更新型 FFT アルゴリズムの計算原理について述べるとともに、モーターの実測振動加速度データを基に、実装を想定した実効性の検討を行った。

処理データを標準化周波数 320Hz、符号付 16bit 固定小数点データとして、データ処理を行ったところ、計算実験では約 20 秒間安定して変換処理が行えることが確認された。計測データは実数値の時系列データであるため、演算処理に工夫を加えたところ、ワークメモリ 16bit  $\times$  45 +  $\alpha$  程度、AD 変換精度 10bit の処理で実効的な動作を実現できた。よって小規模汎用ワンチップマイコンとの親和性は高いものと考えられた。

## 5. 参考文献

1) PIC16F87X Data Sheet: MicrochipTechnology inc. (2001)