ウェーブレット変換による行列の前処理

山中 英樹　野寺 隆
慶應義塾大学理工学部

1 はじめに

理工学の分野では，有限要素法などの計算力学的な手段により大規模な連立 1 次方程式の問題を数値的に解析し，その特性を予測することは極めて重要なことである．通常，行列の前処理 [7, pp. 102-103], [6] は，GMRES 法 [8, 7] のような反復法と共に用いられ，大型で疎な連立 1 次方程式

$$Ax = b. \tag{1}$$

の近似解を求めるための手法として使われる．

行列の前処理の構成法の 1 つにウェーブレット変換を利用するものがある [1, 3, 4, 2]. すなわち，ウェーブレット変換による前処理行列の構成は，ウェーブレット変換により前処理行列を左右から圧縮し，finger-pattern にすることである．そのような変換をすることで，計算速度を向上させ，並列化も可能となる．本発表では finger-pattern に変換した前処理行列に対し，フロベニウスノルムを最小にする近似逆行列を構成する手法について述べる．最後に数値実験を行った結果を示し，提案技法の有効性を評価する．

2 行列の前処理

行列の前処理には不完全行列分解や近似逆行列を利用するものがある [5]. 本発表では，近似逆行列による前処理を考える．前処理には基本的に右前処理と左前処理がある．

$$AMy = b, \quad x = My, \tag{2}$$

$$MAx = Mb. \tag{3}$$

ただし，M は前処理行列と呼ばれる．右前処理 (2) は左前処理 (3) より複雑に見えるが，連立 1 次方程式 (1) を解き，そこで，得られた解 y を $My = x$ に代入することによって，簡単に近似解 x を計算できる．また，左前処理の場合，式 (1) の両辺に行列 M を掛けることになり，擬似的な残差ノルムを計算することになる．しかし，右前処理 (2) の場合には，通常の残差ノルムを計算することになるのでよく使われる．通常，前処理行列 M は，行列 A の近似逆行列である．

$$M \approx A^{-1}.$$

3 ウェーブレット変換

一般に，$n = 2^N$ であるが，本節では $n = s^N p$ とする．さらに，$h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}$ と $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ をそれぞれ変換のハイパスフィルター係数，ローパスフィルター係数とする．また，level L で離散化した x のウェーブレット変換を $\tilde{x} = (s^L, d^L, d^{L-1}, \ldots, d^1)$ とする [4].

$$s^0 = 0,$$

$$s_j^k = \sum_{l=0}^{m-1} h_l s^{k-1}_{<l+sj-1>_{n/2^{k-1}}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n/2^k,$$

$$d_j^k = \sum_{l=0}^{m-1} g_l s^{k-1}_{<l+2j-1>_{n/2^{k-1}}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n/2^k.$$

ここで，s_j^k の方程式を変形すると次式のようになる．

$$s^k = U_k s^{k-1},$$

$$U_k = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{m-1} & & \\ & & h_1 & h_2 & \cdots & h_{m-1} & \\ & & & & \vdots & & \\ h_2 & \cdots & h_{m-1} & & & h_0 & h_1 \end{bmatrix}.$$

同様に，d_j^k を変形すると次式のようになる．

$$d^k = V_k s^{k-1},$$

$$V_k = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & & \\ & & g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & \\ & & & & \vdots & & \\ g_2 & \cdots & g_{m-1} & & & g_0 & g_1 \end{bmatrix}.$$

ただし，U_k, V_k はそれぞれ $n/2^k \times n/2^{k-1}$ の行列である．例えば $m = 4$，1×2 の N 行列のとき，次式のようになる．

$$U_N = [h_0 + h_2 \quad h_1 + h_3],$$

$$V_N = [g_0 + g_2 \quad g_1 + g_3].$$

Note on Wavelet Approximate Inverse Preconditioner
Hideki Yamanaka and Takashi Nodera
Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223-0062

1.	Compute $\tilde{A}W^TAW, \tilde{b} = W^Tb$
2.	Compute $\tilde{M}$
3.	Solve $\tilde{A}\tilde{M}\tilde{y} = \tilde{b}$
4.	Compute $x = W\tilde{M}\tilde{y}$

図 1: ウェーブレット変換による算法

また，level L で離散化したウェーブレット変換は，次式のようになる．

$$\tilde{x} = W^Tx = W_L^TW_{L-1}^T \cdots W_1^Tx.$$

ただし，

$$W_k^T = \left[\begin{array}{c|c} U_k & 0 \\ V_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-n/2^{k-1}} \end{array}\right].$$

4 ウェーブレット変換を用いた解法

3 節で示したウェーブレット変換行列 W を用いて連立 1 次方程式 (1) を変形する．$\tilde{A} = W^TAW$, $\tilde{x} = W^Tx$, $\tilde{b} = W^Tb$ とすると，次式のようになる．

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}. \tag{4}$$

さらに，$\tilde{A^{-1}} = W^TA^{-1}W = (W^TAW)^{-1} = \tilde{A}^{-1}$ となるので，$\tilde{M}$ は $\tilde{A}$ の近似逆行列になる．この算法をまとめると図 1 のようになる．$\tilde{M}$ を求めるためにウェーブレット変換行列を W とすると，$\tilde{A} = W^TAW$ のように A を両辺からウェーブレット変換行列 W で圧縮することにより，$\tilde{A}$ が求められる．これにより，finger-pattern を構成できる．一般に，A の近似逆行列 M を求めるには $||AM - I||_F$ というフロベニウスノルムを最小化することになるので，AM を $\tilde{A}\tilde{M}$ に入れ替えることで，次式が得られる．

$$||\tilde{A}\tilde{M} - I||_F. \tag{5}$$

これを MR (Minimum Residual) 法 [5] で最小化することにより，$\tilde{M}$ が求まることになる．

5 修正ウェーブレット変換による前処理行列

前節では一般のウェーブレット変換を用いて前処理行列を求めたが，本節ではウェーブレット変換を修正した前処理行列を考える [4].

$$\begin{aligned} ||\tilde{A}\tilde{M} - I||_F &= ||W^TAWW^TMW - I||_F, \\ &= ||W^TAMW - I||_F, \\ &= ||WW^TAMW - W||_F, \\ &= ||A\hat{M} - W||_F. \end{aligned}$$

1.	Compute $\hat{M}$
2.	Solve $W^TA\hat{M}\tilde{y} = W^Tb$
3.	Compute $x = \hat{M}\tilde{y}$

図 2: 修正ウェーブレット変換による算法

この算法をまとめると，図 2 のようになる．また，$\tilde{M}$ と $\hat{M}$ は，$\tilde{M} = W^TMW$,$\hat{M} = MW = W\tilde{M}$ となる．4 節で $\tilde{M}$ を求めた方法と同様に

$$||A\hat{M} - W||_F.$$

を MR 法で最小化することで $\hat{M}$ 求めることができる．この計算量は，$||\tilde{A}\tilde{M} - I||_F$ の計算量より少なくなる．それにより従来のウェーブレット変換による前処理に比べて計算量が減少し，計算速度が向上すると考えられる．

6 まとめ

本発表では，ウェーブレット変換を利用した前処理について述べた．この手法は前処理行列の構成を簡単にできる．この算法の数値実験とその評価は，当日発表する．

参考文献

[1] T. F. Chan, W. P. Tang, and W. L. Wan, "Wavelet sparse approximate inverse preconditioners," *BIT*, Vol. 37 (1997), pp. 644–660.

[2] A. Cohen and R. Masson, "Wavelet method for second-order elliptic problems, preconditioning, and adaptivity," *SIAM J. Sci. Comput*, Vol. 21 (2000), pp. 1006–1026.

[3] I. Daubechies, "Orthonormal base of compactly supported wavelets," *Comm. Pure Appl. Math.*, XLI (1998), pp. 909–996.

[4] S. C. Hawkins and K. Chen, "An implicit waveret sparse approximate inverse preconditioner," *SIAM J. Sci., Comput.*,Vol. 27 (2005), pp. 667–686.

[5] T. Huckel, "Efficient computation of sparse approximate Inverse," *Numer. Linear Algebra Appl.*, Vol. 5 (1998), pp. 57–71.

[6] K. Moriya and T. Nodera, "A new scheme of computing the approximate inverse preconditioner for the reduced linear systems," *J. of Comp. and Appl. Math.*, Vol. 199, pp. 345–352, 2007.

[7] Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems," PSW Publishing Co., Boston (1966).

[8] Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 7 (1986), pp. 856–869.