1G－6

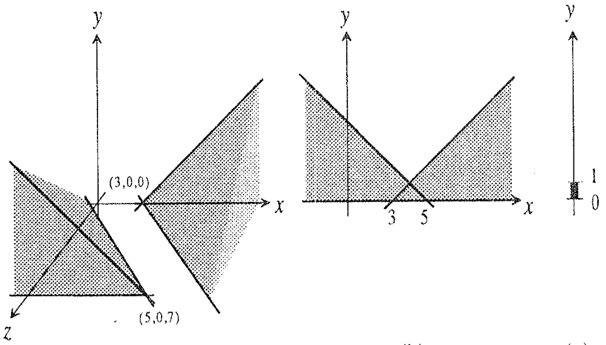
有理数プレスブルガー文真偽判定のための多面体分割を用いたアルゴリズムとその実装

柴田 直樹　岡野 浩三　谷口 健一
大阪大学 大学院基礎工学研究科 情報数理系専攻

1 まえがき

加算を持つ有理数の理論 (有理数変数, 有理数定数,+,−,=,<,∧,∨,∀,∃からなる理論) の上の冠頭形の閉論理式 (PRP 文と呼ぶ) の真偽判定ルーチンはプロトコルのテスト, ハードウェアのタイミング検証などに利用される [1]. 著者らは以前, 文献 [2] で解説されているアルゴリズムより高速な, 時間計算量が $r\alpha^{\beta d}n^{\gamma d(b+1)^a}$($n$ は入力の式に含まれる不等式の個数, d は変数の個数, a は限定子交替数, b は同じ限定子が続く最大の個数, rは入力の式の各係数と定数の分母, 分子のビット数,α,β,γ は定数) の計算幾何学の手法を利用した PRP 文真偽判定アルゴリズムを提案した [3]. 本稿では, 筆者らが提案したアルゴリズムの多面体分割を用いた高速化法と, その評価について述べる.

2 基本アルゴリズムの概略



(a)　(b)　(c)

図 1 アルゴリズムの適用によって変化していくアレンジメント

3 次元の場合を例に述べる. 平面で空間を平面の一方, もう一方, そして平面に含まれる空間の 3 つに分割することを考える. 平面の集合 Hにより空間は, 点, 両端を含まない線分, 外周を含まない多角形, 外面を含まない多面体に分割される. こうして分割されたそれぞれの部分をフェイスと呼び, 空間全てが分割されてできたフェイス全ての集合を Hのアレンジメントと呼ぶ.

入力の PRP 文を $F = \exists y \forall x \exists z\{y \geq 0 \wedge [(z \geq 0 \wedge x - y - z \geq 3) \vee (z \leq 7 \wedge x + y - z \leq -2)]\}$ とする. Fの母式 Eが真になる領域は図 1(a) の灰色の部分である. E中の各不等式に相当する平面で 3 次元空間を分割してできるアレンジメント Aの, 各フェイスに真偽値を割り当てたもので, この領域を表す. 真偽値の割り当ては, 各フェイス fに, fに含まれる任意の点の座標を母式に代入して得られる真偽値を割り当てることで行う. 次に Fの最も内側の変数 zを消去する操作を行う.

これは Eを真にする zが存在する x, yの値の領域を xy平面上に図示する操作である. これによって得られた図が図 1(b) である. 投影を作る操作は図 1(a) 中の直線の xy平面への投影 (直線) 全ての集合から 2 次元のアレンジメントを作り, 図 1(a) の真になる部分の影に含まれるフェイスにのみ真を割り当てることで行う.

次に, 内側から 2 番目の変数 x を消去する. ∃ で束縛された変数を消去する操作が, 真になる領域に座標軸に並行な光を当ててできる影を真とする領域であるのに対し, ∀ で束縛された変数を消去する操作は, 偽になる領域に座標軸に並行な光を当ててできる影を偽とする領域である (図 1(b)).

残った $\exists y$を zと同じように消去し,0 次元の真偽が割り当てられたアレンジメントを得る. これは真が割り当てられた 1 つの頂点からなる. したがって, 式全体は真と判定される.

3 多面体分割を用いた高速化

以降, 上記のアルゴリズムに対する実装上の高速化法について述べる. 高速化の工夫は次の 3 点からなる [5]. 1. 凹多面体のフェイスを扱えるようにすることで, 処理するフェイスの数を減らす. 2. フェイスの投影から直接アレンジメントを作ることで真偽判定に必要ないフェイスを処理する手間を減らす. 3. 投影のアレンジメントを作る際のフェイスの交差判定の回数を減らす.

3.1 凹多面体のフェイスを扱えるようにする

真偽判定の処理の中で, フェイスの数が計算オーダの中で最も大きな影響力を持つ. 真と偽の領域の境界が表現できれば, たくさんのフェイスを扱わなくとも真偽判定は可能である. そこで, 隣り合っている, 同じ真偽値が割り当てられたフェイスを併合する. 併合した結果, 凹多面体のフェイスができるが, これもアルゴリズム中で扱えるようにする.

凹多面体分割処理は次のようにして行う：与えられた 2 つのフェイスを f, gとする. 頂点は自明な方法で求まる. 0 次元のフェイスから n 次元のフェイスまでが求まっているとき, それらのフェイスが f, gの外側のフェイスか, f, gに含まれているか等の条件で分類し, これらの条件を元に隣り合った n 次元のフェイスを辿っていき, 各 $n+1$ 次元のフェイスの境界を確定する. この際, 各頂点の座標は必要十分な精度の多倍長の有理数で表現・計算している.

A decision algorithm for Rational Presburger Sentences and its implementation using division routine of polyhedra .
Naoki Shibata, Kozo Okano, Teruo Higashino and Kenichi Taniguchi
Division of Informatics and Mathematical Science, Osaka University
Toyonaka-shi, Osaka 560-8531, Japan

3.2 フェイスの投影から直接アレンジメントを作る

高速化を行う前のアルゴリズムでは，投影を取る前のアレンジメントを構成する辺の投影全ての集合を求め，それらから投影のアレンジメントを作っていた．この方法では辺の集合からアレンジメントを構成し直すので，時間がかかってしまう．高速化を行ったアルゴリズムでは，投影を取る前のアレンジメントの持つ情報をできるだけ活かして投影の処理を行う．具体的には，まず投影を取る前のアレンジメントの各フェイスの投影の集合を求める (図 2(a))．この状態ではフェイス同士が重なっているので，重なりあったフェイスを分割して重ならないようにする．これは，アレンジメント中の 2 つのフェイス (図 2(a) の斜線のフェイス) に注目し，図 2(b) のように分割する．

全てのフェイスの組合わせに対し分割を行うと，図 2(c) のようになる．その後，同じ真偽値を持つフェイス (図 2(c) の濃い色のフェイス) を併合すると，図 2(d) のようになる．

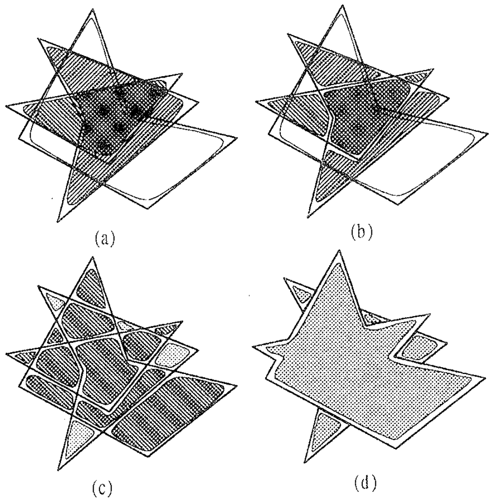


図 2 フェイス同士の重なりがなくなるようにする過程

3.3 フェイスの交差判定回数の削減

上で述べた高速化を行う上で，フェイス同士が重なっているか調べる処理を，全ての 2 つのフェイスの組合わせの数だけ行う必要が生じる．この回数をなるべく減らすために次のような高速化を行う．空間を 1 つの超平面の片側 (上側) ともう一方 (下側) の 2 つに分割し，それぞれのフェイスに対し「上側にのみ交わる[1]」,「下側にのみ交わる」,「上側と下側の両方に交わる」のいずれであるかあらかじめ調べておく．上側にのみ交わるフェイスと下側にのみ交わるフェイスは交差しないので，これらのフェイス同士の交差判定は省略できる．空間をさらに細かく分割することで，最良の場合フェイス同士の交差判定の回数はフェイスの数 n に対して $O(n \log n)$ 程度にまで少なくできる．また，最悪の場合でもフェイス同士の交差判定の回数は変わらない [5]．

[1]正確には上側の部分空間とのみ共有点を持つ．

4 評価実験と考察

3で述べた高速化の工夫を行った判定ルーチンと行ってないルーチンを実装し，評価実験を行った．

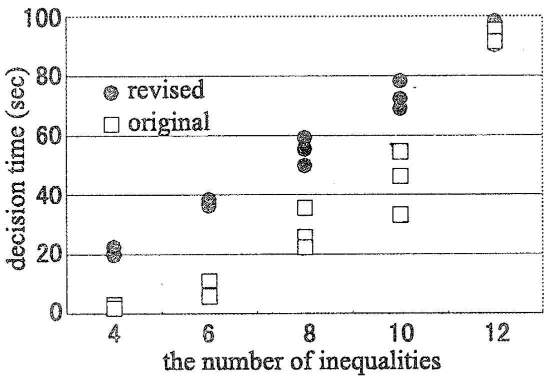


図 3 高速化を行う場合と行わない場合の判定時間

入力式に含まれる変数が 2 つの場合に，不等式の数を 4 から 12 まで変化させて測定した判定時間を図 3に示す[2]．不等式の数の増加に対する判定時間の増加が高速化を行ったアルゴリズムのほうが小さいことから，不等式の数が 12 を越える場合に高速化を行ったルーチンのほうが速く測定できると思われる．

5 あとがき

本稿では著者らが以前提案した PRP 文真偽判定アルゴリズムに対する高速化手法とその評価について述べた．

今後の課題として，今回提案した手法を使った真偽判定ルーチンの判定時間についてさらに詳しく調べ，ルーチンを実用的な例題に適用し，評価を行うことなどが挙げられる．

参考文献

[1] 東野輝夫，北道淳司，谷口健一：“整数上の線形制約の処理と応用”，コンピュータソフトウェア，Vol.9, 6, 31-39 (1992).

[2] Hopcroft, J.E. and Ullmann, J.D.: “Introduction to Automata Theory, Languages and Computation,” Addison-Wesley,(1979).

[3] 柴田直樹，岡野浩三，東野輝夫，谷口健一：“冠頭標準形有理数プレスブルガー文の真偽判定アルゴリズムの提案”，信学会論文誌 Vol. J82-D-I 6 pp.691-700 (1999).

[4] Edelsbrunner, H.: “Algorithms in Combinatorial Geometry,” Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1987).

[5] 柴田直樹，岡野浩三，東野輝夫，谷口健一：“組合わせ幾何を用いた有理数プレスブルガー文真偽判定アルゴリズムにおける投影操作の高速化”，第 57 回情処全大予稿集 3C−08 (1998).

[2]各係数をランダムな数として，3 回ずつ測定した．式の形は，不等式全てを論理積で結合したものである．論理和が入るものについては現状では全て論理積の場合よりも遅くなるが，判定時間の増加傾向は全て論理積の場合と変わらなく，不等式の数が多くなれば高速化を行ったアルゴリズムのほうが速くなると思われる．また，高速化を行った判定ルーチンは実装途中であり，さらなる高速化が期待できる．