ある制限されたチャイニーズ・ポストマン問題の計算量

遠 山 宏 明† 足 立 暁 生†

混合グラフのもとでのチャイニーズ・ポストマン問題（CPP）はNP完全であることが示されている．すべての辺の長さが等しい混合グラフ，平面混合グラフ，最大次数を3に制限した混合グラフのもとでさえNP完全である．一方，グラフを全有向，または全無向に制限したCPPは多項式時間アルゴリズムを持つ．本論文では，各辺の通行回数をたかだか2回に制限したCPP（2-CPP）がNP完全であり，ちょうど1回に制限したCPP（1-CPP）はPに属することを示した．また，CPPに関連する2つの興味ある関数の計算量も示した：(i) 2-CPPにおいて，配達路の数を計算する関数は#P完全である，(ii) CPPにおいて，コストk以下で配達するためには，同一辺を少なくとも何回通行しなければならないかを計算する関数は多項式時間階層のクラスΔ_2^pに属する．

Complexity of a Restricted Chinese Postman Problem

HIROAKI TOHYAMA† and AKEO ADACHI†

The Chinese Postman Problem (CPP) on the mixed graphs is shown to be **NP**-complete. It remains **NP**-complete even if restricted to those whose edges all have equal length, or to the one on the mixed planner graphs, or to the one on the mixed graphs with nodes of degree three. CPP can be solved in polynomial time if the graph is either directed or undirected. In this paper, we show that even if the number of traverses for each edge is restricted to at most twice, CPP on the mixed graphs (called 2-CPP) is **NP**-complete, and if the number of traverses for each edge is restricted to exactly once, CPP on the mixed graphs (called 1-CPP) is in **P**. We also show complexity of two related functions: (i) in 2-CPP the function that calculates the number of delivery paths is #**P**-complete, on the other hand, (ii) in CPP the function that calculates the minimum of the maximum traverse numbers for each delivery path of cost k or less belongs to the class Δ_2^p in the polynomial time hierarchy.

1. まえがき

チャイニーズ・ポストマン問題とは，郵便配達員が手紙を配達するときにできるだけ短い距離を歩いて出発点に戻る道を求める問題である．配達員は担当区域内の各道路を少なくとも1回は通らなければならず，また，同じ道路を何度も通らないようにすることが望まれる．“コストk以下”という制限を科せられることもある．

チャイニーズ・ポストマン問題は管梅谷（Mei-Ko, K.）によって議論された問題であり[5]，オイラー閉路問題の一般化と考えられる．混合グラフの上でのチャイニーズ・ポストマン問題（CPP）はNP完全であることがPapadimitriouによって示されている[6]．すなわち，混合グラフ$G=(V,E,A)$，距離関数$d: E\cup A \rightarrow \mathbf{N}$，および定数$k \in \mathbf{N}$が与えられたとき，$G$が$k$以下の配達路を持つか否かを決定する問題はNP完全である．

Papadimitriouはさらに，辺の長さが一定である混合グラフ，平面混合グラフ，および次数3の混合グラフに対するCPPもNP完全であることを示している[6]．しかし，グラフを有向グラフに制限すればCPPは$O(n^5)$時間[1),4),6]で，無向グラフに制限すれば$O(n^3)$で解くことができる[2),6]（nは頂点数）．

ある問題の計算量が，その問題への制限の付け方によってどのように変化するかを見ることは興味あることである．本論文では，各辺の通行回数を“たかだか2回”に制限しても混合グラフの上のCPPは依然としてNP完全であり，“ちょうど1回”に制限すると，CPPは多項式時間で計算できることを示す．

NP完全な決定問題に対応する数え上げ問題がもとの問題より易しくないことは明らかである．Valiantはいくつかの NP完全問題に対応する数え上げ問題を研究し，それらがNPより難しいクラスに属することを証明した[7),8]．実際，彼の定義した#P完全問題

† 東京電機大学理工学部
Faculty of Science and Engineering, Tokyo Denki University

は，**P=NP** を仮定したとしても手に負えない問題である．たとえば，ハミルトン閉路問題に対応する数え上げ問題，すなわち，与えられたグラフが何個のハミルトン閉路を含むかを求める問題は，**#P** 完全である．現在のところ，**NP** 完全問題に対応する数え上げ問題で，**NP** に属するものは報告されていない．本論文では，2 つの配達路において，各辺の通行回数がすべて同一であるならば，それらは同一の配達路であると見なしたとしても，2-CPP における配達路の数を決定する問題は **#P** 完全であることを示す．ただし，通行回数が同一であるとは，2 つの配達路において，すべての辺 (u,v) は u から v への通行回数が等しく，かつ v から u への通行回数が等しいときをいう．

さらに，与えられた G と k に対して，コスト k 以下で配達地域をすべて回るためには同一の辺を少なくとも何回通らなければならないかを決定する問題は，多項式時間階層のクラス Δ_2^p に属することを示す．

2. 準　　備

定義 1　混合グラフとは $G=(V,E,A)$ のことである．ここで，V は頂点の有限集合，$E \subseteq \{\{u,v\}|u,v \in V\}$ は無向辺の集合，$A \subseteq V \times V$ は有向辺の集合である．今後，無向辺 $\{u,v\}$ は有向辺と同様 (u,v) と書くものとし，単に辺という場合は，無向辺または有向辺を示すものとする．

定義 2　$G=(V,E,A)$ を混合グラフとする．G 上の頂点 v_1 から v_m への道 P とは，次のような G の辺からなる列をいう：

$$(v_1,v_2),(v_2,v_3),\cdots,(v_{m-1},v_m).$$

また，道 P が閉路であるとは，$v_1=v_m$ のときをいう．道 P における辺 (u,v) の通行回数とは，P に含まれる (u,v) の数とする（ただし，(u,v) が無向辺の場合は，(v,u) の数も含むものとする）．道 P の最大通行回数 C_P を次のように定義する：

$$C_P = \mathrm{MAX}(\{l_e | l_e \text{は道 } P \text{における } e \in E \cup A \text{ の通行回数}\}).$$

定義 3　混合グラフ $G=(V,E,A)$ が連結であるとは，G 上の任意の異なる 2 点 u,v 間に u から v への道と v から u への道がともに存在するときをいう．

定義 4　$G=(V,E,A)$ を連結な混合グラフ，$d: E \cup A \to \mathbf{N}$ を距離関数とする．道 P が G の配達路であるとは，P が G のすべての辺を少なくとも 1 回含むような G の閉路であるときをいう．配達路 P のコスト c を次のように定義する：

$$c = \sum_{i=1}^{m-1} d(v_i,v_{i+1}) - \sum_{(u,v)\in E\cup A} d(u,v).$$

すなわち，配達路におけるすべての辺のコストの和から G のすべての辺のコストの和を減じたものである．

定義 5　チャイニーズ・ポストマン問題（CPP）とは，連結な混合グラフ $G=(V,E,A)$，距離関数 $d: E \cup A \to \mathbf{N}$，定数 $k \in \mathbf{N}$ が与えられたとき，G がコスト k 以下の配達路を持つか否かを決定する問題である．

定義 6　通行回数を m に限定したチャイニーズ・ポストマン問題（m-CPP）とは，連結な混合グラフ $G=(V,E,A)$，距離関数 $d: E\cup A \to \mathbf{N}$，定数 $k \in \mathbf{N}$ が与えられたとき，G がコスト k 以下で最大通行回数 m 以下の配達路を持つか否かを決定する問題である．

定義 7　$A \in \Sigma^*, B \in \Delta^*$ を問題とする．A から B へ多項式時間節約帰着可能（$A \le_{par}^p B$）であるとは，

- $\forall x \in \Sigma^*, x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B$,
- x に対する A の解の数 $= f(x)$ に対する B の解の数,

が成り立つような多項式時間計算可能な関数 $f: \Sigma^* \to \Delta^*$ が存在するときをいう．

定義 8　問題 B が **#P** 完全であるとは，$B \in$**#P** かつ，$\forall A \in$**#P**, $A \le_{par}^p B$ であるときをいう．

定義 9　$G=(V,E,A)$ を混合グラフ，$d: E\cup A \to \mathbf{N}$ を距離関数，$k \in \mathbf{N}$ を定数とする．また，P を G の上のある配達路とし，関数 $n_P: V \times V \to \mathbf{N}$ を次のように定義する：

$$n_P(a,b) = \begin{cases} m, & \text{辺 } (a,b) \text{ が存在し,} P \text{において } (a,b) \text{ は } a \text{ から } b \text{ に向かって } m \text{ 回通行するとき;} \\ 0, & \text{辺 } (a,b) \text{ が } G \text{ に存在しないとき（辺 } (b,a) \text{ が } G \text{ の有向辺であるときも含む）.} \end{cases}$$

集合 $D_{G,d,k}^m$ を次のように定義する：

$$D_{G,d,k}^m = \{P | P \text{は } G \text{ の上のコスト } k \text{以下で最大通行回数 } m \text{ 以下の配達路}\}.$$

関係 $R^m \subseteq D_{G,d,k}^m \times D_{G,d,k}^m$ を次のように定義する：

$${}_P R^m{}_{P'} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} P,\ P' \in D_{G,d,k}^m \text{かつ}, \forall (a,b) \in \\ V \times V,\ n_P(a,b) = n_{P'}(a,b). \end{array}$$

定義 10　#m-CPP とは，与えられた G,d,k に対して，コスト k 以下で最大通行回数が m 以下の異なる配達路の数を決定する問題である．ただし，2 つの

配達路 P と P' に対して ${}_{P}R^{m}{}_{P'}$ ならば，P と P' は同一であると見なす．すなわち，#m-CPP とは，次の関数 g_m を計算する問題である：

$$g_m(G,d,k) = |D^m_{G,d,k}/R^m|.$$

定義 11 最小通行回数問題とは，与えられた混合グラフ $G=(V,E,A)$，距離関数 $d: E \cup A \to \mathbf{N}$，定数 $k \in \mathbf{N}$ に対して，G 上のコスト k 以下の配達路の最大通行回数の最小値を求める問題である．すなわち，次の関数 $f_{\min}$ を計算する問題である：

$$f_{\min}(G,d,k) = \begin{cases} 0, & G\text{ がコスト }k\text{ 以下の配達路を持たないとき}, \\ l, & \text{そうでないとき}. \end{cases}$$

ただし，$l = \mathrm{MIN}(\{C_P | P$ は G 上のコスト k 以下の配達路で，C_P は P の最大通行回数 $\})$ とする．

3. 本　　論

2-CPP の $\mathbf{NP}$ 完全性を示すために，はじめに，ある有用な“辺”を構成する．与えられるグラフの各辺は，少なくとも1回は通行しなければならず，たかだか2回しか通行できない．したがって，配達路のコストは，定義より，あるコスト k の辺を1回目に通行するときはコスト0，2回目に通行するときはコスト k かかるものとして計算できる．したがって，コスト k が割り当てられた有向辺 (u,v) は，次の2つの通行方法が存在する：

- コスト0で u から v へちょうど1回通行する；
- コスト k で u から v へ2回通行する．

同様に，コスト k が割り当てられた無向辺 (u,v) は，次の5つの通行方法が存在することになる：

- コスト0で u から v へちょうど1回通行する；
- コスト0で v から v へちょうど1回通行する；
- コスト k で u から v へ2回通行する；
- コスト k で v から u へ2回通行する；
- コスト k で u と v を1回往復する．

図1(a)に示すグラフのすべての辺をたかだか2回の通行回数で通行することを考える．$t>0$ と仮定する．考える通行方法は次の3種類に分けられる：

(1) コスト $k+t$ ですべての辺を通行する方法．この方法は u から v に向かう道 (u,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,v) だけである．

(2) コスト $l+t$ ですべての辺を通行する方法．これは v から u に向かう道 (v,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,u) だけである．

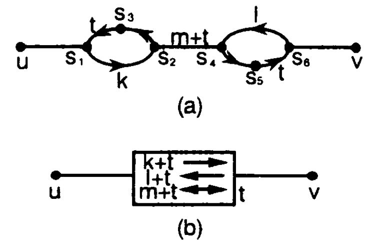


図1 コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$ の往復または1通行可能な辺 (u,v)

Fig. 1 A round-trip traverse or exactly one traversable edge (u,v) of cost $[k+t, l+t, m+t]_t$.

(3) コスト $m+t$ ですべての辺を通行する方法．これには次のような5種類の通行方法が存在する；

(a) u から v に向かう道 (u,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,v) と，v から u に向かう道 (v,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,u)；

(b) u と s_1 の間を往復する道 (u,s_1), (s_1,u) と，v と s_1 の間を往復する道 (v,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,v)；

(c) u と s_2 の間を往復する道 (u,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,u) と，v と s_2 の間を往復する道 (v,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_2), (s_2,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,v)；

(d) u と s_4 の間を往復する道 (u,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_4), (s_4,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,u) と，v と s_4 の間を往復する道 (v,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,v)；

(e) u と s_6 の間を往復する道 (u,s_1), (s_1,s_2), (s_2,s_4), (s_4,s_5), (s_5,s_6), (s_6,s_4), (s_4,s_2), (s_2,s_3), (s_3,s_1), (s_1,u) と，v と s_6 の間を往復する道 (v,s_6), (s_6,v)．

3番目の通行方法は，図1(a)のグラフを1つの辺と見なせば，どれもその辺を往復しているものと見なすことができる．したがって，このグラフはコスト $k+t$ で u から v に向かってちょうど1回通行するか，コスト $l+t$ で v から u に向かってちょうど1回通行するか，コスト $m+t$ で u, v 間をちょうど1回往復することができる辺と見なすことができる．図1(a)のグラフを図1(b)のように示すものとし，コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$ の往復または1通行可能な辺 (u,v)，または単にコスト $[k+t, l+t, m+t]_t$ の辺 (u,v) と呼ぶものとする（コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$ の往復または1通行可能な辺 (v,u) とは異なることに注意せよ）．

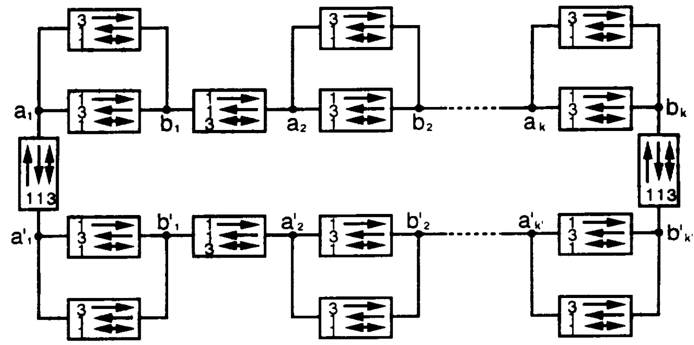


図 2 混合グラフ G_1
Fig. 2 Mixed graph G_1.

以下で使用される往復または1通行可能な辺の定数 t はすべて1であるので，コスト $[k+t, l+t, m+t]_t$ は $[k+1, l+1, m+1]$ と省略される．

補題 1 図2の混合グラフ G_1 において，コスト $3(k+k')$ で最大通行回数が2の配達路は，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i), $1 \le i \le k$, すべてを a_i から b_i に向かって通行し，かつコスト $[1,3,1]$ の辺 (a'_j, b'_j), $1 \le j \le k'$, すべてを往復する，もしくはその逆に，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i) すべてを往復し，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a'_j, b'_j) すべてを a'_j から b'_j に向かって通行するかのどちらかである．

証明 図2の混合グラフ G_1 には，どの通行方法でもコスト1以上を必要とする往復または1通行可能な辺が $3(k+k')$ 個存在するので，少なくともコスト $3(k+k')$ は必要である．したがって，これらすべての辺はコスト1の通行方法しか用いることができない．

コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i), $1 \le i \le k$, を a_i から b_i に向かって通行すると仮定する．もしコスト $[1,1,3]$ の辺 (b_i, a_{i+1}) を a_{i+1} から b_i に向かって通行するなら，コスト $[3,1,1]$ の辺 (a_i, b_i) は b_i から a_i に向かって2回通行しなければならないが，これは不可能である．したがって，コスト $[1,1,3]$ の辺 (b_i, a_{i+1}) は b_i から a_{i+1} に向かって通行しなければならず，コスト $[3,1,1]$ の辺 (a_i, b_i) は往復しなければならない（このとき，コスト $[1,1,3]$ の辺 (b_{i-1}, a_i) は b_{i-1} から a_i に向かって通行しなければならない）．さらに，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{i+1}, b_{i+1}) を往復すれば，コスト $[3,1,1]$ の辺 (a_{i+1}, b_{i+1}) を a_{i+1} から b_{i+1} に向かって通行しなければならず，コスト3を必要としてしまう．したがって，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{i+1}, b_{i+1}) は a_{i+1} から b_{i+1} に向かって通行しなければならず，コスト $[3,1,1]$ の辺 (a_{i+1}, b_{i+1}) は往復しなければならない（同様にコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{i-1}, b_{i-1}) は a_{i-1} から b_{i-1} に向かって通行しなければならず，コスト $[3,1,1]$ の辺 (a_{i-1}, b_{i-1}) は往復しなければならない）．これは，あるコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i) を a_i から b_i に向かって通行するなら，コスト $[1,3,1]$ の辺 $(a_1, b_1), \cdots, (a_k, b_k)$ すべてを a から b に向かって通行しなければならないことを意味する．同様な議論によって，あるコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i) を往復するなら，コスト $[1,3,1]$ の辺 $(a_1, b_1), \cdots, (a_k, b_k)$ すべてを往復しなければならないことが示せる．

いま，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i), $1 \le i \le k$, すべてを a_i から b_i に向かって通行するものと仮定する．このとき，コスト $[1,1,3]$ の辺 (a_1, a'_1), $(b_k, b'_{k'})$ はそれぞれ a'_1 から a_1 に，b_k から $b'_{k'}$ に向かって通行しなければならない．すると，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a'_1, b'_1), $(a'_{k'}, b'_{k'})$ はともに往復しなければならず，それゆえコスト $[1,3,1]$ の辺 (a'_j, b'_j), $1 \le j \le k'$, はすべて往復しなければならない．

同様に，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_i, b_i), $1 \le i \le k$, すべてを往復すると仮定すれば，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a'_j, b'_j), $1 \le j \le k'$, すべてを a'_j から b'_j に向かって通行しなければならないことが示せる． □

補題 2 図3に示す混合グラフ G_2 に対して次のことが成り立つ：

（1） 3本のコスト $[1,3,1]$ の辺をすべて p から q に向かって通行するような最大通行回数が2以下の配達路の最小コストは6である．

（2） 各 i, $1 \le i \le 3$, に対して，3本のコスト $[1,3,1]$ の辺のうち，i 本は p と q の間を往復し，残りの辺は p から q に向かって通行するようなコスト4の最大通行回数が2以下の配達路が存在する．

証明

（a） 3本のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p,q) をすべて p から q に向かって通行すると仮定する．もしコスト $[3,3,1]$ の辺 (p,q) を往復するなら，コスト0の無向辺 (p,q) によって q から p に向かって3

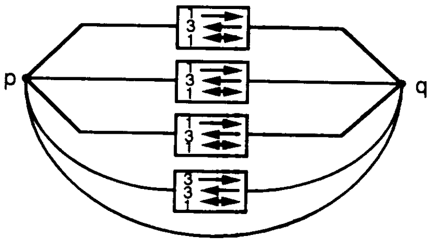


図3 混合グラフ G_2
Fig. 3 Mixed graph G_2.

回通行しなければならないが，これは不可能である．したがって，コスト $[3,3,1]$ の辺 (p,q) は q から p に向かって通行しなければならず，コスト 3 を要する．このとき，無向辺 (p,q) は q から p に向かって 2 回通行することになる．

(b)

(i) 2 本のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p,q) は p から q に向かって通行し，他の 1 本は往復すると仮定する．このとき，コスト $[3,3,1]$ の辺 (p,q) は往復し，コスト 0 の無向辺 (p,q) は q から p に向かって 2 回通行すればよい．

(ii) 1 本のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p,q) は p から q に向かって通行し，他の 2 本は往復すると仮定する．このとき，コスト $[3,3,1]$ の辺 (p,q) は往復し，コスト 0 の無向辺 (p,q) は q から p に向かって 1 回通行すればよい．

(iii) 3 本すべて往復すると仮定する．このとき，コスト $[3,3,1]$ の辺 (p,q) とコスト 0 の無向辺 (p,q) はともに往復すればよい． □

定理 1 2-CPP は **NP** 完全である．

証明 2-CPP が **NP** に属することは明らかである．したがって，3-SAT が 2-CPP に多項式時間で帰着可能であることを示せばよい．

$X = \{x_1, \cdots, x_m\}$, $X' = \{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_m\}$ とし，F を次のような 3 乗法標準形のブール式とする：

$F = C_1 \cdot C_2 \cdot \cdots \cdot C_r$,

$C_i = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3})$,

$y_{ij} \in X \cup X'$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le 3$.

一般性を失うことなく，すべての変数 $x_i, 1 \le i \le m$, は F に含まれると仮定できる．F に現れない $X \cup X'$ の中のリテラルの個数を m' とする．次の 2 つの構造を重ね合わせることにより，F が充足可能なとき，かつそのときに限りコスト $13r + 3m'$ で最大通行回数が 2 の配達路を持つ混合グラフ $G = (V, E, A)$ を構成する：

- 変数 x_i に対して，混合グラフ G_{x_i}；
- 節 C_j に対して，混合グラフ G_{C_j}．

各変数 $x \in X$ に対して，x を表す混合グラフ $G_x = (V_x, E_x, A_x)$ を構成する．G_x は，リテラル $x, \overline{x}$ を表す混合グラフを構成し，それらを用いて作られる．

各リテラル $\alpha \in X \cup X'$ に対して，α を表す混合グラフを構成する．

(1) ブール式 F の節 C_i, $1 \le i \le r$, の j, $1 \le j \le 3$, 番目のリテラル y_{ij} に対して，コスト $[1,3,1]$ の往復または 1 通行可能な辺 (a_{ij}, b_{ij}) を構成する；

(2) ブール式 F の中の $k\ (\ge 0)$ 個のリテラル $y_{i_1 j_1}, \cdots, y_{i_k j_k}$ が α に等しいものとする．

(a) $k = 0$ のとき，
コスト $[1,3,1]$ とコスト $[3,1,1]$ の辺 (α_A, α_B) を構成する．このコスト $[1,3,1]$ の辺 (α_A, α_B) がリテラル α を表す；

(b) $k = 1$ のとき，
(1) で構成したコスト $[1,3,1]$ の往復または 1 通行可能な辺 $(a_{i_1 j_1}, b_{i_1 j_1})$ がリテラル α を表す．ただし，頂点 $a_{i_1 j_1}$, $b_{i_1 j_1}$ はそれぞれ α_A, α_B とも呼ぶものとする；

(c) $k \ge 2$ のとき，
各 $l, 1 \le l \le k-1$, に対して，$y_{i_l j_l}$ と $y_{i_{l+1} j_{l+1}}$ を表す (1) で構成されたコスト $[1,3,1]$ の辺 $(a_{i_l j_l}, b_{i_l j_l})$ と $(a_{i_{l+1} j_{l+1}}, b_{i_{l+1} j_{l+1}})$ を，コスト $[1,1,3]$ の辺 $(b_{i_l j_l}, a_{i_{l+1} j_{l+1}})$ で接続した混合グラフが α を表す．ただし，頂点 $a_{i_1 j_1}$, $b_{i_k j_k}$ はそれぞれ α_A, α_B とも呼ぶものとする (図 4 参照)．

これで，各リテラルに対応する混合グラフが構成できた．変数 x を表す混合グラフ G_x は，リテラル x, $\overline{x}$ を表す混合グラフの頂点 x_A と $\overline{x}_A$, x_B と $\overline{x}_B$ をそれぞれコスト $[1,1,3]$ の辺 $(x_A, \overline{x}_A)$, $(x_B, \overline{x}_B)$ で接続した混合グラフである．

次に，F の節 $C_i = (y_{i1} + y_{i2} + y_{i3})$, $1 \le i \le r$, に対する混合グラフ $G_{C_i} = (V_{C_i}, E_{C_i}, A_{C_i})$ を構成するのだが，これは図 5 に示した混合グラフである．

$G = (V, E, A)$ を構成する 2 つの“構造”ができた．あとは，これらの構造を重ねればよい．すなわち，G の頂点の集合 V，無向辺の集合 E，有向辺の集合 A を以下のように定める：

$V = (\cup_{i=1}^{m} V_{x_i}) \cup (\cup_{i=1}^{r} V_{C_i})$,

$E = (\cup_{i=1}^{m} E_{x_i}) \cup (\cup_{i=1}^{r} E_{C_i})$,

$A = (\cup_{i=1}^{m} A_{x_i}) \cup (\cup_{i=1}^{r} A_{C_i})$.

ここで注意しておかなければならないことは，図 2 におけるコスト $[3,1,1]$ の辺 (a_i, b_i), $1 \le i \le k$, と

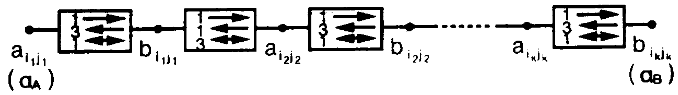


図4　リテラルを表す混合グラフ ($k \geq 2$)
Fig. 4　Mixed graph corresponding to a literal ($k \geq 2$).

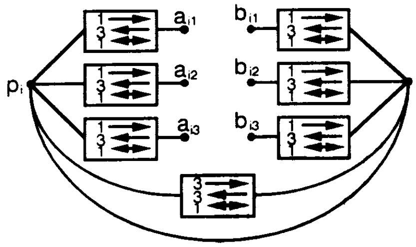


図5　F の節 C_i を表す混合グラフ G_{C_i}
Fig. 5　Mixed graph G_{C_i} corresponding to a clause C_i in F.

(a'_j, b'_j), $1 \leq j \leq k'$, をすべて取り除いたグラフは，ある変数に対応する混合グラフであり，取り除かれたコスト $[3,1,1]$ の辺は，F に対応する混合グラフ G では，節に対応する混合グラフ G_C のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p,a) と (b,q) が代わりにその役目を果たしているということである．

コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を F の i 番目の節の j 番目のリテラルに対応する辺とする．G の中で，頂点 a_{ij} を端点として持つ辺は，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) の他にコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) とコスト $[1,1,3]$ の辺の 3 本があり，b_{ij} を端点として持つ辺は，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}), コスト $[1,3,1]$ の辺 (b_{ij}, q_i), コスト $[1,1,3]$ の辺の 3 本がある．もし，各辺がコスト 1 の通行方法しか許可されず，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行するなら，コスト $[1,1,3]$ の辺は往復できないので，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}), (b_{ij}, q_i) はともに往復しなければならず，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を往復するなら，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) は p_i から a_{ij} に向かって通行しなければならず，コスト $[1,3,1]$ の辺 (b_{ij}, q_i) は b_{ij} から q_i に向かって通行しなければならない．このコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) とコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}), (b_{ij}, q_i) の間の通行方法の関係が，ちょうど図2の混合グラフ G_1 におけるコスト $[1,3,1]$ の辺 (a,b) とコスト $[3,1,1]$ の辺 (a,b) の間の通行方法の関係に対応している（リテラル α が F に現れないとき，コスト $[1,3,1]$ の辺 (α_A, α_B) はどの G_{C_i} の頂点 a_{ij}, b_{ij} 間を結ぶ辺ともなりえないことから，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) と (b_{ij}, q_i) の代わりを果たすコスト $[3,1,1]$ の辺 (α_A, α_B) が，コスト $[1,3,1]$ の辺 (α_A, α_B) と並列に構成される）．

したがって，もし G においてコスト 1 の通行方法しか使用できないのなら，補題1は G において同じリテラルに対応するすべてのコスト $[1,3,1]$ の辺の通行方法が同一となることを示すとともに，リテラル y_{ij} に対応するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行するなら，G_{C_i} のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) と (b_{ij}, q_i) はともに往復しなければならず，また，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を往復するなら，G_{C_i} のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i, a_{ij}) は p_i から a_{ij} に向かって通行しなければならず，コスト $[1,3,1]$ の辺 (b_{ij}, q_i) は b_{ij} から q_i に向かって通行しなければならないことを示している．さらには，リテラル y_{ij} に対応するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行することは，図3のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p,q) の 1 つを往復することに対応し，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を往復することは，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p,q) の 1 つを p から q に向かって通行することに対応していることにも注意しなければならない．

図6 に 3 乗法標準形のブール式 $F = (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1 + x_2 + x_4)\cdot(x_1 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)$ の各変数 $x_1, \cdots, x_4$ に対応する混合グラフ $G_{x_1}, \cdots, G_{x_4}$ を，また**図7**にこの F から構成される混合グラフ G を示す．

G が多項式時間で構成できることは明らかなので，F が充足可能であるとき，かつそのときに限り G がコスト $13r + 3m'$ で最大通行回数 2 の配達路を持つことを示す．

$F = C_1 \cdot \cdots \cdot C_r$ が充足可能であると仮定する．このとき，F を充足する真理値割当て $I : X \to \{0,1\}$ が存在する．各変数 x に対して，G の部分グラフ G_x の各辺を次のように通行する：

(1)　$I(x) = 1$ のとき，
$y_{ij} = x$ なるリテラル y_{ij} に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行する．このとき，補題1より $y_{kl} = \overline{x}$ なるリテラル y_{kl} に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{kl}, b_{kl}) は往復することになる．

(2)　$I(x) = 0$ のとき，
$y_{ij} = \overline{x}$ なるリテラル y_{ij} に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij}, b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行する．

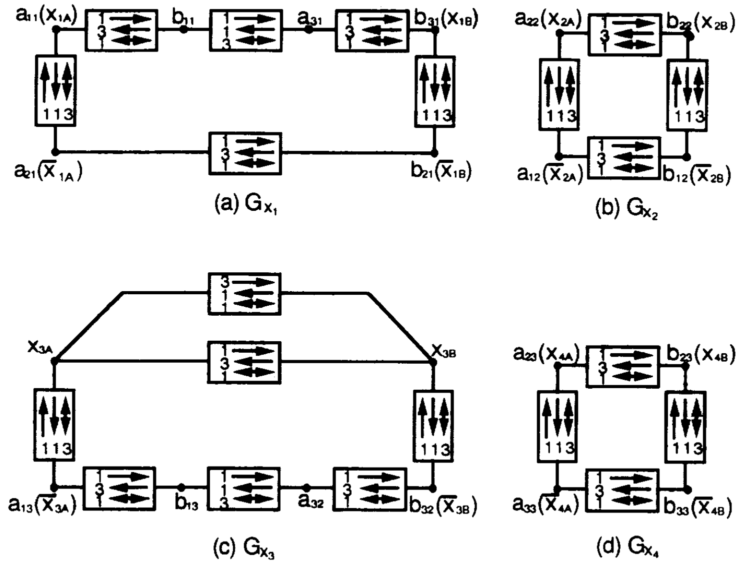


図6 変数 x_1, x_2, x_3, x_4 を表す混合グラフ G_{x_1}, G_{x_2}, G_{x_3}, G_{x_4}
Fig. 6 Mixed graphs G_{x_1}, G_{x_2}, G_{x_3}, and G_{x_4} corresponding to variables x_1, x_2, x_3, and x_4.

このとき，$y_{kl}=x$ なるリテラル y_{kl} に対するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{kl},b_{kl}) は往復することになる．

すなわち，I のもとで $x=1$ のとき，リテラル x を表現するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij},b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行し，$\overline{x}=1$ のときリテラル $\overline{x}$ を表現するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij},b_{ij}) を a_{ij} から b_{ij} に向かって通行する．I のもとで $F=1$ となるから，F の各節 $C_i=(y_{i1}+y_{i2}+y_{i3})$ において，$y_{ij}=1$ のようなリテラル y_{ij} が存在し，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij},b_{ij}). は a_{ij} から b_{ij} に向かって通行することになる．すると，コスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i,a_{ij}) と (b_{ij},q_i) はともに往復しなければならなくなる．よって，補題2より，G_{C_i} のすべての辺はコスト4で通行することができる．このような通行法において，G における G_x の部分において必要とされるコストの総和は $6r+3m'$ であり，G_C の部分において必要とされるコストの総和は $7r$ である．したがって，G はコスト $13r+3m'$ の配達路を持つ．

逆に G はコスト $13r+3m'$ で最大通行回数が2の配達路が存在すると仮定する．G のコスト $13r+3m'$ で最大通行回数が2であるすべての配達路に対して，次のことが成り立つ：

- G は往復または1通行可能な辺を $13r+3m'$ 個持つので，これらすべての辺をコスト1の通行方法で通行している；
- 補題1から，各変数 x に対応する混合グラフ G_x において，リテラル $y_{ij}=x$ に対応するコスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij},b_{ij}) すべてを a_{ij} から b_{ij} に向かって通行し，かつリテラル $y_{i'j'}=\overline{x}$ に対応するコスト $[1,3,1]$ の辺 $(a_{i'j'},b_{i'j'})$ すべてを往復する，もしくはその逆に，コスト $[1,3,1]$ の辺 (a_{ij},b_{ij}) すべてを往復し，コスト $[1,3,1]$ の辺 $(a_{i'j'},b_{i'j'})$ すべてを $a_{i'j'}$ から $b_{i'j'}$ に向かって通行する．

P をコスト $13r+3m'$ で最大通行回数が2である G のある配達路とし，$I'_P: X\rightarrow\{0,1\}$ を次のような真理値割当てとする：

$$I'_P(x)=\begin{cases}1, & P\text{においてリテラル } y_{ij}=x \text{ に対応するコスト } [1,3,1] \text{ の辺 } (a_{ij},b_{ij}) \text{ を } a_{ij} \text{から } b_{ij} \text{に向かって通行するとき;}\\ 0, & P\text{においてリテラル } y_{ij}=x \text{ に対応するコスト } [1,3,1] \text{ の辺 } (a_{ij},b_{ij}) \text{ を往復するとき.}\end{cases}$$

I'_P のもとで $F=0$ と仮定する．すると，$y_{i1}=y_{i2}=y_{i3}=0$ のような節 $C_i=(y_{i1}+y_{i2}+y_{i3})$ が存在する．したがって，P においてコスト $[1,3,1]$ の3つの辺 (a_{i1},b_{i1}), (a_{i2},b_{i2}), (a_{i3},b_{i3}) はすべて往復している．すると，P においてコスト $[1,3,1]$ の辺 (p_i,a_{ij}), $1\leq j\leq 3$, はすべて p_i から a_{ij} に向かって通行しており，コスト $[1,3,1]$ の辺 (b_{ij},q_i) はすべて b_{ij} から q_i に向かって通行していなければならない．これは図3の混合グラフ G_2 の3本のコスト $[1,3,1]$ の辺 (p,q) をすべて p から q に向かって通行することに対応する．したがって，補題2より，コスト0の無向辺 (p_i,q_i) は q_i から p_i に向かって2回通行し，

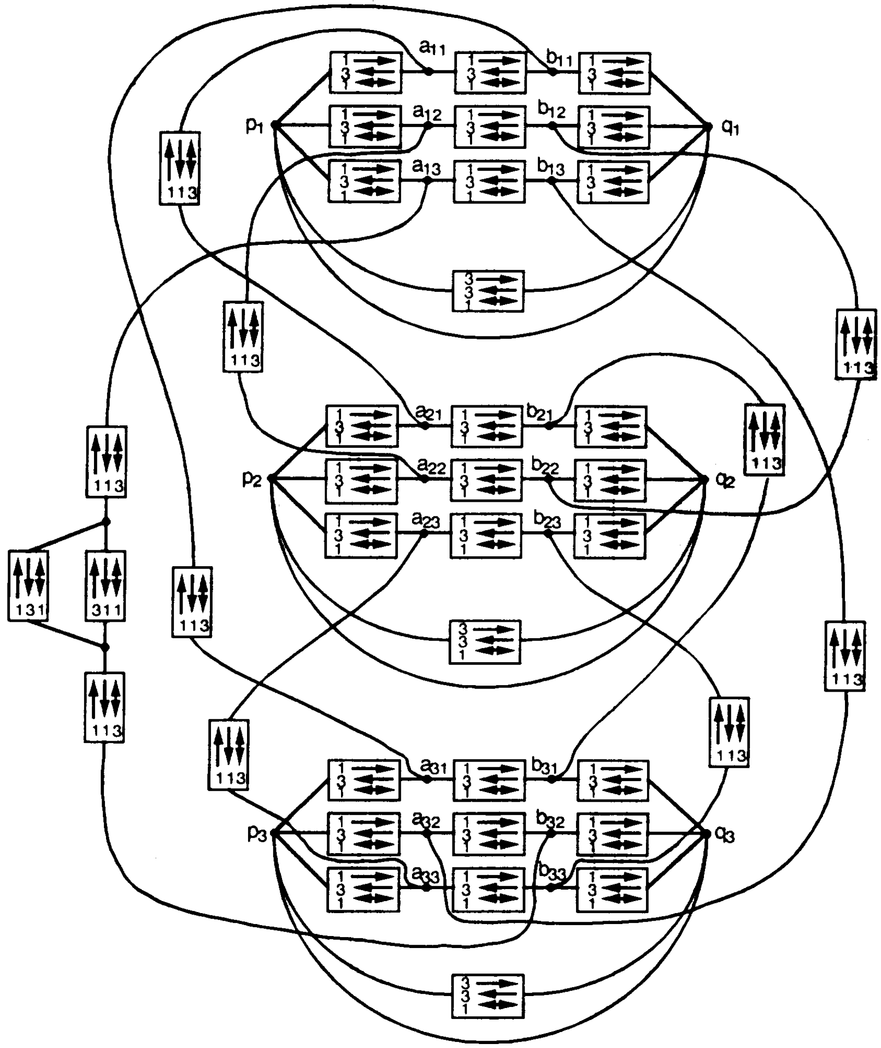


図 7 ブール式 $F=(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+x_4)\cdot(x_1+\overline{x}_3+\overline{x}_4)$ から構成される混合グラフ G
Fig. 7 Mixed graph constructed from a three conjunctive normal Boolean formula $F=(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1+x_2+x_4)\cdot(x_1+\overline{x}_3+\overline{x}_4)$.

コスト $[3,3,1]$ の辺 (p_i,q_i) を q_i から p_i に向かって通行しなければならないが，これは P のコストが $13r+3m'$ であることに矛盾する．したがって，I'_P のもとで $F=1$ である． □

定理 2 混合グラフのもとでオイラー閉路問題は $O(n^5)$ 時間で計算可能である．すなわち，1-CPP は **P** に属する．

証明 1-CPP は，各辺の通行回数がちょうど 1 回であるから，混合グラフのもとでのオイラー閉路問題に等しい．

$G=(V,E,A)$ をある混合グラフとする．$|V|=n$, $|E\cup A|=m$ とする．また，v を G のある頂点とし，$deg(v)$, $in(v)$, $out(v)$ によって，それぞれ，v に接続する無向辺の数，v に入る有向辺の数，v から出る有向辺の数を表す．

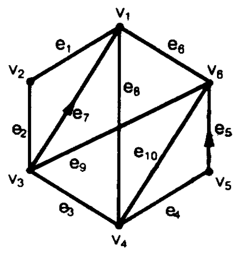
G の各頂点 v に対して，次が成立するか否かを確かめる：

$$deg(v)-|in(v)-out(v)|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2). \qquad (*)$$

もし，すべての頂点に対して式 $(*)$ が成り立たなければ，明らかに G はオイラー閉路を持たない．

G のすべての頂点が式 $(*)$ を満足するものとする．このとき，次のような二部グラフ $G'=(V',E')$, $V'=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\phi$, $E'\subseteq\{\{v_1,v_2\}|v_1\in V_1, v_2\in V_2\}$ を構成する（定義 1 と同様，無向辺 $\{v_1,v_2\}$ は (v_1,v_2) と書かれる）：

$$V_1=\cup_{v\in V}\{v_i|1\le i\le d_v\},$$
$$d_v=(deg(v)+in(v)+out(v))/2,$$
$$V_2=E\cup A,$$
$E'=\{(v_i,e_{j_i})|v$ は G の頂点で，有向辺 $e_{j_i}, 1\le i \le in(v)$, は v に入る $\}\cup\{(v_i,e)|$ 各 G の頂



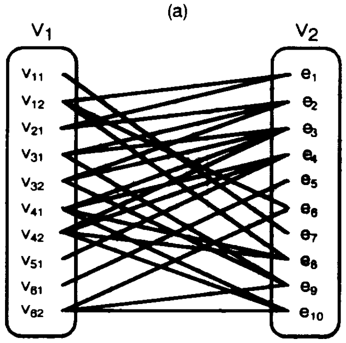


図8 混合グラフ (a) と対応する二部グラフ (b)

Fig. 8 A mixed graph (a) and corresponding bipartite graph (b).

点 v に対して，$in(v)+1 \le i \le d_v$，かつ無向辺 $e \in E$ は頂点 v に接続する }.

例として図8に混合グラフと対応する二部グラフを示す.

$M=(V',E'')$, $E'' \subseteq E'$ を G' のある完全マッチングとする．すなわち，M のすべての頂点 v に対して，$deg(v)=1$ が成り立つ．(v,e) を M のある辺とするとき，G の辺 e は頂点 v に向かって通行するものとする．すると，そのような通行方法は G のオイラー閉路となっている.

式 $(*)$ の確認は $O(m)$ 時間で可能であり，G' の構成は $O(m^2)$ 時間で可能である．n 個の頂点の二部グラフの完全マッチングは $O(n^{5/2})$ 時間で計算できるから[3]，$m \in O(n^2)$ より，混合グラフのもとでのオイラー閉路問題は $O(n^5)$ 時間で計算できる. □

定理3 #2-CPP，すなわち以下の関数 g_2 は#P完全である：

$$g_2(G,d,k)=|D^2_{G,d,k}/R^2|.$$

証明 Valiant は#3-SAT，すなわち与えられた3乗法標準形のブール式を充足する異なる真理値の数を求める問題が#P 完全であることを示している[7),8)]．定理1での 3-SAT から 2-CPP への多項式時間帰着が，そのまま#3-SAT から g_2 への多項式時間節約帰着となっている.

また，g_2 が#P に属することは明らかである. □

補題3 m を混合グラフ G の辺の数とする．$m>1$ のとき，次が成立する：

$$(\forall G)(\forall d)(\forall k),\ f_{\min}(G,d,k) \le m.$$

証明 G がコスト k 以下の配達路を持たないなら成立することは明らかである.

P をコスト k 以下で最大通行回数 C_P の G の配達路とし，$C_P>m$ とする．$e=(v,w)$ を P において C_P 回通行する辺とする．一般性を失うことなく，P の最初の辺が e であると仮定できる．P_i, $1 \le i \le C_P$, を e の P における i 番目の出現から $i+1$ 番目の出現の手前まで（$i=C_P$ のときは P の最後の辺まで）の部分路とする．すなわち，

$$P\ :\ \underbrace{e,\cdots,}_{P_1}\underbrace{e,\cdots,}_{P_2}\ \cdots,\ \underbrace{e,\cdots}_{P_{C_P}}.$$

l_i, $1 \le i \le C_P$, を P において部分路 P_i 以前に1度も通行しておらず，P_i においてはじめて通行する異なる辺の数とする．すると，

$$\sum_{i=1}^{C_P} l_i = m$$

であるから，$l_j=0$ のような部分路 P_j が存在する．$l_j=0$ ならば，部分路 P_j は P において以前に通行したことのある辺のみを通行していることになる．すなわち，P において P_j は冗長である．こうして $l_j=0$ である P_j を P からすべて取り除くことができ，その結果できる辺の列を P' とする.

ここで e が無向辺の場合，P' が配達路でない場合があることに注意しなければならない．P' において P_j は P_i の次にくる部分路とする（ただし，P_i が P' の最後の部分路ならば，P_j を P_1 とする)．このとき，P_i の最後の辺は (u,v) もしくは (u,w) のような辺である（u は v, w とは異なる G のある頂点)．もし P_i の最後の辺が (u,v) で P_j の2番目の辺が (v,z) のような辺であるなら，P_j の最初の辺 e を取り除く．同様に，P_i の最後の辺が (u,w) で P_j の2番目の辺が (w,z) のような辺であるなら，P_j の最初の辺 e を取り除く.

こうして P' からいくつかの無向辺 e を取り除くことにより，配達路 P'' が構成できる．明らかに，P'' はコスト k 以下で e の出現は m 以下である.

もし，P'' の最大通行回数 $C_{P''}$ が m より大きいなら，P'' に対して上の手続きを実行する．その結果構成される配達路の最大通行回数が m 以下となることは明らかであろう. □

定理4 最小通行回数問題は Δ_2^p に属する．すなわち，

$f_{\min} \in \Delta_2^p = \mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$.

証明 P を G 上のコスト k 以下のある配達路とし，m を G の辺の数とする．$m = 1$ のとき $f_{\min}(G, d, k) = 2$ であるから，補題3より，P の最大通行回数 C_P を $m+1$ 以下と仮定できる．$e = (u, v)$ を G 上のある無向辺とし，e は P において，u から v に向かって l_1 回通行し，v から u に向かって l_2 回通行するものとする．このとき，

(1) もし $l_1 > l_2$ ならば，u から v に向かって $l_1 - l_2$ 回通行し，v から u に向かっては通行しないような，コスト k 以下の配達路が存在する；

(2) もし $l_1 < l_2$ ならば，u から v に向かっては通行せず，v から u に向かって $l_2 - l_1$ 回通行するような，コスト k 以下の配達路が存在する；

(3) もし $l_1 = l_2$ ならば，u と v の間をちょうど1回往復するようなコスト k 以下の配達路が存在する．

これらのことを考慮して，次の非決定性の変換機 N' を考える：

procedure $N'(G, d, k)$:
begin
  { $|V| = n$, $|E \cup A| = m$ とする }
  整数 l, $m \leq l \leq m(m+1)$, を非決定的に推測する；
  辺の列 $P : e_1, \cdots, e_l$ を非決定的に推測する；
  for $(u, v) \in E$ **do**
    if (u, v) が P の中で，u から v に向かって l_1 回通行し，v から u に向かって l_2 回通行するとき，
      (i) $l_1 = l_2 > 1$, または
      (ii) $l_1 \neq l_2$ かつ $\mathrm{MIN}(\{l_1, l_2\}) > 0$
    then reject;
  if P が G のコスト k 以下で最大通行回数 $m+1$ 以下の配達路 **then output** $0^{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot y$;
accept
end.

ただし，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，n の2進表現を $(n)_{bin}$ としたとき，

$$y = \mathrm{MAX}(\{g_P(e) | e \in E \cup A\})_{bin},$$

$$g_P(e) = \begin{cases} 2, & e \text{ は無向辺で，かつ配達路 } P \text{ において } e \text{ はちょうど1回往復するとき；} \\ k, & e = (u, v) \text{ を } u \text{ から } v \text{（または } v \text{ から } u \text{）へ } k \text{ 回通行するとき，} \end{cases}$$

であり，$\alpha_1 = \lceil \log(m+1) \rceil + 1$, $\alpha_2 = |y|$ である．すると，N' の出力の長さはいつも $\lceil \log(m+1) \rceil + 1$ である．$m \leq n(n-1)/2$ より，$l \leq m(m+1) \in O(n^4)$ だから，N' は多項式時間限定である．

集合 B を次のように定義する：

$$B = \{(0, G, d, k, w) | N' \text{ は入力 } G, d, k \text{ に対して } ww' \text{ を出力する }\}.$$

ここで，w は N' の出力の前部分語である．

$B \in \mathbf{NP}$ は明らかである．なぜなら，入力の組 0, G, d, k, w に対して，語 w' を非決定的に推測し，もし変換機 N' に G, d, k を入力し，ww' を出力して停止するなら，入力を受理するような非決定性多項式時間の機械が構成できるからである．

集合 C を次のように定義する：

$$C = \{(1, G, d, k) | G \text{ はコスト } k \text{ 以下の配達路を持つ }\}$$

C はチャイニーズ・ポストマン問題であるから，**NP** に属する．

さらに，$A = B \cup C$ と定義すれば，明らかに A も **NP** に属する．

次のようなオラクル A を持った多項式時間限定の決定性オラクル機械 N を考える：

procedure $N^A(G, d, k)$:
begin
  if $(1, G, d, k) \in A$ **then**
  begin
    $w \leftarrow \lambda$;
    for $i \leftarrow 1$ **to** $\lceil \log(m+1) \rceil + 1$ **do**
      if $(0, G, d, k, w \cdot 0) \in A$ **then** $w \leftarrow w \cdot 0$
        else $w \leftarrow w \cdot 1$;
    output w;
  end else output 0
end.

$N^A(G, d, k) = f_{\min}(G, d, k)$ が成り立つことから，$f_{\min} \in \Delta_2^p$ である． □

4. むすび

各辺の通行回数を“たかだか2回”と制限したCPP問題が**NP**完全であることを示した．各辺の通行回数を“ちょうど1回”と制限したCPP問題が**P**に属することも示されたことから，これらの結果はクラス**P**と**NP**間のある境界を示したことになる．また，CPPに関連した2つの興味ある関数の複雑さも示した．一方は，2-CPPに対する配達路の数を数え上げる関数であり，これは多くの**NP**完全問題に対応する数え

上げ問題と同様，#P 完全であることを示した．もう一方は，CPP において，コスト k 以内で配達するためには，同一辺を少なくとも何回通行しなければならないかを求める関数であり，これは多項式時間階層のクラス Δ_2^p に属することを示した．

我々は，m-CPP を用いて，NP にある階層が構成できるかどうかに興味を持っている．また，与えられた G と l に対して，同一辺をたかだか l 回通行することが許された場合，コストはいくつでなければならないかを決定する問題など，CPP に関連する様々な関数の計算量にも興味を持っている．

参考文献

1) Aho, A.V., Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addision-Wesley, Reading, MA, (1974).
2) Edmonds, J. and Johnson, E.L.: Matching, Euler Tours and the Chinese Postman, *Math. Program.*, Vol.5, No.1, pp.88–124 (1973).
3) Hopcroft, J.E. and Karp, R.M.: An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matching in Bipartite Graphs, *SIAM J. Comput.*, Vol.2, pp.225–231 (1973).
4) Kuhn, H.W.: The Hungarian Method for the Assignment Problem, *Naval Res. Logistics Quart*, Vol.2, pp.83–97 (1955).
5) Mei-Ko, K.: Graphic Programming Using Odd or Even Points, *Chinese Math.*, Vol.1, pp.237–277 (1962).
6) Papadimitriou, C.H.: On the Complexity of Edge Traversing, *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol.23, No.3, pp.544–554 (1976).
7) Valiant, L.G.: The Complexity of Computing the Permanent, *Theor. Comput. Sci.*, Vol.8, pp.181–201 (1979).
8) Valiant, L.G.: The Complexity of Enumeration and Reliability Problems, *SIAM J. Comput.*, Vol.8, pp.410–421 (1979).

(平成 7 年 9 月 14 日受付)
(平成 8 年 9 月 12 日採録)

遠山 宏明（正会員）

昭和 44 年生．平成 5 年東京電機大学理工学部経営工学科卒業．平成 7 年同大学院理工学研究科システム工学専攻博士前期課程修了．現在同大学院理工学研究科応用システム工学専攻博士後期課程在学中．計算の複雑性の研究に従事．

足立 暁生

昭和 11 年生．昭和 36 年京都大学理学部数学科卒業．同年 SE として日本アイ・ビー・エム（株）入社．昭和 56 年日本アイ・ビー・エム東京基礎研究所副主管研究員．昭和 57 年理学博士．昭和 63 年東京電機大学理工学部経営工学科教授．現在の興味は暗号系．ACM，IEEE，EATCS，電子情報通信学会，日本数学会，日本天文学会各会員．