連続する3つの値が禁止された占有問題の一般公式

緑川章一† 友田敏章†
堀端孝俊† 李磊†

拘束付き置換の総数を求める問題を考える．n 次の置換 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ において，a_i は i から始まる連続した3つの値はとれないものとする ($a_i \neq i$, $a_i \neq i+1$, $a_i \neq i+2$, ただし $n+1 \equiv 1$, $n+2 \equiv 2$)．求めるべき置換の総数は，包含と排除の原理をもちいて $U_n^{(3)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r c_r^{(n)} (n-r)!$ と書くことができる．我々は，コンピュータによる数値実験の結果，係数 $c_r^{(n)}$ の一般形が $c_r^{(n)} = \frac{(3n)}{r!} \left[(3n)^{r-1} - \sum_{i=2}^{r} (-1)^i f_i(r) \binom{r}{i} (3n)^{r-i} \right] + \left(1+(-1)^n\right) \delta_{n,r}$ と表されることを発見した．ここに，$f_i(r)$ は変数 r についての $(i-2)$ 次多項式である．さらに，我々は関数 $f_i(r)$ の係数間にもまた簡単な規則のあることを発見した．これらの結果は，$c_r^{(n)} < 3 \times 10^{10}$ の範囲において直接に数え上げる方法で求めたものと一致している．

General Formula for Counting the Number of Permutations with Forbidden Three Successive Numbers

SHOICHI MIDORIKAWA,† TOSHIAKI TOMODA,† TAKATOSHI HORIBATA† and LEI LI†

We consider the problem of counting the total number of permutations of the nth order $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ with the constraints that a_i is forbidden to take three successive numbers beginning from i ($a_i \neq i, a_i \neq i+1$, $a_i \neq i+2$, where $n+1 \equiv 1$ and $n+2 \equiv 2$). Using the principle of inclusion and exclusion the general formula is represented by $U_n^{(3)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r c_r^{(n)} (n-r)!$ for counting the total number of permutations with the constraints. We evaluate the values of $c_r^{(n)}$ in the range of $< 3 \times 10^{10}$, and find that the coefficient $c_r^{(n)}$ can be written as $c_r^{(n)} = \frac{(3n)}{r!} \left[(3n)^{r-1} - \sum_{i=2}^{r} (-1)^i f_i(r) \binom{r}{i} (3n)^{r-i} \right] + \left(1+(-1)^n\right) \delta_{n,r}$ where $f_i(r)$ is a polynomial function of variable r with degree $(i-2)$. Moreover we find that the coefficients of $f_i(r)$ also obey simple rules.

1. まえがき

拘束付きの置換の総数を求める問題を考えよう．n 次の置換

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

において，a_i は i から始まる連続した k 個の値をとれないものとする．条件を具体的に記すと，

$$\begin{array}{llll} a_1 \neq 1, & a_1 \neq 2, & \dots, & a_1 \neq k \\ a_2 \neq 2, & a_2 \neq 3, & \dots, & a_2 \neq k+1 \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_n \neq n, & a_n \neq 1, & \dots, & a_n \neq k-1 \end{array}$$

となる．

ここで k が1と2の場合には特別な名前がつけられている．$k=1$ の場合，すなわち $a_i \neq i$ であるような混乱順列（derangements）の総数を求める問題は，de Montmort の出合いの問題（problème des rencontres）として知られている．また，$k=2$ の場合には，Lucas の家政の問題（problème des ménages）と呼ばれている．これらの一般解については，すでによく知られている [1),2)]．出合いの問題（$k=1$ の場合）を最初に解いたのは，L. Euler である．$k=2$ の場合における解の公式には，Kaplansky の名が冠せられている．

これらの問題を解くための一般的な方法とは，包含と排除の原理（principle of inclusion and exclusion）と呼ばれるものを用いるものである．それによれば，

† 青森大学工学部
Faculty of Engineering, Aomori University

a_i $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ が k 個の値をとることができない場合の置換の総数 $U_n^{(k)}$ は,

$$U_n^{(k)} = n! - c_1^{(n)}(n-1)! + c_2^{(n)}(n-2)! - \cdots + (-1)^n c_n^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r c_r^{(n)}(n-r)! \qquad (1)$$

と表すことができる.ここで,係数 $c_r^{(n)}$ は,

$$c_r^{(n)} = \binom{n}{r} \qquad (k=1 \text{ の場合})$$

$$c_r^{(n)} = \frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r} \qquad (k=2 \text{ の場合})$$

と表される.

$k \geq 3$ の場合について $U_n^{(k)}$ を求めるための簡単な一般公式は知られていない[2].ここでは,$U_n^{(3)}$ の一般公式を導こう.

2. $k=3$ における $c_r^{(n)}$

$k=3$ の場合における $U_n^{(3)}$ の値を得るためには,$c_r^{(n)}$ が求まればよい.$c_r^{(n)}$ の意味するところを視覚的に表現すると次のようになる.n^2 個の枡の中におかれた $3n$ 個の $*$ から r 個を同一の行,および列には並ばないように取り出す方法の数である [2] (図1を参照のこと).

$c_r^{(n)}$ の一般形が分かれば,$U_n^{(3)}$ の公式が求まることになる.以下の議論においては,$n \geq 3$ かつ $n \geq r \geq 0$ とする.r の値が小さい場合には $c_r^{(n)}$ を n の関数として求めることが容易にできる.明らかに

$$c_0^{(n)} = 1$$
$$c_1^{(n)} = 3n$$

である.次に $c_2^{(n)}$ を求める.これは $3n$ 個から2個の $*$ を取り出す方法の数である.最初の $*$ の取り出し方は $3n$ 通りである.そうすると,2つ目は一番目と同一の行および列には並ばないようにしなければならないので,取り出し方は $(3n-5)$ 通りとなる.$2!$ 個のうちのどちらを先にとっても同じであるから,求める方法の数は2つの数を掛けて $2!$ で割って得られる.

$$c_2^{(n)} = \frac{3}{2!}n(3n-5)$$

$c_3^{(n)}$ の計算は多少複雑であるが,同様の考察を行って求めることができる.最初の $*$ の取り出し方は,横に3つ並んだうちの端を選ぶ($2n$ 通り)か真ん中を選ぶ(n 通り)かの2種類に分類される.次に2つ目の $*$ を取り出すことにするが,同一の行および列には並ばないようにしなければならないので,2つ目を選ぶと5つの $*$ は3つ目として選ぶことが禁止される.この禁止された5つのうち1番目によってすでに禁止されているものの数は2,1,0のいずれかである.それに応じて3つ目の取り出し方は $(3n-8)$ 通り,$(3n-9)$ 通り,$(3n-10)$ 通りの3つの場合に分類できる.

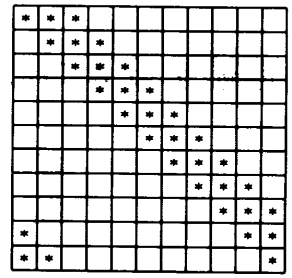

図1　$k=3$ の場合における占有問題の視覚的表現
Fig. 1　Visual representation of the occupation in the case of $k=3$.

最初に左端の $*$ を取り出した場合を考えよう.その取り出し方は n 通りである.3つ目の取り出し方が $(3n-8)$ 通りとなるような2番目の取り出し方はただ1通りである.3つ目の取り出し方が $(3n-9)$ 通りとなるような2番目の選び方は6通りである.3つ目の取り出し方が $(3n-10)$ 通りとなるような2番目の選び方は $(3n-12)$ 通りある.最初に右端の $*$ を取り出した場合も同じである.次に,最初に真ん中の $*$ を取り出した場合を考えよう.その取り出し方は n 通りである.3つ目の取り出し方が $(3n-8)$,$(3n-9)$,$(3n-10)$ 通りとなるような2つ目の選び方は,各々2,4,$(3n-11)$ 通りである.求める方法の数は $*$ を取り出す順序によらないから,1,2,3番目の取り出し方の数を掛けて異なる場合について加え合わせたものを $3!$ で割って,

$$c_3^{(n)} = \frac{1}{3!}\{2n[(3n-8)+6(3n-9) + (3n-12)(3n-10)] + n[2(3n-8)+4(3n-9) + (3n-11)(3n-10)]\} = \frac{1}{2}n(9n^2-45n+58)$$

と求まる.

$c_4^{(n)}$ の場合にも,$c_3^{(n)}$ と比べて場合分けはかなり繁雑になるが同様の手順が実行でき,その結果は変数 n についての4次式で表されるであろうと推定できる.そこで,

$$c_4^{(n)} = n(an^3+bn^2+cn+d)$$

と置いて直接に数え上げる方法で求めた $c_4^{(5)} = 95$,

表1 $c_r^{(n)}$ の値
Table 1 Values of $c_r^{(n)}$.

n	$c_4^{(n)}$	$c_5^{(n)}$	$c_6^{(n)}$	$c_7^{(n)}$	$c_8^{(n)}$	$c_9^{(n)}$	$c_{10}^{(n)}$
4	9						
5	95	13					
6	420	192	20				
7	1225	1085	371	31			
8	2834	3880	2588	696	49		
9	5652	10656	11097	5823	1278	78	
10	10165	24626	35645	29380	12535	2310	125
11	16940	50380	94457	108933	73238	26070	4125
12	26625	94128	218124	327840	309828	173984	52752
13	39949	163943	454220	848380	1049815	831233	397410
14	57722	270004	872648	1958004	3024035	3146234	2124927
15	80835	424839	1571715	4130895	7694295	10025995	8920788
16	110260	643568	2684936	8107024	17750146	27984400	31270632
17	147050	944146	4388567	14990889	37825085	70306339	95307423
18	192339	1347606	6909867	26372124	75489048	162134940	259773606
19	247342	1878302	10536089	44470165	142580617	348253185	646242801
20	313355	2564152	15624200	72305160	256948925	704514900	1489893222
21	391755	3436881	22611330	113897310	444681804	1354083500	3220804083
22	484000	4532264	32025950	174496828	742903282	2489859944	6589015818

n	$c_{11}^{(n)}$	$c_{12}^{(n)}$	$c_{13}^{(n)}$	$c_{14}^{(n)}$	$c_{15}^{(n)}$	$c_{16}^{(n)}$
11	201					
12	7296	324				
13	104390	12805	523			
14	878724	202811	22330	845		
15	5216160	1890665	388005	38730	1366	
16	24132848	12370476	3974736	732680	66864	2209
17	92570865	62706098	28481426	8191433	1368143	114971
18	306762048	261954681	157343310	63912861	16593024	2530116
19	903866537	940065242	712688138	382948059	140239703	33109571
20	2418300660	2984254025	2759465880	1873096780	907342584	301700575
21	5968840857	8562586942	9408265566	7797954630	4774529522	2099282136
22	13757761628	22570316131	28871450674	28470085105	21303470320	11842995626

$c_4^{(6)}=420$, $c_4^{(7)}=1225$, $c_4^{(8)}=2834$ を代入して係数 a, b, c, d を求める．その結果を用いてその他の n の場合について $c_4^{(n)}$ を計算する．$n=4$ から 50 までの $c_4^{(n)}$ を直接に数え上げることによって求め，前者と比較してみると，$n=4$ の場合を除いては両者は完全に一致していることが分かる．すなわち，

$$c_4^{(n)}=\frac{1}{8}n(27n^3-270n^2+921n-1078)+2\delta_{n,4} \tag{2}$$

ここに，$\delta_{n,4}$ は，Kronecker のデルタ関数である．このことから，式 (2) は n が 4 以上のすべての自然数についても成立するであろうと思われる．

同様に $r\geq 5$ の場合の $c_r^{(n)}$ もまた n の r 次多項式で表されるであろうと推定される．そこで我々は $c_5^{(n)}$ については $n=30$ まで，$c_6^{(n)}$, $c_7^{(n)}$ については $n=25$ まで，$c_8^{(n)}$, $c_9^{(n)}$ については $n=22$ まで，$c_{10}^{(n)}$ については $n=23$ まで，$c_{11}^{(n)}$, $c_{12}^{(n)}$, $c_{13}^{(n)}$, $c_{14}^{(n)}$, $c_{15}^{(n)}$, $c_{16}^{(n)}$ については $n=22$ まで，$c_{17}^{(n)}$ については $n=23$ まで，$c_{18}^{(n)}$ については $n=25$ まで，$c_{19}^{(n)}$ については $n=24$ まで，$c_{20}^{(n)}$ については $n=26$ まで，$c_{21}^{(n)}$, $c_{22}^{(n)}$ については $n=25$ までをコンピュータを用いて直接に数え上げてみた．結果の一部を**表1**に示す．計算は，DECstation 5000/240 で行ったが，$c_{13}^{(22)}$ および $c_{14}^{(22)}$ を求めるのに要した時間は，各々，およそ 2，3 日である．

$U_n^{(3)}$ の最初の方は，コンピュータを使って直接に数え上げる方法で求めることができるが，少し大きな n になると，同じ数え上げの方法でも，$U_n^{(3)}$ を直接に求めるよりも $c_r^{(n)}$ を求め，その後で式 (1) の右辺を計算することにより $U_n^{(3)}$ を求めた方が便利である．我々

は，この方法で n が 22 までの $U_n^{(3)}$ を求めた．結果を**表 2** に示す．

それでは，$c_r^{(n)}$ が多項式で表されるかどうか調べてみよう．表 1 から，n が偶数かつ $r=n$ の場合を除いて，$r \leq 11$ の場合には $c_r^{(n)}$ が n の r 次多項式で表されるという予想の正しいことが，数え上げの実行できた範囲内において確認できる．多項式で表した $c_r^{(n)}$ を**表 3** にまとめる．$r \geq 12$ の場合には上述の方法で $c_r^{(n)}$ の多項式を求めることは，ワークステーションを用いても時間がかかりすぎて実際上不可能である．これらの求め方については後述する．

$c_r^{(n)}$ の一般形を推測してみよう．第一項は，$(3n)^r/r!$ と表される．これは，重複組合せの個数 ${}_{3n}H_r$ の $3n \gg r$ における極限である．このこと，および問題の性格から，$c_r^{(n)}$ は，n よりもむしろ $3n$ の多項式と見なすほうが自然だと考えられる．さらに，$c_r^{(n)}$ を $3n$ の多項式と見なした場合に，第一項のみならず第二項以下の係数も r の関数として表されるだろうと思われる．もしそうならば，第 i 項は $r < i$ には現れないから，その係数は $r(r-1)\cdots(r-i+1)$ に比例する，すなわち，$\binom{r}{i}$ を因数として含むであろう．残りの部分を $-(-1)^i f_i(r)$ と表すことにすると $c_r^{(n)}$ の一般形は以下のようにまとめられる．

$$c_r^{(n)} = \frac{(3n)}{r!}\left[(3n)^{r-1} - \sum_{i=2}^{r}(-1)^i f_i(r)\binom{r}{i}(3n)^{r-i}\right] + \big(1+(-1)^n\big)\delta_{n,r} \qquad (3)$$

ここで $n \geq 3$ であったことを思い起こすと，最後の項 $(+2\delta_{n,r})$ は n が偶数の場合にのみ現れるといい換えることができるので，単に $(1+(-1)^n)$ を掛けるにとどめた．

関数 $f_i(r)$ の形について予想してみよう．$c_r^{(n)}$ の展開式 (3) の各項と表 3 を比較すると以下の事実が分かる．第二項目では，

$$f_2(2) = f_2(3) = f_2(4) = \cdots = f_2(11) = 5$$

よりすべての r について，

$$f_2(r) = 5$$

が成立するものと思われる．第三項目では，

$$f_3(3) = 58, \quad f_3(4) = \tfrac{307}{4}, \quad f_3(5) = \tfrac{382}{4},$$
$$f_3(6) = \tfrac{457}{4}, \quad f_3(7) = \tfrac{532}{4}, \quad f_3(8) = \tfrac{607}{4},$$
$$f_3(9) = \tfrac{682}{4}, \quad f_3(10) = \tfrac{757}{4}, \quad f_3(11) = \tfrac{832}{4}.$$

これらは，

$$f_3(r) = \frac{(75r+7)}{4}$$

表 2 $U_3^{(n)}$ の値
Table 2 Values of $U_3^{(n)}$.

n	$U_n^{(3)}$
3	0
4	1
5	2
6	20
7	144
8	1265
9	12072
10	126565
11	1445100
12	17875140
13	238282730
14	3407118041
15	52034548064
16	845569542593
17	14570246018686
18	265397214435860
19	5095853023109484
20	102877234050493609
21	2178674876680100744
22	48296053720501168037

とまとめられることが分かる．表 3 における $r \leq 11$ の $c_r^{(n)}$ について同様の操作を繰り返すと，**表 4** の $f_6(r)$ までを求めることができる．以上のことから一般に，$f_i(r)$ は

$$f_i(r) = a_{i-2}^{(i)} r^{i-2} + a_{i-3}^{(i)} r^{i-3} + \cdots + a_1^{(i)} r + a_0^{(i)} \qquad (4)$$

と表されるような r についての $(i-2)$ 次多項式であろうと推測できる．$f_7(r)$ 以降については後述する．

ある定まった r について n の異なるいくつかの $c_r^{(n)}$ の値を直接に数え上げることができた場合には，たとえ求められた個数が n 個未満であっても，式 (3) を利用することにより，$c_r^{(n)}$ を変数 n についての r 次多項式として求められることがある．関数 $c_r^{(n)}$ のいくつかの係数はすでに知られている関数 $f_i(r)$ を r について外挿することによって決定できるからである．多項式として $c_r^{(n)}$ が求まれば，その係数を用いてさらに大きな i について $f_i(r)$ を計算することができる．新たに得られた $f_i(r)$ をも利用すれば，さらに大きな r についても $c_r^{(n)}$ を多項式として求めることが容易となる．このようにして，式 (3) におけるさらに先の項の係数 $f_i(r)$ を逐次決定することができる．

さきほどまで直接には計算できなかった $c_{12}^{(n)}$ を n の関数として求めることを考えてみよう．決定すべきパラメータは，12 個である．表 4 において $f_6(r)$ まで分かっているのでそれらを用いれば，式 (3) において括弧内の n^{11} から n^6 までの係数は求まるので，残り

表3 n の関数としての $c_r^{(n)}$
Table 3 $c_r^{(n)}$ as functions of n.

$c_4^{(n)} =$	$n(27n^3 - 270n^2 + 921n - 1078)/8 + 2\delta_{n,4}$
$c_5^{(n)} =$	$n(81n^4 - 1350n^3 + 8595n^2 - 24870n + 27704)/40$
$c_6^{(n)} =$	$n(243n^5 - 6075n^4 + 61695n^3 - 319005n^2 + 842142n - 910440)/240 + 2\delta_{n,6}$
$c_7^{(n)} =$	$n(729n^6 - 25515n^5 + 377055n^4 - 3017385n^3 + 13819176n^2 - 34411020n + 36463440)/1680$
$c_8^{(n)} =$	$n(2187n^7 - 102060n^6 + 2065014n^5 - 23519160n^4 + 163100763n^3 - 689755500n^2 + 1649473956n - 1722905520)/13440 + 2\delta_{n,8}$
$c_9^{(n)} =$	$n(6561n^8 - 393660n^7 + 10440738n^6 - 160070904n^5 + 1553538609n^4 - 9785750940n^3 + 39114660492n^2 - 90804634416n + 93825486720)/120960$
$c_{10}^{(n)} =$	$n(19683n^9 - 1476225n^8 + 49666770n^7 - 984827970n^6 + 12696126219n^5 - 110465874225n^4 + 649310305680n^3 - 2488533427980n^2 + 5647518067248n - 5786238326400)/1209600 + 2\delta_{n,10}$
$c_{11}^{(n)} =$	$n(59049n^{10} - 5412825n^9 + 225173520n^8 - 5602634730n^7 + 92411140437n^6 - 1056692779065n^5 + 8490092397930n^4 - 47364811162020n^3 + 175716612614664n^2 - 391689863278560n + 398592350150400)/13305600$
$c_{12}^{(n)} =$	$n(177147n^{11} - 19486170n^{10} + 981886455n^9 - 29937252510n^8 + 614102389461n^7 - 8905163090670n^6 + 93215506132485n^5 - 704801233175490n^4 + 3774608479036692n^3 - 13644516405567960n^2 + 29976470945724960n - 30334841841427200)/159667200 + 2\delta_{n,12}$
$c_{13}^{(n)} =$	$n(531441n^{12} - 69087330n^{11} + 4146007437n^{10} - 151963979310n^9 + 3791209965543n^8 - 67863405302550n^7 + 894252177604071n^6 - 8745382286307810n^5 + 63030046784392116n^4 - 326658954703344120n^3 + 1156061715870926592n^2 - 2509504835975729280n + 2527668746667187200)/2075673600$
$c_{14}^{(n)} =$	$n(1594323n^{13} - 241805655n^{12} + 17039238489n^{11} - 739027936647n^{10} + 22022733031299n^9 - 476398166709465n^8 + 7700405616216027n^7 - 94213548652924701n^6 + 872924187185047998n^5 - 6052046625502457580n^4 + 30530549332186505784n^3 - 106161695605895372352n^2 + 228133669577594359680n - 228874956208317619200)/29059430400 + 2\delta_{n,14}$
$c_{15}^{(n)} =$	$n(4782969n^{14} - 837019575n^{13} + 68431000365n^{12} - 3465800453115n^{11} + 121537201949163n^{10} - 3123134838348525n^9 + 60674549715331695n^8 - 905704410565899945n^7 + 10443098644385398992n^6 - 92596312667892033000n^5 + 621729622988874494640n^4 - 3066449194496269567440n^3 + 10505129676409639253376n^2 - 22381188719297360198400n + 22377417493518139852800)/435891456000$
$c_{16}^{(n)} =$	$n(14348907n^{15} - 2869781400n^{14} + 269408700540n^{13} - 15754122034560n^{12} + 642012745903074n^{11} - 19321234328476080n^{10} + 443776232879771220n^9 - 7924453091191802880n^8 + 110961884109922576731n^7 - 1218803628721847608440n^6 + 10419239671488152308440n^5 - 68099901092623451338560n^4 + 329505523034184698490288n^3 - 1114525075944275339806080n^2 + 2356916097878592606316800n - 2349537873610334254848000)/6974263296000 + 2\delta_{n,16}$

6個のパラメータは $c_{12}^{(13)}$ から $c_{12}^{(18)}$ までの値を用いれば決定できる．多項式を用いて求めた $c_{12}^{(n)}$ と直接に数えあげたものを $n \geq 19$ の場合について比較することにより多項式の妥当性を確かめることができる．同様の操作により $c_{13}^{(n)}, c_{14}^{(n)}$ の多項式を求めることができる．$c_{14}^{(n)}$ までが多項式として求まると，関数 $f_7(r)$, $f_8(r)$ を求めることができる．

関数 $f_8(r)$ までが求まったので，式 (3), (4) を仮定すると $c_{15}^{(n)}$ の未定パラメータは7個となり，$c_{15}^{(15)}$ から $c_{15}^{(21)}$ までの値を用いると $c_{15}^{(n)}$ が n の関数として求まる．

それでは，$f_i(r)$ の係数 $a_{i-j}^{(i)}$ はどのようにして決まるのだろうか．表4における $i \leq 8$ までの $f_i(r)$ のリストを子細に検討すると，式 (4) の係数にもまた簡単な規則性のあることが読み取れる．

表4 関数 $f_i(r)$ のリスト
Table 4 List of $f_i(r)$.

	$f_i(r)$
$f_2(r) =$	5
$f_3(r) =$	$(75r+7)/4$
$f_4(r) =$	$(125r^2+35r+16)/2$
$f_5(r) =$	$(9375r^3+5250r^2+5045r+1442)/48$
$f_6(r) =$	$(9375r^4+8750r^3+13225r^2+8330r+960)/16$
$f_7(r) =$	$(984375r^5+1378125r^4+2905875r^3+2988755r^2+978054r-337808)/576$
$f_8(r) =$	$(2109375r^6+4134375r^5+11379375r^4+16827825r^3+10381770r^2-3190224r$ $-4693248)/432$
$f_9(r) =$	$(52734375r^7+137812500r^6+474468750r^5+938595000r^4+912093175r^3$ $-93915420r^2-903568876r-428336496)/3840$
$f_{10}(r) =$	$(29296875r^8+98437500r^7+411468750r^6+1038800000r^5+1436715875r^4$ $+284856500r^3-2076307100r^2-2410657840r-493286400)/768$
$f_{11}(r) =$	$(966796875r^9+4060546875r^8+20155781250r^7+62810343750r^6$ $+115861081875r^5+65699917195r^4-196615514480r^3-432501030412r^2$ $-238246171504r+37296973056)/9216$

$$
\begin{aligned}
a^{(i)}_{i-2} &= i\left(\frac{5}{2}\right)^{i-1},\\
a^{(i)}_{i-3} &= \frac{7}{4}\binom{i}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-3},\\
a^{(i)}_{i-4} &= \frac{(49i+764)}{120}\binom{i}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-4}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

この公式が正しいと仮定すると，$f_i(r)$ を決定する未定のパラメータの数は $i-4$ 個となり，表1の $c_r^{(n)}$ $(n \le 14)$ を用いて $f_9(r)$ が求まる．すると今度は，$a^{(i)}_{i-5}$ と $a^{(i)}_{i-6}$ の関数形を推定することができる．

$$
\begin{aligned}
a^{(i)}_{i-5} &= \frac{(343i^2+16387i+39270)}{4320}\binom{i}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-5},\\
a^{(i)}_{i-6} &= \frac{(2401i^3+231819i^2+3080066i-16976496)}{172800}\binom{i}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-6}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

公式 (5) および (6) から一般に $a^{(i)}_{i-j}$ もまた

$$a^{(i)}_{i-j} = g_j(i)\binom{i}{j}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-j} \tag{7}$$

と書き表すことができるだろうと思われる．ここに，$g_j(i)$ は i についての $j-3$ 次多項式である．

$$g_j(i) = b^{(j)}_{j-3}i^{j-3} + b^{(j)}_{j-4}i^{j-4} + \cdots + b^{(j)}_1 i + b^{(j)}_0 \tag{8}$$

公式 (5)，(6) がともに正しいと仮定すると，関数 $f_i(r)$ を決定する未定パラメータの数は $i-6$ 個となり，表1の $c^{(n)}_{15}$ までを用いて関数 $f_{10}(r)$ と $f_{11}(r)$ を推定することができる．

式 (3) および (4) がともに正しいと仮定すると，関数 $c^{(n)}_{16}$ を決定する未定パラメータの数は5個となり，それらは直接に数え上げて求めた $c^{(16)}_{16}$ から $c^{(20)}_{16}$ の値を用いて決定することができる．こうして求めた関数 $c^{(n)}_{16}$ を用いて，我々は，$c^{(21)}_{16}$ と $c^{(22)}_{16}$ の値を推定することができる．それらは，

$$c^{(21)}_{16} = 2099282136, \qquad c^{(22)}_{16} = 11842995626$$

であるが，これらは実際に数え上げて求めた値に一致している．

式 (3) と式 (4) の一般項を見比べると，2つは酷似していることが分かる．このことは，式 (8) にもまた構造があることを示唆しているように思われる．そこで，$b^{(j)}_{j-3}$ $(j=3,\ldots,6)$ を素因数に分解してみると，

$$b^{(3)}_0 = \frac{7}{2^2},\quad b^{(4)}_1 = \frac{7^2}{2^3\times 3\times 5},$$

$$b^{(5)}_2 = \frac{7^3}{2^5\times 3^3\times 5},\quad b^{(6)}_3 = \frac{7^4}{2^8\times 3^3\times 5^2}$$

となる．これを見ると，7のべきは $j-3$ に等しく，2のべきは（多分5のべきも）Fibonacci 数列に等しいようにも思われる．ここで，Fibonacci 数列が現れるのは，

$$c^{(n)}_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2$$

と表されること[1]と関連があるのかもしれない．しかし，これまでに得られた結果のみから $a^{(i)}_{i-7}$ および $b^{(j)}_{j-3}$ の一般形を推定するのは困難である．

3. あとがき

我々は，拘束付き置換の総数 $U_k^{(n)}(k=3)$ を表す式に現れる係数 $c_r^{(n)}$ を直接数え上げの方法で調べた結果，その範囲内 ($c_r^{(n)} < 3 \times 10^{10}$) において，簡単な規則性のあることを見いだした．

さらに，$c_r^{(n)}$ の持つ構造を利用して，$c_{r+1}^{(n)}$ を決定するアルゴリズムを発見することができた．実際に，$3n$ のベキ乗で展開した場合の第 11 項めまでを具体的に計算して求めてみせることに成功した．また，$c_r^{(n)}$ の一般項に現れる多項式 $f_i(r)$ の係数 $a_{i-j}^{(i)}$ にも $c_r^{(n)}$ の一般項と同様に簡単な規則性のあることを発見した．

ここで導いた公式が正しいという数学的に厳密な証明はできていないが，コンピュータで直接に調べた範囲を超えて一般に成り立つであろうと予想される．

我々は，$k=1,2$ の場合のように $c_r^{(n)}$ の一般形を閉じた形で求めることはできなかった．その原因は，もし推論が正しいならば，$c_r^{(n)}$ が無限の構造を有しているためである．すなわち，$c_r^{(n)}$ は n の r 次多項式で表されるが，n^{r-i} の係数（の一部）である $f_i(r)$ もまた r の多項式で表される．そして，関数 $f_i(r)$ の r^{i-j} の係数（の一部）$g_j(i)$ もまた簡単な規則性を持つ多項式で表される．さらにこの多項式の係数もまた簡単な規則性を持つ多項式であろうというようなことが無限に繰り返されている可能性がある．もしもそれが事実ならば，$k=1,2$ の場合と $k=3$ の場合とでは，その数学的構造が質的に異なっているといえるであろう．我々は，$k=3$ の場合における占有問題の解が無限の階層性を有していることの端緒を確実につかんだと信じているが，それを明確に示すためにはさらに膨大な計算が必要である．

もしも実際に組合せ理論が無限の入れ籠構造を内包しているのならば，この発見は大きな驚きであるばかりでなく，理論に一大転機をもたらすことになるかもしれない．

参考文献

1) Hall, M., Jr.: *Combinatorial Theory*, Blaisdell Publishing Company (1967). 岩堀信子（訳），組合せ理論，吉岡書店 (1971).
2) 山本幸一：組合せ数学，朝倉書店 (1989).

(平成 7 年 3 月 10 日受付)
(平成 8 年 9 月 12 日採録)

緑川　章一（正会員）

1951 年生．1979 年東北大学大学院理学研究科原子核理学専攻博士課程修了．理学博士．東京大学原子核研究所，京都大学基礎物理学研究所，理化学研究所で研究．その間，日本学術振興会奨励研究員．1994 年より青森大学工学部情報システム工学科助教授．理論物理学の研究に従事．著書「めぐる地球 ひろがる宇宙」（共著，共立出版）．日本物理学会，アメリカ物理学会各会員．

友田　敏章（正会員）

1947 年生．1976 年東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（物理学専攻）．西独 Max-Planck-Institut für Kernphysik (Heidelberg) 客員研究員などを経て，1992 年より青森大学工学部情報システム工学科教授．理学博士．原子核理論，数値解析などの研究に従事．日本物理学会会員．

堀端　孝俊（正会員）

1949 年生．1980 年東京都立大学大学院理学研究科博士課程修了．理学博士．東京大学原子核研究所，西独 Tübingen 大学研究員などを経て，日本ユニシス（株）入社，エキスパートシステム開発に従事．青森大学工学部設立準備委員会委員を経て 1992 年工学部情報システム工学科助教授．人工知能，原子核理論物理などの研究に従事．日本物理学会，日本応用数理学会各会員．

李　　磊（正会員）

1961 年生．1989 年西安交通大学大学院理学研究科計算数学専攻博士課程修了，理学博士．工学博士（東北大学）．1992 年より青森大学工学部情報システム工学科助教授．高速アルゴリズム，計算の複雑さ，並列処理，システムの安定性等の研究に従事．著書「待ち行列理論と計算機システム設計」（共著，西安科学技術出版）等．SIAM，日本応用数理学会，中国数学会等会員．