多項制約充足問題の双対問題による２項制約化の改善と検証

３Ｋ－１

石本 純一　成 孝徳　栗原 正仁
北海道工業大学

１．まえがき

以前、多項制約充足問題を２項制約化する手続きとして、多項制約充足問題を主問題とみなし、主問題の制約を変数とみなすことにより２項制約充足問題（双対問題）を生成する手法を提案したが、本論ではその部分的な改善点を述べ、更に他の２項制約化アルゴリズムに対する優位性を検証する。

２．制約充足問題

制約充足問題とは、規定された制約を満たす解を求める問題である。制約充足問題は一般に変数X、変域D、制約Cの組(X,D,C)により次のように定義される。

変数：$X_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$
変域：D_i （X_iのとりうる値）
制約：$C_{i_1 i_2 \cdots i_a}$ （変数$X_{i_1}X_{i_2},\cdots,X_{i_a}$間の可能な組み合わせ）

具体的な例として次の問題を考えてみる。

変数：X_1,X_2,X_3,X_4
変域：$D_i \quad (i=1,2,3,4)$
制約：$C_{123}=\{(1,2,3),(2,3,1),(3,2,1)\}$
$C_{234}=\{(1,2,3),(3,2,1),(2,1,3)\}$

３．双対問題による２項制約化

多項制約充足問題（主問題）が前節のように与えられたとき、この問題の双対問題(X',D',C')を以下のように定義する。

① 変数$X_{i_1}X_{i_2},\cdots,X_{i_a}$間の制約$C_{i_1 i_2 \cdots i_a}$があれば、$X'_{i_1 i_2 \cdots i_a}$を変数とする$(a \geq 2)$。
② $X'_{i_1 i_2 \cdots i_a}$の変域$D'_{i_1 i_2 \cdots i_a}=C_{i_1 i_2 \cdots i_a}$とする。
③ $X'_{i_1 i_2 \cdots i_a}$と$X'_{i_1 i_2 \cdots i_b}$間の２項制約を求める。

$$C'_{i_1 i_2 \cdots i_a, i_1 i_2 \cdots i_b} = \{(t,u) \mid t \in C_{i_1 i_2 \cdots i_a}, u \in C_{i_1 i_2 \cdots i_b}, t =_{\{X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_a}\} \cap \{X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_b}\}} u\}$$

ただし、$t =_S u$は「tとuにおいて集合Sに属する変数に対する値の割り当てが同じである。」ことを表す。

双対問題は、主問題の制約を変数と、主問題の変数を制約とみなしており、それによって２項制約充足問題となっている。また、双対問題の解から主問題の解を次のように導くことができる。

$X_{i_1 i_2 \cdots i_a}$の値が$(d_1,d_2,\cdots,d_a)$のとき、
$X'_{i_1}=d_1,\cdots,X'_{i_a}=d_a$とする。

具体例として前節に示した多項制約充足問題の双対問題(X',D',C')を以下に示す。

変数：X'_{123},X'_{234}
変域：$D'_{123}=\{(1,2,3),(2,3,1),(3,2,1)\}$
$D'_{234}=\{(1,2,3),(3,2,1),(2,1,3)\}$
制約：$C'_{123,234}=\{((3,2,1),(2,1,3))\}$
解：$(X'_{123},X'_{234})=((3,2,1),(2,1,3))$

主問題の解は$(X_1,X_2,X_3,X_4)=(3,2,1,3)$となる。

４．２項制約化の改善点

前述の２項制約化アルゴリズムは、もともとの問題に２項制約が部分的に含まれる場合も同様に双対問題化してしまう。そこで、２項制約はそのままの形で残し、そのかわりそれに関わる変数もそのまま残すような混合的な変換法に拡張（改善）した。

５．お絵描きロジックの例題

５.１ お絵描きロジック

さて、具体的な多項制約充足問題の例として「お絵描きロジック」の問題を考える。この問題は、図５.１に示すようにタテヨコのそれぞれの列を与えられた条件にしたがって矛盾なく塗りつぶすパズルゲームである。表の数字はその列で連続して塗りつぶされる黒マスの数を表し、同列に２つ以上の数字がある場合その間には必ず１つ以上の白マスが入らなければならない。

この問題を最も単純に考えると、１マスを変数とみなしそれぞれのマスが塗りつぶされるか否かを考える。つまり図５.１の問題の場合、変数が２５個で各列が５つの変数間の制約で構成されている５項制

約充足問題と考えられる。

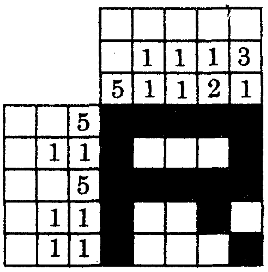

図５．１

５．２　お絵描きロジックの２項制約充足問題化

まず、各列において塗りつぶしの条件を表す数字の集合をS、その要素を$i_1, i_2, \cdots, i_m$、黒マスの前に置く白マスの個数をk、マスの桁数をnとするとき考えられる塗りつぶしパターンをすべて生成する。

① $S=\phi$のときその列をすべて白マスとする。

② Sの要素が１つあるいは最後の要素のとき その要素をiとすると、

Ⅰ．$i>n$のとき
無効な塗りつぶしパターン

Ⅱ．$i \le n$のとき
順に白マスをk個$(0 \le k \le n-i)$、黒マスをi個、白マスを$n-k-i$個とする（図５．２）。

③ Sの要素が複数個のときで最後の要素でないとき、Sの要素のうち最左のものをiとすると、

Ⅰ．$i+2>n$のとき
無効な塗りつぶしパターンとする

Ⅱ．$i+2 \le n$のとき
順に白マスをk個$(0 \le k \le n-i-1)$、黒マスをi個、白マスを１個、残りのマスについて再帰的に②あるいは③の手続きを実行する。

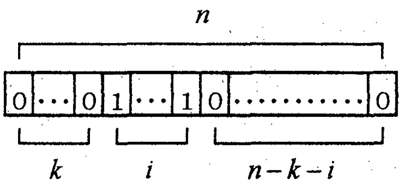

図５．２

新しい制約はタテヨコの各列（新しい変数）が交わるところで同じ値、すなわち白マスどうしまたは黒マスどうしになる塗りつぶしパターンの組み合わせとする。

６．双対問題による２項制約化の優位性

双対問題による２項制約化における優位性として、実際に２項制約化された問題を解く際に探索空間を絞り込むための前処理の段階での効率を挙げることができる。これまでの２項制約化アルゴリズムの場合、図６．１に示すようにもともとの問題の制約を新たな変数(X_5, X_6)として問題に追加する形をとり、追加された変数と既存の変数間$(X_1, \cdots, X_4)$の２項制約を考える形をとっている。これにより制約の数が増えてかつ各制約は相対的に局所的になる。そのため、局所整合をとるための前処理であるアーク整合アルゴリズムを適用してもその影響が弱い場合が多い。一方、双対問題による２項制約化アルゴリズムの場合、図６．２に示すように、もともとの問題の制約を新たな変数(X'_{123}, X'_{234})とみなしその間の２項制約を直接考えるため、制約の数が減り相対的に大局化される。そのためアーク整合アルゴリズムを適用した場合その影響が強く現れる。実際、図６．１、図６．２はいずれもすでにアーク整合になっているが、図６．１では解は求まっておらず、図６．２では事実上解が求まっている。

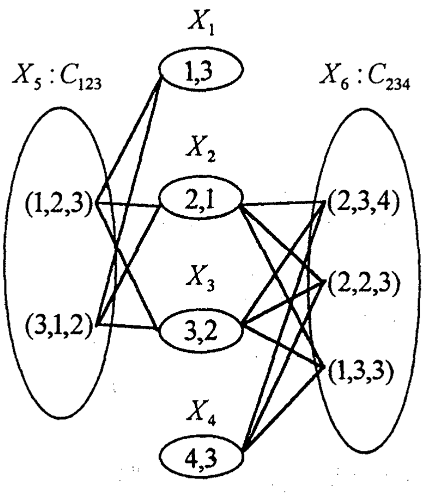

図６．１

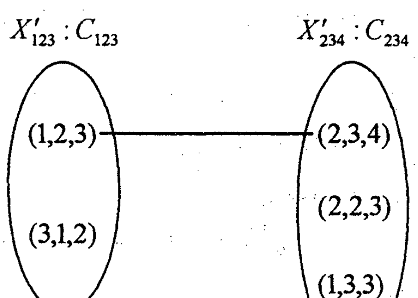

図６．２

参考文献

「知識表現と高速推論」石塚 満 著　1996　丸善