テクニカルノート

Givens 回転による多項式剰余列の拡張算法

大迫尚行† 杉浦洋† 鳥居達生†

与えられた2つの1変数多項式から多項式剰余列を生成する数値的に安定な拡張算法を提案する．剰余列生成の過程で，多項式の主係数消去に対して，我々はGivens回転を用いる．この簡単な直交変換の利用が，本算法の数値的安定性を保持するうえで重要な役割を演ずる．

An Extended Algorithm by Givens Rotations for the Polynomial Remainder Sequence

NAOYUKI OHSAKO,† HIROSHI SUGIURA† and TATSUO TORII†

In the present paper, we propose an extended algorithm to generate the polynomial remainder sequence for given two univaliate polynomials. For the elimination of leading coefficient of the polynomials in the generation of the remainder sequence, we use Givens rotations. The utilization of this simple orthogonal transformation plays an important role in our stable algorithm to assure the numerical stability.

1. はじめに

1変数 z の実係数多項式 $F(z)$, $G(z)$ から生成される多項式剰余列において，その任意の要素 $P(z)$ は

$$P(z) = A(z)F(z) + B(z)G(z)$$

と表される．剰余列の生成法として従来よりEuclid算法が知られているが，数値的に不安定性であるので，その改良が多く研究されている．たとえば，文献2)~4)．剰余多項式だけでなく，それに付随する多項式 A, B, すなわち (P, A, B) の列を同時に求める算法を剰余列生成の拡張算法という．この拡張算法は，関数の有理関数近似において，よく用いられる．Euclid算法に対する拡張算法は，拡張Euclid算法と呼ばれる．

我々は，Givens回転を用いた剰余列生成の拡張算法を提案する．

2つの多項式

$$F = f_m z^m + f_{m-1} z^{m-1} + \ldots + f_0,\ f_m \neq 0,$$
$$G = g_n z^n + g_{n-1} z^{n-1} + \ldots + g_0,\ g_n \neq 0$$

において，$m \geq n$ として，記号を定義する．

$\mathbf{lc}(F)$ ：F の主係数 f_m.

$\deg F$ ：F の次数 m.

F の形式的次数 ：必ずしも $f_m \neq 0$ でないとき，m を F の形式的次数と呼ぶ．

$\mathbf{gcd}(F, G)$ ：F と G の最大公約因子．

$\|F\|_1$, $\|F\|_2$ ：F の1ノルムと2ノルムであって

$$\|F\|_1 := \sum_{k=0}^{m} |f_k|,\ \|F\|_2 := (\sum_{k=0}^{m} |f_k|^2)^{1/2}.$$

$L(F, G)$ ：$m + n - 2\mu$ 個の多項式系

$$\{z^r F,\ z^s G\ ;\ 0 \leq r < n - \mu,\ 0 \leq s < m - \mu\}$$

が張る実線形空間．ここで，$\mu = \deg \gcd(F, G)$．この線形空間の次元 $\dim L(F, G)$ は

$$\dim L(F, G) = \deg F + \deg G - 2\mu.$$

$F \bmod G$ ：F を G で割ったときの剰余．

$\{P_i\}_{i=0}^{t}$ ：F と G の剰余列．次のEuclid算法によって定義する．$P_0 = F$, $P_1 = G$ とおいて

$$P_{i+1} = P_{i-1} \bmod P_i,\ i = 1, 2, \ldots, t,$$
$$P_{t+1} = 0,\ P_t \neq 0.$$

特に，$P_t = \gcd(F, G)$ である．

次節で示す本算法の特長は，各剰余多項式を

$$P_i = A_i F + B_i G$$

とするとき，直交変換によって (P_i, A_i, B_i) を生成することである．そのため数値的安定性がよい．さらに，剰余列の各要素は，正規化条件

$$\|A_i\|_2^{\,2} + \|B_i\|_2^{\,2} = 1$$

† 名古屋大学工学研究科情報工学専攻
Department of Information Engineering, School of Engineering Nagoya University

を満たしている．

本算法において，剰余列の生成と同時に $L(F,G)$ の次数の相異なる基底が生成できる．その基底を $\{R_k\}$ とすれば，次の性質が成り立つ．

基底 $\{R_k\ ;\ 1 \le k \le m+n-2\mu\}$ において

$R_k = A_kF + B_kG$,

$\deg A_k < n-\mu$, $\deg B_k < m-\mu$

として，多項式 A_k, B_k をそれぞれ $n-\mu, m-\mu$ 次元行ベクトルに対応させて，この2つを (A_k, B_k) と並べて，$m+n-2\mu$ 次元行ベクトルとみる．このとき，これらの $m+n-2\mu$ 個の行ベクトルは，2 ノルムの意味で直交する．すなわち

$$A_iA_j^T + B_iB_j^T = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

次に，主係数消去の演算を定義する．形式的次数の等しい2つの多項式 S_0, $S_1 \in L(F,G)$ にともなって

$X_0 = (S_0, A_0, B_0)$, $X_1 = (S_1, A_1, B_1)$

とおく．S_1 の主係数を消去して，S_1 の形式的次数を 1 次だけ減次する演算子 Givens を定義する．

$$\text{Givens}\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix},\ \beta \neq 0$$

ただし，$c = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $s = \dfrac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$,

$\alpha = \mathrm{lc}(S_0)$, $\beta = \mathrm{lc}(S_1)$.

$\beta = 0$ のとき，演算子 Givens は恒等変換とする．

2. 算　　法

多項式 F, G を与え，Givens 回転による拡張算法によって，剰余列と線形空間 $L(F,G)$ の次数の相異なる基底を求める．

入力： F, G $(\deg F \ge \deg G)$.

出力： 剰余列 $U_i = (P_i, A_i, B_i)$, $0 \le i \le t$

および線形空間 $L(F,G)$ の次数の相異なる基底

$\{z^{n-\mu-j}Q_j\}_{j=1}^{n-\mu} \cup \{R_k\}_{k=1}^{m-\mu}$ を構成する列

$V_j = (Q_j, \cdot, \cdot)$, $\deg Q_j = m$,

$W_k = (R_k, \cdot, \cdot)$, $\deg R_k = m-k$,

$1 \le j \le n-\mu$, $1 \le k \le m-\mu$.

ここで，$\mu = \deg P_t = \deg \gcd(F,G)$.

初期化：

$m := \deg F$; $n := \deg G$; $d := m-n$;

$U_0 = (P_0, A_0, B_0) := (F, 1, 0)$;

$U_1 = (P_1, A_1, B_1) := (G, 0, 1)$;

for $i := 1$ **to** d **do**

$W_i := z^{d-i}U_1$;

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ W \end{bmatrix} := \text{Givens}\begin{bmatrix} U_0 \\ z^dU_1 \end{bmatrix};$$

反復計算：

for $j := 1$ **to** n **do**

begin $V := W$;

for $i := 1$ **to** $d+j-1$ **do**

$$\begin{bmatrix} W_i \\ V \end{bmatrix} := \text{Givens}\begin{bmatrix} W_i \\ V \end{bmatrix};$$

if $P \equiv 0$ **then** $l := j$ として

剰余列の選出へ．ここで，$V = (P, A, B)$.

else begin

$W_{d+j} := V$; $U_{j+1} := V$;

$$\begin{bmatrix} V_{j+1} \\ W \end{bmatrix} := \text{Givens}\begin{bmatrix} V_j \\ zW \end{bmatrix};$$

end

end;

$l := n+1$;

剰余列の選出：

$k := 1$; $r := 2$;

while $r \le l$ **do**

begin $k := k+1$;

$U_k = (P_k, A_k, B_k) := U_r$;

$r := n - \deg P_k + 2$;

end;

$t := k$ として停止．

3. 数　値　例

F と G が与えられたとき，拡張算法による剰余列 $U := (P, A, B)$ を同次方程式 $AF+BG-P=0$ の解と解釈して，その残差 r を調べる．比較のため，U は $\gamma \cdot (\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2)^{1/2}$ で正規化する．ここで，$\gamma = (\|F\|_1^2 + \|G\|_1^2)^{1/2}$ である．本算法においては，特に，正規化条件 $\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2 = 1$ を満たしているので，γ で正規化するだけでよい．このときの残差 2 ノルムが $O(\varepsilon_M)$ ならば計算結果は限界の精度である．本算法において，多項式 P の零判定は，正規化後の多項式の 2 ノルムが $O(\varepsilon_M)$ であれば，零とみなす．多項式の係数の零判定も同様にして，正規化後の係数の絶対値が $O(\varepsilon_M)$ であれば，零とみなす．以下の計算は単精度演算 $(\varepsilon_M = 2^{-23} \approx 0.12 \times 10^{-6})$ で行う．

例 (1). 互いに素である多項式

$F = z^5$, $G = 0.01z^3 + z^2 + 1$

に対して，拡張 Euclid 算法と本算法を適用した結果を**表 1** に示す．与えられた多項式 F, G の一方の主係数の絶対値が小さいとき，従来の算法では桁落ちのため計算が困難とされていたが，本方法では難なく求まっている．

表1 拡張 Euclid 算法と本算法との比較
Table 1 Comparison of extended Euclidean algorithm and our method.

残差	拡張 Euclid 算法	本算法
$\|r_2\|_2$	0.00	0.00
$\|r_3\|_2$	0.26×10^{-2}	0.38×10^{-7}
$\|r_4\|_2$	0.22×10^{-2}	0.23×10^{-7}

表2 例(2)の結果
Table 2 Result of Example (2).

(m,n)	残差ノルムの最大値	GCD
(20,10)	0.62×10^{-7}	$z^2 + 0.5000001z$ $+0.2500001$
(100,50)	0.17×10^{-6}	$z^2 + 0.5000002z$ $+0.2500000$

表3 例(3)の結果
Table 3 Result of Example (3).

残差ノルムの最大値 $= 0.56 \times 10^{-7}$

$$\mathrm{GCD} = z^9 + 0.9000018z^8 + 0.8000004z^7 + 0.7000020z^6 + 0.6000010z^5 + 0.5000012z^4 + 0.4000010z^3 + 0.3000008z^2 + 0.2000005z + 0.1000002$$

例(2). 2次の最大公約因子をもつ多項式

$$F = \left(\sum_{k=0}^{m-2} \cos k \cdot z^k\right)(z^2 + 0.5z + 0.25),$$

$$G = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \sin k \cdot z^k\right)(z^2 + 0.5z + 0.25).$$

例(3). 9次の最大公約因子をもつ多項式

$$F = \left(\sum_{k=0}^{91} \cos k \cdot z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{9} (l+1) \cdot z^l\right),$$

$$G = \left(\sum_{k=0}^{81} \sin k \cdot z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{9} (l+1) \cdot z^l\right).$$

例(2), (3)において，F と G の係数は倍精度で計算してから単精度に丸める．残差ノルムの最大値と主係数を1にしたGCDを**表2**，**表3**に示す．単精度演算の拡張 Euclid 算法ではいずれの問題も丸め誤差のため計算が不可能であった．

しかしながら，本算法によって，高次の問題に対しても $O(\varepsilon_M)$ の精度で剰余列要素を求めることができた．なお，最近，代数演算と数値的な近似演算とを融合したGCD算法に関する研究が精力的に行われていることを付記する[1)]．

4. おわりに

実係数多項式 $F(z)$, $G(z)$ の剰余列を Givens 回転を用いて生成する数値的に安定な拡張算法を提案した．同時に線形空間 $L(F,G)$ の次数の異なる基底も精度よく求めることができた．

有意義なご指摘をいただいた査読者に感謝する．

参考文献

1) Corless, R.M., Gianni, P.M., Trager, B.M. and Watt, S.M.: The Singular Value Decomposition for Polynomial Systems, *Proc. ISSAC'95, Montreal*, pp.195–207 (1995).
2) Gragg, W.B. and Gutknecht, M.H.: Stable Look-ahead Versions of the Euclidean and Chebyshev Algorithms, *International Series of Numerical Mathematics*, Vol.119, pp.231–260 (1994).
3) 大迫尚行，櫻井鉄也，杉浦 洋，鳥居達生：多項式剰余列の安定な生成法，日本応用数理学会論文誌，Vol.5, No.3, pp.241–255 (1995).
4) 佐々木建昭，今井 浩，浅野孝夫，杉原厚吉：計算代数と計算幾何，第2章，岩波講座応用数学5，岩波書店 (1993).

(平成8年6月6日受付)
(平成8年11月7日採録)

大迫 尚行

1967年生．1990年福岡大学理学部応用数学科卒業．1992年鹿児島大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了．1995年名古屋大学大学院工学研究科博士課程後期課程満了．現在同大学工学研究科研究生．日本応用数理学会会員．

杉浦 洋（正会員）

1952年生．1981年名古屋大学大学院工学研究科博士課程後期課程満了．工学博士．現在，同大学工学研究科助教授．高速フーリエ変換と数値積分法の研究に従事．日本応用数理学会会員．

鳥居 達生（正会員）

1934年生．1957年九州工業大学電気工学科卒業．1964年大阪大学工学部助手．工学博士．現在，名古屋大学工学研究科情報工学専攻教授．数値解析と数学ソフトウェアの研究に従事．日本数学会会員，日本応用数理学会会員．