3N－2

1次微分量による自由曲線・曲面の設計-(2) システム-*

崎山 直樹，三浦 憲二郎，金子 透
静岡大学工学部機械工学科計測情報講座

1 はじめに

美しい曲線・曲面とはどのようなものか．これに対して様々な角度から研究がされているが，明確な定義は存在しない．しかし，「曲率」や「曲率の変化率」が重要であることが明らかになっている．

曲線の方向ベクトルを単位4元数曲線を使って指定することが三浦[1]によって提案された．文献[1]では，この指定法を利用して単位4元数積分曲線(quaternion integral:QI curve)を提案している．また，文献[2]では，QI曲線による3次元空間の点列の内挿法を提案している．本研究では，単位4元数積分曲線・曲面を用いたモデリングシステムを提案する．

2 単位4元数積分曲線・曲面

2.1 単位4元数積分曲線

一般に空間曲線は次式で表される：

$$\boldsymbol{C}(s)=\boldsymbol{P}_0+\int_0^s q(s)\hat{v}_0 q^{-1}(s)ds. \tag{1}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{v}}_0$は単位定数ベクトルである．本研究ではこの曲線を単位4元数積分曲線(unit quaternion integral curve:QI curve)と呼ぶ．

曲線の全長をl，パラメータ$t=s/l, \hat{v}_0=\hat{v}_x=(1,0,0)$として式(2)を以下のように書き改める：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}(s) &= \boldsymbol{P}_0+\int_0^s q(\frac{s}{l})\hat{v}_0 q^{-1}(\frac{s}{l})ds\\ &= \boldsymbol{P}_0+l\int_0^t q(t)\hat{\boldsymbol{v}}_x q^{-1}(t)dt, \qquad (2)\\ &\quad \text{ただし}\ 0\le t\le 1.\end{aligned}$$

この式の$q(t)$を，第1報で論じた接線制御の問題点を考慮して，累積基底関数(cumulative basic function) $\tilde{B}_{i,k}(u)$を用いて以下のように定義する：

$$q(u)=(\prod_{i=n}^{1}\exp(\omega_i\tilde{B}_{i,k}(u)))q_0. \tag{3}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{i,k}(u) &= \sum_{j=1}^{n}B_{j,k}(u)\\ &= \begin{cases}1 & (u\ge u_{i+k-1})\\ \sum_{j=i}^{i+k-1}B_{j,k}(u) & (u_i<u<u_{i+k-1})\\ 0 & (u\le u_i)\end{cases}\end{aligned}$$

また，$B_{i,k}$はB-spline基底関数であり，以下のように定義される：

$$\begin{aligned}B_{i,1}(u) &= \begin{cases}1 & (u_i<u<u_{i+1})\\ 0 & (\text{それ以外のとき}),\end{cases}\\ B_{i,k}(u) &= \frac{u-u_i}{u_{i+k-1}-u_i}B_{i,k-1}(u)\\ &\quad+\frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}}B_{i+1,k-1}(u). \qquad (4)\end{aligned}$$

さらに，ω_iは$(i-1)$番目の制御接線方向$\boldsymbol{t}_{i-1}$が，i番目の制御接線方向$\boldsymbol{t}_i$に一致するように回転するときの回転軸方向であり，次式により定義される：

$$\omega_i=\frac{1}{2}\sin^{-1}(|[\boldsymbol{t}_{i-1},\boldsymbol{t}_i]|)\frac{[\boldsymbol{t}_{i-1},\boldsymbol{t}_i]}{|[\boldsymbol{t}_{i-1},\boldsymbol{t}_i]|}. \tag{5}$$

2.2 単位4元数積分曲面

単位4元数積分曲面(unit quaternion integral surface:QI surface) $\boldsymbol{S}(s,t)$は，次式で定義される：

$$\boldsymbol{S}(s,t)=\boldsymbol{P}_0+\int_{path}(\boldsymbol{s}(s,t)ds+\boldsymbol{t}(s,t)dt). \tag{6}$$

ここで，$path$はパラメータ空間上でその原点から点(s,t)への積分経路であり，一次微分ベクトル$\partial\boldsymbol{S}(s,t)/\partial s=$

*Design of Free-Form Curves and Surfaces by 1st Derivatives -(2)System-, Naoki Sakiyama, Kenjiro T. Miura, Toru Kaneko, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Hamamatsu 432, Japan

$s(s,t)$ は，次式で与えられる：

$$s(s,t) = q_s(\frac{s}{l_s}, \frac{t}{l_t})\hat{v}_0 q^{-1}(\frac{s}{l_s}, \frac{t}{l_t}) \quad (7)$$
$$= q_s(u,v)\hat{v}_0 q_s^{-1}(u,v). \quad (8)$$

ここで，$l_s(t)$ は t がある値での QI 曲面の s 方向の長さ，l_tは $s=0$ での境界線の長さであり，$u = s/l_s(t), v = t/l_t$ である．また $q_s(u,v)$ は，接線ベクトル$t_{si,j}, j = 0,\ldots,n$ を混ぜ合わせて $q_{si}(v)$ を計算し，それらを u 方向に混ぜ合わせて得られる．

3 システム概要

本システムに基づいた自由曲線・曲面設計の流れを図 1 に示す．まず，システムが直線や平面である初期曲線・曲面を生成する (1)．そして，デザイナーは曲線・曲面の制御接線方向を操作する (2)(5)．また，曲線・曲面の長さ (3)(6) や制御接線の数 (4)(7) を，必要であれば変化させる．システムは生成した曲線・曲面を表示し (8)，デザイナーは曲線・曲面を評価する (9)．この時点で O.K. ということになれば生成完了であり，不良ということになれば (2)-(7) の処理を繰り返す．図 1 中，点線で囲んだ部分が本システムによって処理される．

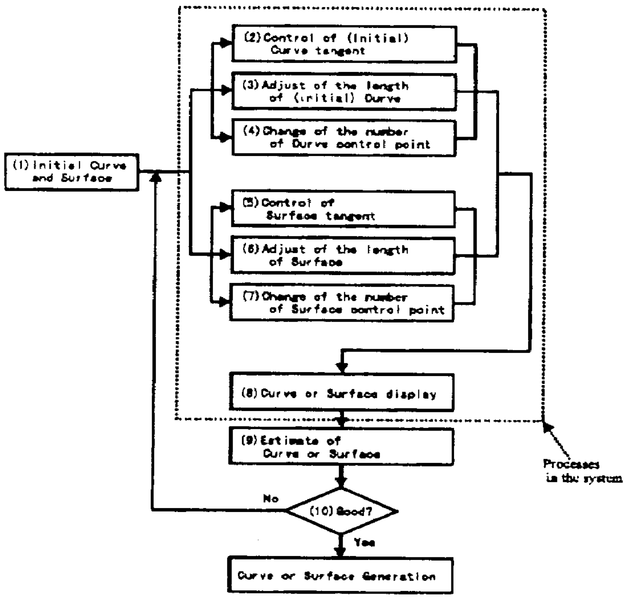

図 1: Design flow

4 単位 4 元数積分曲面の例

図 2(c) に初期曲線の制御接線 3 個，曲面の制御接線が $3 \times 3 = 9$ 個から成る QI 曲面の例を示す．図 2(c) の QI 曲面の初期曲線を凸から凹に変化させた例が図 2(a) であり，図 2(c) の QI 曲面上の $u = 1$ の制御接線を変化させた例が図 2(b) である．また，図 2(c) の初期曲線と曲面の制御接線の両方を操作した例が図 2(d) である．さらに，図 2(c) の初期曲線の制御接線数を 4 個に，曲面の制御接線数を $4 \times 4 = 16$ 個にした例が図 2(e) である．

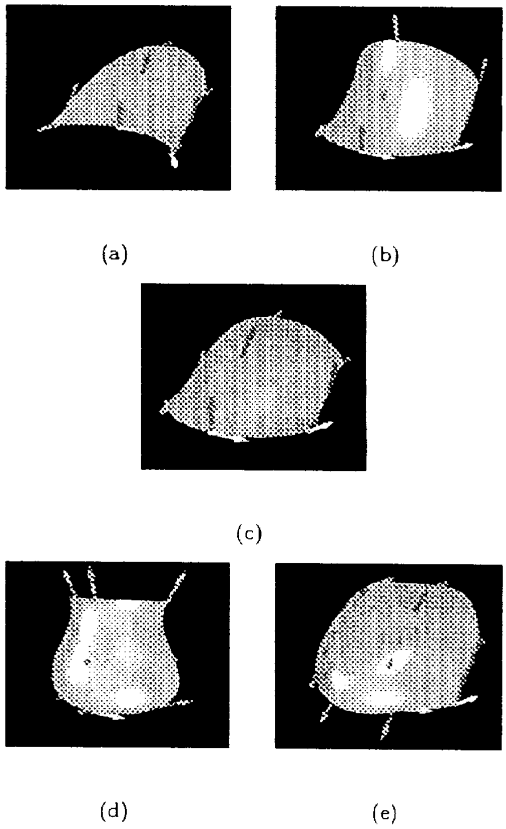

図 2: QI surface example

5 おわりに

本研究では，接線方向という 1 次微分量を用いた自由曲線・曲面を設計するシステムの概要と，曲面の例を示した．

参考文献

[1] 三浦 憲二郎, “単位 4 元数積分曲線,” 情報処理学会論文誌，vol.38，no.11，pp.2227-2236，1997.

[2] 三浦 憲二郎，“単位 4 元数積分曲線による点列の内挿,” 情報処理学会論文誌, vol.39, no.7, pp.2159-2167, 1998.