

曲率が弧長の区分 2 次関数となる G^3 補間曲線

黒田 満[†] 齊藤 剛^{††}
渡辺 由美子^{†††} 東 正毅[†]

計算機援用の形状設計に有用な、曲率が弧長の区分 2 次関数となる曲率微分連続な補間曲線の導き方について述べている。弧長によってパラメトリック表現されるこの曲線は、曲率がスパン内に変曲点を持たず比較的变化が少ないという好ましい性質を持っている。汎用の数式処理システムを導入して与点通過と境界条件からなる非線形連立方程式を解いてこの曲線を導いている。記号式も数値と同様に処理できるのでアルゴリズムを簡潔に記述することができるとともに種々の境界条件をデータとして与えることができる。また、導出された曲線の各スパンを G^2 連続な 2 クロソイド弧で局所的に近似する方法を示して従来曲線との整合性をとっている。

Interpolating G^3 Curve whose Curvature is Piecewise Quadratic of Arclength

MITSURU KURODA,[†] TSUYOSHI SAITOH,^{††} YUMIKO WATANABE^{†††}
and MASATAKE HIGASHI[†]

This paper presents a method for obtaining an interpolating G^3 curve useful for computer aided design, whose curvature is piecewise quadratic of arclength and so does not have any inflection point in each span. The curve is derived from a system of nonlinear equations based on interpolation conditions and boundary conditions by general purpose computer algebra system. The method describes an algorithm concisely and tries various boundary conditions because it can manipulate symbolic expressions as well as numerical data. A method is also presented for approximating each span of the derived curve as a G^2 bi-clothoid for consistency with the conventional curve.

1. はじめに

線分列や円弧列はもちろんであるが、それらを拡張したクロソイド (Cornu らせん: 曲率が曲線の長さに比例する曲線) 弧列によって表される補間曲線も形状設計の分野で古くから研究されて^{1)~6)}利用されてきた。この曲線をさらに拡張すると曲率が弧長の区分 2 次関数で表されて「弧長に関して C^3 (つまり G^3)」連続な補間曲線となる。この平面曲線は次のような優れた性質を持っている; 弧長によってパラメトリック表現されている, 2 次関数に変曲点を持たないために比較的単純な好ましい形の曲率グラフを持っている, 曲率の微分が連続であるためにタービンプレードやカ

ム的设计等^{7)~9)}に利用できる。しかし、この曲線を導くためには複雑な多点境界値問題を解かなければならないために一般的な導出法がまだ開発されていない。

そこで本研究では、今やパソコンでも利用できるようになった汎用の数式処理システムを導入することによって、この曲線を手軽に導く方法を示す。導出される新曲線はとくに困難なく生成することができるが、必要なら周知のクロソイド曲線で近似して一般的で精度の良い有理式近似¹⁰⁾を用いて生成してもよい。そこで、導出曲線の各スパンを G^2 連続な 2 クロソイド弧で (双クロソイド) 近似する簡単な局所的方法を示す。

以下、まず平面曲線の弧長による表現と表記法を示してから問題を記述してその解法について述べる。次に、いろいろな境界条件を満たす曲線を具体的に導いて曲線の性質を明らかにする。続いて、導出曲線を双クロソイド近似する方法を述べる。

2. 弧長による平面曲線の表現

曲線 r を (始点から曲線に沿って測った有向) 弧長

[†] 豊田工業大学工学部

Faculty of Engineering, Toyota Technological Institute

^{††} 東京電機大学工学部

Faculty of Engineering, Tokyo Denki University

^{†††} 東京電機大学大学院

Graduate School of Engineering, Tokyo Denki University

s で微分すると単位接線ベクトルを得る.

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ここで, ψ は \mathbf{r}' が x 軸上の単位ベクトルとなす角である. したがって平面曲線を始点 $(x_0, y_0)^t$ から弧長 s に関して積分することによって次のように表すことができる (以下, 右肩の t で転置を表す).

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^s \cos \psi(\tau) d\tau \\ \int_0^s \sin \psi(\tau) d\tau \end{pmatrix}. \quad (2)$$

この平面曲線の曲率は接線角 ψ を弧長に関して微分することによって導かれる.

$$\kappa = \frac{d\psi}{ds}.$$

曲率 κ は曲線に沿って進むときに左に曲がれば正, 右に曲がれば負である.

曲率が弧長の線形関数となる曲線はクロソイド曲線と呼ばれ, それを曲率連続に次々と与点を通るように接続した曲線はクロソイドスプライン補間曲線と呼ばれる. この曲線の曲率グラフは折れ線となる. 本研究では, 曲率が弧長の 2 次の B -スプラインで表される補間曲線を取り扱う. したがって, 曲率を s で積分した $\psi(s)$ は 3 次の B -スプラインで表されることになる. 我々はこの B -スプラインの de Boor 縦座標¹¹⁾と各スパンの弧長を未知数として対象曲線を導くことにする. 本論文では次のような表記法を用いる.

- 与点列: $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_i = (x_i, y_i)^t,$

$$\Delta \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

- 各スパンの弧長列: $\Delta s_0, \Delta s_1, \dots, \Delta s_{n-1}.$
ただし, 与点 \mathbf{p}_0 から \mathbf{p}_i までの弧長を s_i とし, $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ とする.

接線角 ψ を 3 次の B -スプラインで表すために次のように表記する (図 1 参照).

- 節点列: $s_{-2}, s_{-1}, \dots, s_{n+2}.$

両端では次のように三重節点とする.

$$s_{-2} = s_{-1} = s_0 = 0, \quad s_n = s_{n+1} = s_{n+2}.$$

- de Boor 縦座標列: $d_{-1}, d_0, \dots, d_{n+1}.$

これらに対応する s 軸上の点は Greville 横座標¹¹⁾であるが, 本研究ではこの値をとくに使わないので図 1 の中に示していない.

- Bézier 縦座標¹¹⁾列: $b_0, b_1, \dots, b_{3n}.$

図 1 では見やすくするために真上にずらして示している. また, 6 章では C^1 連続な 2 つの 2 次の Bézier

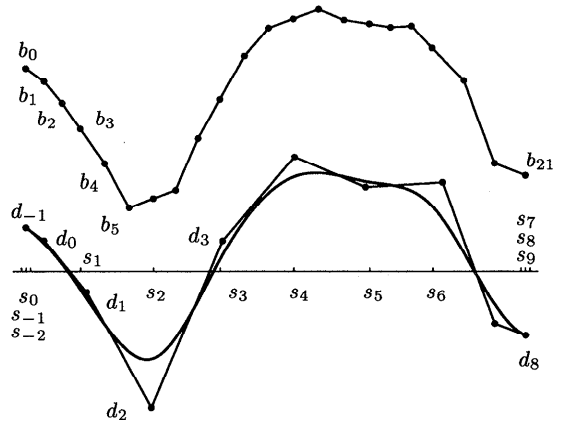


図 1 表記法: 接線角 $\psi(s)$ のグラフ
Fig. 1 Notation: graph of tangential angle $\psi(s)$.

関数を表すために $\{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ を用いる.

3. 未知数と方程式

求めようとする曲線には式 (2) にしたがって通過点から通過点へ至るという x, y 成分あわせて $2n$ 個の拘束条件がある. 一方, 未知数はスパンの弧長列 n 個と de Boor の縦座標列 $n+3$ 個の合わせて $2n+3$ 個ある. そこで境界条件を 3 個加えることができる.

- 未知数:

$\mathbf{v} = (\Delta s_0, \Delta s_1, \dots, \Delta s_{n-1}, d_{-1}, d_0, \dots, d_{n+1})^t.$
ただし, \mathbf{v} の要素を v_0 から始めて v_i のようにも書くことにする.

- 拘束条件:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{2i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \cos \psi(s) ds \\ \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sin \psi(s) ds \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} \\ &= \Delta s_i \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos \psi_i(t) dt \\ \int_0^1 \sin \psi_i(t) dt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$t = \frac{s - s_i}{\Delta s_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

ここで, $\psi_i(t)$ はノンユニフォーム 3 次の B -スプラインで表される $\psi(s)$ の各区間を次のような 3 次の Bézier 関数¹¹⁾に変換して取り扱いやすくしたものである.

$$\begin{aligned} \psi_i(t) &= (b_{3i}, b_{3i+1}, b_{3i+2}, b_{3i+3}) \cdot \mathbf{g}_3(t), \\ \mathbf{g}_3(t) &= ((1-t)^3, 3(1-t)^2 t, 3(1-t)t^2, t^3)^t, \end{aligned}$$

$$0 \leq t = \frac{s - s_i}{\Delta s_i} \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

この Bézier 縦座標は次のように計算できる¹²⁾.

$$\begin{cases} b_{3i+1} = \frac{d_{i+1}\Delta s_{i-1} + d_i(\Delta s_i + \Delta s_{i+1})}{\Delta s_{i-1} + \Delta s_i + \Delta s_{i+1}}, \\ b_{3i+2} = \frac{d_{i+1}(\Delta s_{i-1} + \Delta s_i) + d_i\Delta s_{i+1}}{\Delta s_{i-1} + \Delta s_i + \Delta s_{i+1}}, \\ \quad \quad \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \\ b_{3i} = \frac{b_{3i+1}\Delta s_{i-1} + b_{3i-1}\Delta s_i}{\Delta s_{i-1} + \Delta s_i}, \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ b_0 = d_{-1}, \quad b_{3n} = d_{n+1}. \end{cases}$$

● 境界条件：

いろいろな種類の条件を与えることができる。簡単には、通過点 p_i における接線角 b_{3i} の値を指定することである。とくに、両端では d_{-1}, d_{n+1} である。また、通過点 p_i における曲率 κ_i や曲率半径 ρ_i を指定することもできる。これ等は記号式 $\psi(s)$ から計算することができる。とくに両端では次のように簡単に表すことができる。

$$\begin{cases} \kappa_0 = 3 \frac{(d_0 - d_{-1})}{\Delta s_0}, \\ \kappa_n = 3 \frac{(d_{n+1} - d_n)}{\Delta s_{n-1}}. \end{cases}$$

もし、ある曲線分をクロソイド弧にするのであれば対応する $\psi_i(t)$ のセグメントの3次の係数をゼロにする。そのほか、すでに生成した曲線の曲線長を知って、曲線全体なり一部分なりの長さを調整する条件を課すことができる。このように未知数に関する任意の関係式を与えることができる。ここで、この互いに独立な境界条件を次のように表す。

$$(f_{2n}, \dots, f_m)^t = 0, \quad m \leq 2n + 2.$$

4. 解 法

解くべき問題は未知数 v に関する次の連立方程式である。

$$f(v) = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = 0, \quad m \leq 2n + 2. \quad (4)$$

この方程式の第 k 近似から第 $k + 1$ 近似をニュートン法によって次式のように計算する。

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} - J^{-1} f(v^{(k)}). \quad (5)$$

このとき、良い初期値 $v^{(0)}$ としてパラメトリック3次の C^2 補間曲線における対応する弧長での接線角の値と各スパンの弧長列を利用することができる。式(5)における J は次のようなヤコビアン行列である。

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial f(v)}{\partial v} \Big|_{v=v^{(k)}} \\ &= \frac{\partial (f_0, f_1, \dots, f_m)}{\partial (v_0, v_1, \dots, v_{2n+2})} \Big|_{v=v^{(k)}}. \end{aligned}$$

境界条件が3個に満たなくて J が正方行列でないときには、その逆行列をムーアペンローズの一般化逆行列¹⁵⁾で置き換えることができる。この一般化逆行列は恒等行列を I として $JJ^{-1} - I$ の全要素の2乗和を最小にするという良い性質を持っている。また、ヤコビアン行列の中で、曲線が与点を通過するという拘束条件に関係する要素はより具体的に次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{2i}}{\partial v_j} \\ \frac{\partial f_{2i+1}}{\partial v_j} \end{pmatrix} = \delta_{ij} \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos \Psi_i dt \\ \int_0^1 \sin \Psi_i dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\int_0^1 \Phi_{ij} \sin \Psi_i dt \\ \int_0^1 \Phi_{ij} \cos \Psi_i dt \end{pmatrix},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_i = \psi_i(t) \Big|_{v=v^{(k)}}, \\ \Phi_{ij} = \Delta s_i \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial v_j} \Big|_{v=v^{(k)}}, \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad j = 0, 1, \dots, 2n + 2.$$

この解法を汎用数式処理システムを用いてプログラミングすると、それはほとんど「式どおりに書けばよい」¹⁴⁾というほど簡単である。付録に Mathematica^{*} によるプログラムを掲げている。このプログラムでは利用しやすいように境界条件を実行時に(記号)式で入力できるようにしている。

5. 曲 線 例

4章の解法に従って付録のように記述したプログラムの妥当性を確認するためと導出曲線の性質を明らかにするために、いろいろなデータに対する曲線の生成実験を行った。各図で用いた通過点列データはまとめて付録に掲げている。

* Wolfram Research, Inc.

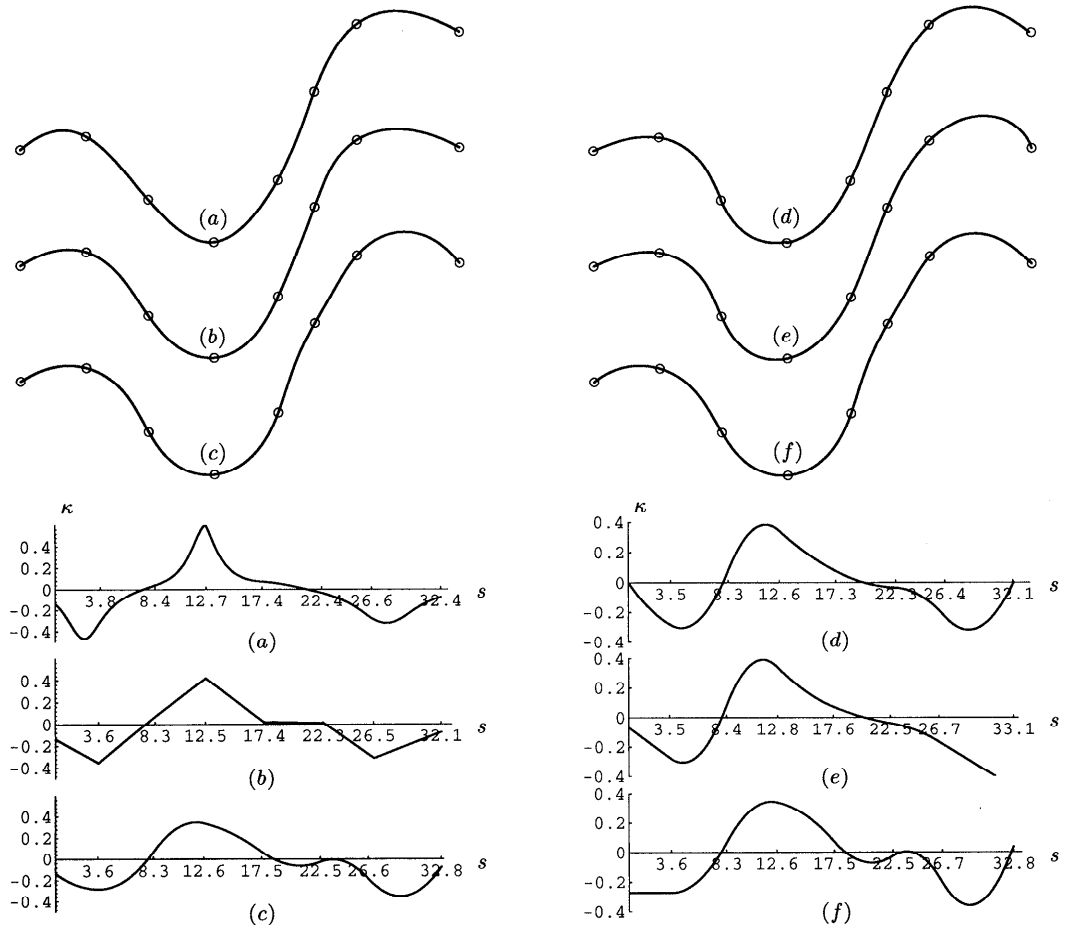


図2 (a) 3次の C^2 補間曲線, (b) クロソイドスプライン補間曲線と (c)~(f) 本手法による曲線
 Fig.2 (a) Cubic C^2 interpolating curve, (b) interpolating clothoidal spline curve
 and (c)~(f) new curves.

図2(a)は初期値となる曲線形状を表すパラメトリック3次の C^2 補間曲線とその曲率グラフである。両端の各2スパンをつなぐ節点に「節点でない節点条件 \star^{12} 」を与えている。通過点列は左から右にとられている。この同じ点列に対して図2で曲線を生成する。図中の曲率 $\kappa(s)$ のグラフにおける横座標目盛はノット s_0, s_1, \dots, s_n で、小数点以下1桁目までの値を付している。図2の曲線(b), (c)はそれぞれ、曲線(a)と同じ両端曲率を持つようにしたクロソイドスプライン補間曲線と本手法による曲線であり、下のグラフ(b), (c)はそれぞれその曲率である。とくに(c)では左端の接線角を(b)と一致させている。したがって、曲線(b)と(c)は左端で曲率ベクトルまで一致する接触をする。また、この(c)の曲線の接線角 $\psi(s)$ のグ

ラフが図1であった。これらの曲線で、多項式スプラインの曲率グラフ(a)がクロソイドスプラインですっきりした折れ線(b)によって近似され、本手法の曲線で再び(c)のように丸められているのが分かる。曲線(d)は両端曲率をゼロとして、さらに曲線の全長を(b)のクロソイドスプライン補間曲線と一致させるようにしたものである。ただし、この全長を一致させるという条件では安定に収束しなかった。(d)はニュートン法を2回繰り返した後の曲線であり、この後、計算は発散していった。(e)は両端のスパンがクロソイド弧となるように境界条件を与えた曲線である。(f)は左端のスパンが円弧となるようにその曲率を一定としたときの曲線とその曲率グラフである。

次に、狭いスペースに入るように折り曲げたような少し複雑な曲線例を図3, 図4に示す。以下の曲率グラフでは見やすくするために、横軸目盛の値を右

\star "not a knot condition".

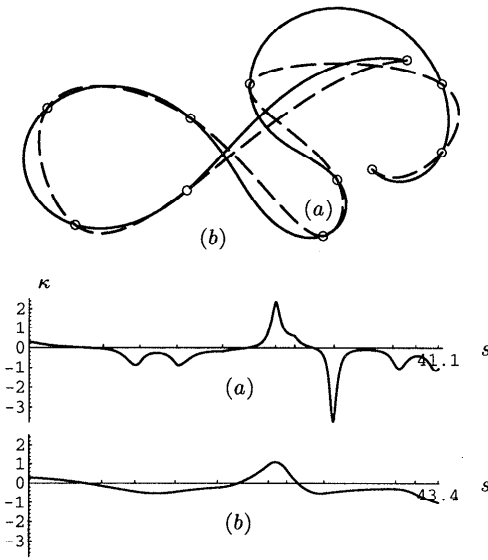


図3 他の曲線例(1): (a) 3次の C^2 補間曲線, (b) 本手法による曲線
 Fig. 3 The other curve example: (a) cubic C^2 interpolating curve, (b) new curve.

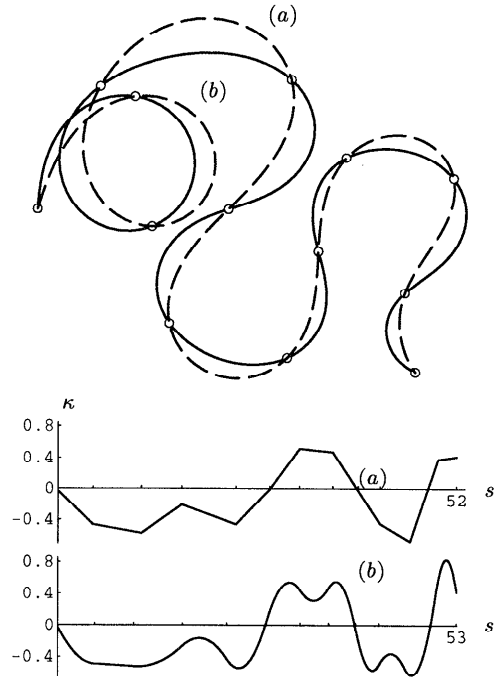


図4 他の曲線例(2): (a) クロソイドスプライン補間曲線, (b) 本手法による曲線
 Fig. 4 The other curve example: (a) interpolating clothoidal spline curve, (b) new curve.

端を除いて省略する。図3では、通過点列は右上から左下へ向かう順にとられている。破線で示した曲線(a)は初期値となる3次の C^2 補間曲線であり、(b)は両端曲率を(a)の曲線と一致するようにして生成した本手法による曲線である。曲率グラフを見ると、本手法による曲線は変化が少ない好ましいものとなっている^{★11)}。3次の C^2 補間曲線の曲率グラフ(a)は、よく見かけると、スパンの接続点で曲率が大きくなって曲がり、スパン内で曲率が小さくなって伸びるといったパターンを示している。

図4でも、3次の C^2 補間曲線の形状を初期値として、両端曲率がこの曲線と一致するように、破線の(a)クロソイドスプライン補間曲線と(b)本手法による曲線を生成したものである。通過点列は左から右にとられている。曲線(a)、(b)の曲率グラフの全体的傾向は同じであるが実際の曲線形状はかなり異っている。本手法による曲線の曲率は区分2次関数で表されるために、曲率が変動する場合に変曲点は必ず節点のみ生ずることになる。そして、変動する部分の曲率グラフはスパン内が凹か凸となるパターンが連続した形となることが分かる。

ここにあげた例から判断すると、本手法による曲線

は他の3次多項式スプライン補間曲線やクロソイドスプライン補間曲線よりも丸くカーブして、全体の曲線長が長くなる傾向にある。

このようにいろいろなデータを与えて曲線を生成することができ、本手法による曲線の性質を知ることができた。図2(d)の曲線をのぞいて、いずれも4回ぐらいで収束した。

6. 各スパンを双クロソイド近似する方法

5章で導出した曲線はそのまま困難なく生成できるけれども、これを周知の G^2 連続なクロソイド弧列で近似して生成してもよい。クロソイド曲線を全域 $[0, \infty]$ にわたって簡単に精度良く有理式近似する方法¹⁰⁾が知られていて、クロソイド弧生成器のようなものを想定することができるからである。ここでは局所的に各スパンを G^2 連続な2クロソイド弧で近似する方法について述べる。必要なら、この2クロソイド弧の接続点に対応する元の曲線上の点を求めてその左右の曲線分をまた双クロソイド近似すれば1スパンが4クロソイド弧でより精度良く近似できる。

以下の近似手法では、両端の接線角と曲率を境界条件として2つのクロソイド弧の弧長を求める。双クロ

★ 曲線はその曲率グラフが連続で、数少ない単調な部分からなるときに美しい。

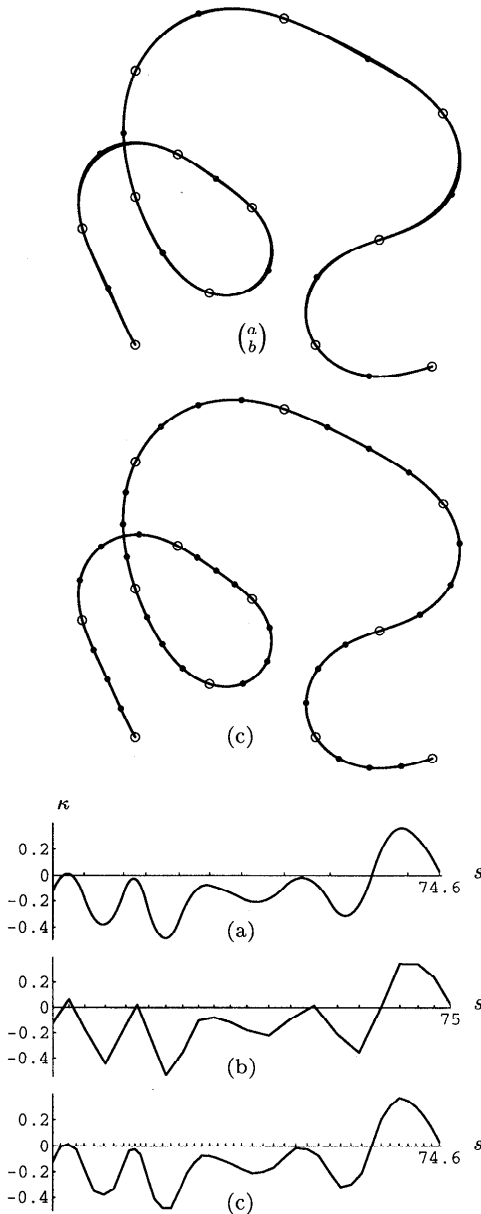


図5 クロソイド弧による近似：(a) 元の曲線，(b) 双クロソイド曲線，(c) 4 クロソイド曲線
 Fig. 5 Clothoidal spline approximation: (a) original curve, (b) bi-clothoidal spline curve, (c) 4-clothoidal spline curve.

ソイド近似曲線の接線角 ψ を C^1 連続な2つの Bézier 関数で表すことにより Bézier の縦座標を

$$\{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\},$$

とすれば次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_i(t) &= (b_{2i}, b_{2i+1}, b_{2i+2}) \cdot g_2(t), \\ g_2(t) &= ((1-t)^2, 2(1-t)t, t^2)^t, \end{aligned}$$

$$0 \leq t = \frac{s-s_i}{\Delta s_i} \leq 1, \quad i = 0, 1.$$

両端の接線角 b_0, b_4 と曲率 κ_0, κ_1 を与えれば他の縦座標を次のように導くことができる。

$$\begin{cases} b_1 = b_0 + 2\kappa_0 \Delta s_0, \\ b_3 = b_4 - 2\kappa_1 \Delta s_1, \\ b_2 = \frac{b_3 \Delta s_0 + b_1 \Delta s_1}{\Delta s_0 + \Delta s_1}. \end{cases}$$

また、両端通過の拘束条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta s_0 \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos \psi_0(u) du \\ \int_0^1 \sin \psi_0(u) du \end{pmatrix} \\ + \Delta s_1 \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos \psi_1(u) du \\ \int_0^1 \sin \psi_1(u) du \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

前章の解法に従って未知数 $(\Delta s_0, \Delta s_1)^t$ の値を得ることができる。図5に近似結果を示す。図の曲線は元の曲線と近似曲線を重ねて示している。小さい黒い点はスパン内のクロソイド弧の接続点である。双クロソイド曲線で必ずしもうまく近似できない曲率の大きな部分も、4クロソイド曲線できれいに近似できることが、曲線と曲率グラフから分かる。

7. ま と め

クロソイドスプライン補間曲線を拡張して、曲率が弧長の区分2次関数となる形状設計に有用な G^3 補間曲線を汎用の数式処理システムを導入して一般的に手軽に導く方法を示すことができた。また、導出曲線の性質を明らかにするとともに、この曲線をスパンごとに G^2 連続な2クロソイド弧で近似する局所的方法を導いて、従来曲線との整合性をとれるようにした。本手法では、記号式も数値と同様に処理できるのでアルゴリズムを簡潔に記述できるとともに種々の境界条件をデータとして与えることができる。

今後、本研究の考え方を拡張して曲率が弧長の3次関数となる曲線やそれとの複合曲線といったより柔軟性のある曲線を考えて、曲率グラフの制御による補間曲線の一般的な形状制御法を展開してゆく予定である。

参 考 文 献

- 1) Nutbourne, A.W., McLellan, P.M. and Kensit, R.M.L.: Curvature Profiles for Plane Curves, *Computer Aided Design*, Vol.4, No.4, pp.176-184 (1972).
- 2) Mehlum, E.: Nonlinear Splines, *Computer Aided Geometric Design*, Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F. (Eds.), pp.173-207, Academic

- Press, New York, (1974).
- 3) Stoer, J.: Curve Fitting with Clothoidal Splines, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol.87, No.4, pp.317-346 (1982).
 - 4) Meek, D.S. and Thomas, R.S.D.: A Guided Clothoid Spline, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.8, pp.163-174 (1991).
 - 5) Meek, D.S. and Walton, D.J.: Offset Curves of Clothoidal Splines, *Computer Aided Design*, Vol.22, No.4, pp.199-201 (1990).
 - 6) 仇 時雨, 須田大春, 牧野 洋: 曲率を連続にした接線法によるクロソイド補間, 精密工学会誌, Vol.60, No.11, pp.1596-1600 (1994).
 - 7) Korakianitis, T. and Pantazopoulos, G.I.: Improved Turbine-blade Design Techniques using 4th-order Parametric-spline Segments, *Computer Aided Design*, Vol.25, No.5, pp.289-299 (1993).
 - 8) Hering, L.: Closed (C^2 - and C^3 -continuous) Bézier and B-spline Curves with Given Tangent Polygons, *Computer Aided Design*, Vol.15, No.1, pp.3-6 (1983).
 - 9) Xing, Y., 寺田英嗣, 牧野 洋, 須田大春: ウルトラクロソイド曲線による弁カム輪郭の構成, 1996年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, pp.391-392 (1996).
 - 10) Heald, M.A.: Rational Approximation for the Fresnel Integrals, *Mathematics of Computation*, Vol.44, No.170, pp.459-461, Vol.46, p.771 (1985).
 - 11) Farin, G., 木村文彦 (監修), 山口 泰 (監訳): CAGDのための曲線・曲面理論—実践的利用法, p.330, 共立出版, 東京 (1990).
 - 12) Böhm, W.: Cubic B-spline Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design, *Computing*, Vol.19, pp.29-34 (1977).
 - 13) de Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*, Springer, Berlin (1978).
 - 14) Maeder, R., 井川俊彦, 宇田川誠一, 時田 節 (訳): *Mathematica プログラミング*, p.322, トップラン, 東京 (1992).
 - 15) 柳井晴夫, 竹内 啓: 射影行列・一般逆行列・特異値分解, p.214, 東京大学出版会, 東京 (1993).

付録1 Mathematica プログラム

- (1) 警告メッセージの抑制.
- (2) 下に示すファイル lib.m の読み込み.
- (3) 通過点列 $\{p_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ の入力.
- (4) $\{\Delta p_i, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ の計算.
- (5) $\{\psi_i(t), i = 0, 1, \dots, n-1\}$ の計算.
- (6) 未知数 v の設定, 初期値 $v^{(0)}$ の入力.

- (7) 境界条件の記号式入力. 0 で両端曲率ゼロ.
- (8) ニュートン法を4回繰り返して $\{v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(4)}\}$ を返す.
- (9) 未知数に第4近似値を代入.
- (10) スパンごとに双クロソイド近似する.
- (11) $\{b_i, i = 0, 1, \dots, 3n\}$ を計算.
- (12) ヤコビアン J の計算.
- (13) f の計算.
- (14) 1スパンを双クロソイド近似する関数.

```
Off[Needs::nocont];Off[General::spell1]; (* 1 *)
Off[NIntegrate::ploss];Off[NIntegrate::prew];
Off[Power::infy];Off[Infinity::indet];
Needs["lib"]; (* 2 *)
```

```
Clear[p,dp,n,psi,dSn,v,v0,bc,in,v04];
p=Input["p? "]; n=Length[p]-1; (* 3 *)
dp=Drop[RotateLeft[p]-p,-1]; (* 4 *)
```

```
psi=g3[t].#&/@Partition[
  getb3[dSn=Array[dS,n,0]],4,3]; (* 5 *)
v=Join[Array[dD, n+3,-1], dSn]; (* 6 *)
v0=Input["Initial v? "]; (* 6 *)
bc=Switch[in=Input["Boundary conds.? "],0,
  {-dD[-1]+dD[0], -dD[n]+dD[n+1]],_,in]; (* 7 *)
v04=NestList[newton[v,psi,bc,dp],v0,4]; (* 8 *)
Thread[v -> v04[[-1]]]/.Rule->Set; (* 9 *)
```

```
Clear[psi0n2,kappa,k0n2,bcloths,bpsi,bdss];
psi0n2=Partition[Append[
  psi/.t->0,psi[[-1]]/.t->1],2,1];
kappa=MapThread[#1/#2&,
  {D[psi,t],dsn=dSn}];Clear[dS];
k0n2=Partition[Append[
  kappa/.t->0,kappa[[-1]]/.t->1],2,1];
bcloths=MapThread[bcloth[#1,#2,#3,{#4}]&,
  {psi0n2,k0n2,dsn,dp}]; (*10 *)
{bpsi,bdss}=Flatten[#]&/@Transpose[bcloths];
(***** lib.m *****)
Clear[g3,getb3,newton,bcloth];
```

```
g3[t_]:= {(1-t)^3,3(1-t)^2t,3(1-t)t^2,t^3};
```

```
getb3[dss_List]:=Module[{n=Length[dss], (*11 *)
  ds3=Partition[Flatten[{0,0,dss,0,0}],3,1],
  i,a,b,c,b3,b0,b1,d0,d1,d2},
  i=-1;({a[i],b[+i]}={#[[1]],#[[3]]}/Plus@@#;
  c[i]=#[[2]]/Plus@@Rest[#])&/@ds3;
  b3=Take[Flatten[Table[
    {b0=b[i]dD[i-1]+(1-b[i])dD[i],
    b1=(1-a[i])dD[i]+a[i]dD[i+1],
    (1-c[i])b0+c[i]b1}][{1,3,2}],{i,0,n}]],
  {2,-2}]];
```

```
newton[v_,psi_,bc_,dp_,monobi_: "mono"][vk_]:=
Module[{imp=Thread[v->vk],psk,cpsk,spsk,
  dfdv,n,i,k},
  psk=Chop[Expand[psi/.imp]];
```

```

cpsk=NIntegrate[Cos[#],{t,0,1}]&/@psk;
spsk=NIntegrate[Sin[#],{t,0,1}]&/@psk;
dfdv=Flatten[Table[Transpose[Plus@@Table[(*12 *)
(D[dS[i-1],#]{cpsk[[k]],spsk[[k]]}+
NIntegrate[Evaluate[{-Sin[psk[[k]]},
Cos[psk[[k]]}]Expand[dS[i-1]*
D[psi[[k],#]/.imp]],{t,0,1}]
)&/@v,Evaluate[If[monobi=="bi",{k,2i-1,2i},
{k,i,i}]]],{i,n=Length[dp]},1];
If[bc!={},dfdv=Join[dfdv,Outer[D,bc,v]/.imp]];
F=Flatten[Table[(dS[i-1]/.imp)Plus@@Table[
{cpsk[[k]],spsk[[k]]},Evaluate[If[monobi=="bi",
{k,2i-1,2i},{k,i,i}]]]-dp[[i]],{i,n}]];
If[bc!={},F=Join[F,bc/.imp]]; (*13 *)
vk=PseudoInverse[dfdv].F];

bcloth[{b0_,b4_},{k0_,k1_},dss_,dxy_]:= (*14 *)
Module[{g2,b1,b3,b2,psi,v,v0,imp},
g2[t]:={((1-t)^2,2(1-t)t,t^2)};
b1=b0+k0 dS[0]/2;
b3=b4-k1 dS[1]/2;
b2=(dS[0] b3+dS[1] b1)/(dS[0]+dS[1]);
psi=g2[t].#&/@{{b0,b1,b2},{b2,b3,b4}};
v0=0.5{dss,dss};
v={dS[0],dS[1]};
imp=Thread[v->Nest[newton[v,psi,{}],dxy,"bi"],
v0,2]];
{psi,v}/.imp];

```

付録2 図で用いた通過点列データ

- 図1, 図2: {(0.6, 10.5), (4., 11.2), (7.2, 7.9), (10.6, 5.7), (13.9, 8.9), (16.3, 14.), (19.8, 17.4), (23.3, 16.6)},
- 図3: {(11.5, 6.4), (5.2, 2.6), (2, 1.6), (1.2, 5), (5.3, 4.7), (9.1, 1.3), (9.5, 2.9), (7, 5.7), (12.5, 5.7), (12.5, 3.7), (10.5, 3.2)},
- 図4: {(5.44, 14.16), (7.59, 15.88), (10.12, 16.9), (12.87, 16.86), (15.16, 15.34), (15.92, 12.69), (14.305, 10.465), (11.55, 10.35), (9.35, 11.99), (7.86, 14.3), (5.615, 15.9), (3., 15.075), (1.55, 12.75), (1.61, 10.), (2.79, 7.5), (4.8, 5.61), (7.395, 4.66), (10.12, 5.035), (12.045, 7.03), (12.5, 9.75), (12.3, 12.48)},
- 図5: {(6., 2.), (3.5, 7.5), (8., 11.), (11.5, 8.5), (9.5, 4.5), (6., 9.), (6., 15.), (13., 17.5), (20.5, 13.), (17.5, 7.), (14.5, 2.), (20., 1.)}.

(平成8年9月17日受付)

(平成8年12月5日採録)



黒田 満 (正会員)

岐阜大学工学部機械工学科卒業、同大学工学部助手。1981年豊田工業大学制御情報工学科講師、現在助教。曲線・曲面理論、コンピュータ・グラフィックスの研究に従事。工学博士。精密工学会、日本図学会、ACMなどの各会員。



斎藤 剛 (正会員)

1950年生、1976年東京電機大学修士課程電気工学専攻修了。1979年東京電機大学工学部助手、1994年同大学工学部助教授を経て、現在、同大学工学部情報通信工学科教授。グラフィックス、形状処理、文書処理などの研究に従事。博士(工学)。訳書「CAD/CAMにおける曲線曲面のモデリング」。電子情報通信学会、精密工学会などの各会員。



渡辺由美子 (学生会員)

1994年東京電機大学工学部電気通信工学科卒業。1996年東京電機大学大学院工学研究科情報通信工学専攻修士課程修了。現在、同大学院博士課程に在学中。コンピュータグラフィックス、CAD/CAMなどの研究に従事。精密工学会学生会員。



東 正毅 (正会員)

1968年東京大学工学部計数工学科卒業。同年トヨタ自動車(株)入社後、CAD/CAMシステムの開発に従事。1986年豊田工業大学助教授、現在教授。形状処理/形状モデリング、製品モデリングの研究・教育に従事。工学博士。精密工学会、日本機械学会などの各会員。