

## テクニカルノート

## 散逸境界条件下のセルオートマトンについて

蜷川 繁<sup>†</sup> 米田政明<sup>†</sup> 広瀬貞樹<sup>†</sup>

セルオートマトンを計算機でシミュレーションする際の境界条件として、従来用いられてきた巡回境界条件に代わって、端のセルに接した境界外のセルがステップごとにランダムな状態をとる散逸境界条件を用いることにより、セル数に依存しないセルオートマトン固有の性質が把握できることを示す。散逸境界条件下のセルオートマトンは、ステップが進むにつれて巡回境界条件の場合に比べてとりうる様相の数が多いことから、熱力学的系として見た場合、熱浴内の部分系と見なすことができる。

## Cellular Automata in Dissipative Boundary Conditions

SHIGERU NINAGAWA,<sup>†</sup> MASAOKI YONEDA<sup>†</sup> and SADAKI HIROSE<sup>†</sup>

In order to study the behavior of cellular automata independently of array size, we adopt dissipative boundary conditions where arrays beyond the boundary take random states at each time step, instead of periodic boundary conditions. Since the number of possible configurations of cellular automata in dissipative boundary conditions is larger than one in periodic boundary conditions, we can consider cellular automata in dissipative boundary conditions subsystems in heat bath from a thermodynamic point of view.

## 1. はじめに

セルオートマトン (cellular automata) が力学系との対応づけにより 4 つのクラスに分類され<sup>1)</sup>て以来、力学系としてのセルオートマトンの研究がさかんに行われている。特にクラス 4 (複雑系) に属するセルオートマトンについては、その振舞いに関する研究やクラス 3 (カオス系) に属するセルオートマトンとの判別に関する研究などが数多く行われている (たとえば文献 2)~4))。その際、境界条件として両端のセルが接していると見なす巡回境界条件 (periodic boundary condition) がもっぱら用いられてきた。しかし、巡回境界条件を用いるとセルオートマトンの挙動がセル数によって著しく変わる場合があるなど、セルオートマトンの性質を調べるうえで不都合な点がある。

本論文では 2 章で巡回境界条件の問題点を具体的に指摘し、3 章では巡回境界条件に代わって散逸境界条件を用いることを提案し、その場合の利点を示す。さらに 4 章で散逸境界条件を用いることの熱力学的意味を述べる。

なお、用語ならびに記法については文献 4) に準じた。

## 2. 巡回境界条件の問題点

1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトン (単純セルオートマトン, elementary cellular automata) を考察する。たとえば、その中の #60 はクラス 3 に属し、カオス的な振舞いを示すことが知られている<sup>5)</sup>が、巡回境界条件を用いてその挙動を調べると、セル数が  $2^n$  ( $n$  は正整数) 個の場合、初期様相\*によらず  $2^n$  ステップまでには全セルの状態が 0 になる。セル数が 127 の場合と 128 ( $= 2^7$ ) の場合の #60 の時空間パターン (横軸方向にセルを並べ、ステップごとの様相を縦軸方向に並べた 2 次元図) を図 1 に示す。セル数 127 の場合がカオスの振舞いを示す #60 の一般的な時空間パターンであり、128 の場合は 128 ステップ目で全セルの状態が 0 となる特異な時空間パターンである。

また時空間パターンを見ただけではセル数による特異性の存在が分からない場合もある。たとえば、やはりクラス 3 に属する #105 ではセル数を変化させても時空間パターンには明らかな変化は認められない。し

<sup>†</sup> 富山大学工学部  
Faculty of Engineering, Toyama University

\* 0 ステップ目の様相。なお本論文では各セルがとる状態の配列を様相と呼ぶ。

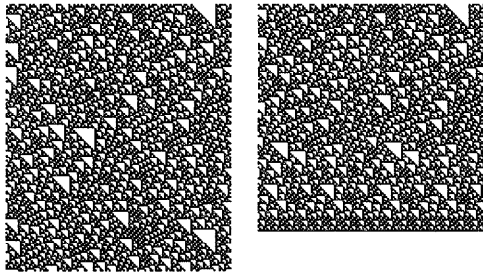


図1 セル数=127(左)とセル数=128(右)の#60の巡回境界条件での150ステップ分の時空間パターン

Fig.1 Space-time patterns for #60 in periodic boundary condition. Array size is 127 (left), 128 (right). 150 time steps from a random initial configuration.

かし、以下のように時空間パターンにフーリエ変換を施しスペクトル解析を行うとセル数による特異性が現れる。

$t$  ステップ目の  $i$  番目のセルの状態を  $x_i^t$  とすると  $N$  個のセルから成るセルオートマトンの  $t$  ステップ目の様相は

$$\mathbf{X}(t) = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t)$$

とベクトル表記される。  $t = 0, 1, \dots, T-1$  の  $T$  個のベクトルにフーリエ変換

$$\hat{\mathbf{X}}(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{X}(t) \exp(-i \frac{2\pi tk}{T})$$

$$(k = 0, 1, \dots, T-1)$$

を施す。  $\hat{\mathbf{X}}(k)$  からパワースペクトル

$$P(k) = |\hat{\mathbf{X}}(k)|^2$$

を求める。 #105 においてステップ数 1024, セル数が 250 の場合と 255 の場合のパワースペクトルを図 2 に示す (周波数  $k = 512$  に関して対称なので  $k \leq 512$  なる  $k$  についてのみ  $P(k)$  を示した)。セル数 250 の場合が #105 の一般的なパワースペクトルであり, 255 の場合が特異なパワースペクトルである。

なお, クラス 3 およびクラス 4 に分類される単純セルオートマトン 14 個<sup>5)</sup>のうち, 巡回境界条件下でセル数による特異性の存在が時空間パターンの目視で分かるものが 2 個 (#60, #90), スペクトル解析で分かるものが 6 個 (#18, #105, #122, #126, #146, #150) 確認された。

よって, 巡回境界条件を用いてセルオートマトンの性質を調べる場合は, あらかじめセル数を種々に変えてみて特異性が現れないセル数を選ぶか, または境界条件が影響しないほど多くのセル数をとる必要がある。

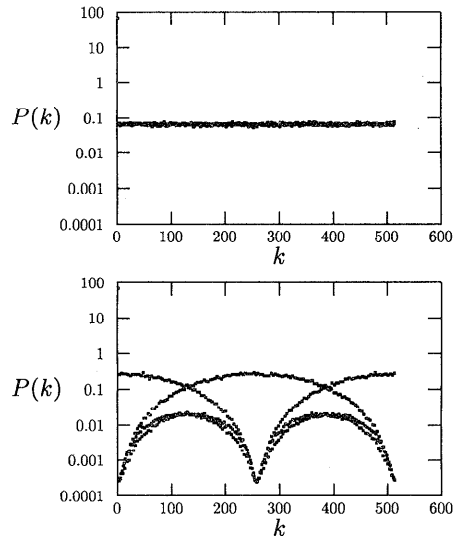


図2 セル数=250(上)とセル数=255(下)の#105の巡回境界条件でのパワースペクトル

Fig.2 Power spectra for #105 in periodic boundary condition. Array size is 250 (upper), 255 (lower).

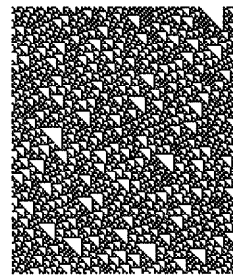


図3 セル数=128の#60の散逸境界条件での150ステップ分の時空間パターン

Fig.3 Space-time pattern for #60 in dissipative boundary condition. Array size is 128. 150 time steps from a random initial configuration.

### 3. 散逸境界条件

そこで巡回境界条件の代わりに両端のセルに接した境界外のセルがステップごとにランダムな状態をとる散逸境界条件 (dissipative boundary condition)<sup>6)</sup>を用いる。

セル数が 128 で散逸境界条件下で求めた #60 の時空間パターンを図 3 に示す。この場合セル数による特異性は現れない。

また, ステップ数が 1024, セル数が 255 で散逸境界条件下で求めた #105 のパワースペクトルを図 4 に示す。このパワースペクトルは巡回境界条件下でセル数による特異性が現れないようにセル数を選んだ場合

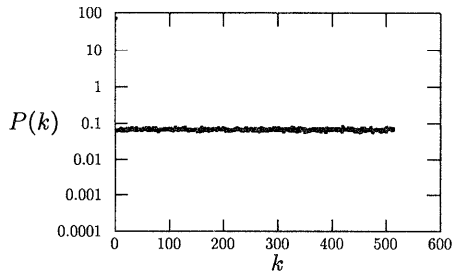


図4 セル数=255の#105の散逸境界条件でのパワースペクトル  
Fig.4 Power spectrum for #105 in dissipative boundary condition. Array size is 255.

(図2(上))と同じ結果になる。

なお、クラス3およびクラス4に分類される単純セルオートマトンのうち、巡回境界条件下でセル数による特異性が確認された8個において、散逸境界条件下ではセル数による特異性が現れないことを確認した。

このように散逸境界条件は少ないセル数でセル数に依存しないセルオートマトン固有の性質を調べることができるという利点を持つ。

#### 4. 散逸境界条件の意味

$N$ 個のセルからなる単純セルオートマトンを考え、そのセルオートマトンがとりうる全様相からなる集合を $\Omega(0)$ とする( $|\Omega(0)| = 2^N$ )。 $\Omega(0)$ の各様相にセルオートマトンの遷移規則を $t$ 回繰り返して適用して得られる様相の集合を $\Omega(t)$  ( $t = 0, 1, \dots$ )とすると、

$$\Omega(t) \supseteq \Omega(t+1) \quad (t = 0, 1, \dots)$$

となる。

クラス3に属する#22で境界条件が巡回境界条件および散逸境界条件の場合にとりうる様相の数を、セル数が10, 20ステップまで求めた結果を図5に示す。図より散逸境界条件の方が様相の数の減少は少なく、より多くの様相をとることができる。

統計力学において熱浴(温度が一定の十分大きな系)と熱的に接触している系を部分系と呼び、このような部分系は熱浴とつねにエネルギーのやりとりを行うため、孤立した系に比べて、多くの状態をとる。このことから散逸境界条件下のセルオートマトンは熱力学的系として見た場合、熱浴内の部分系と対応づけられる。

#### 5. おわりに

巡回境界条件を用いた場合、セル数によってセルオートマトンの挙動が変化する可能性があることを指摘し、散逸境界条件を用いると、単純セルオートマトンについてはセル数による特異性が消え、少ないセル数での解析が可能となることを示した。

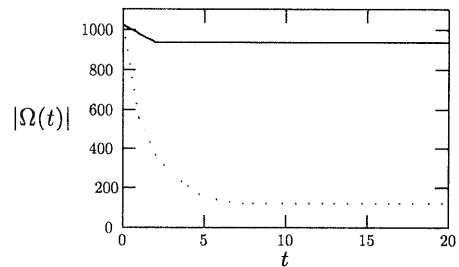


図5 セル数=10の#22の可能な様相の数の時間変化(実線:散逸境界条件, 点線:巡回境界条件)

Fig.5 Time evolution of the number of possible configurations for #22. Array size is 10 (real line:dissipative boundary condition, dotted line: periodic boundary condition).

今後は、散逸境界条件を用いてもっと複雑なセルオートマトンの性質を研究する予定である。特に、スペクトル解析を用いることによって、セルオートマトンのより詳細な性質が理解できると考えている。

#### 参考文献

- 1) Wolfram, S.: Universality and Complexity in Cellular Automata, *Physica*, Vol.D10, pp.1-35 (1984).
- 2) Langton, C.G.: Computation at the Edge of Chaos: Phase Transitions and Emergent Computation, *Physica*, Vol.D42, pp.12-37 (1990).
- 3) Li, W., Packard, N.H. and Langton, C.G.: Transition Phenomena in Cellular Automata Rule Space, *Physica*, Vol.D45, pp.77-94 (1990).
- 4) 西村治彦, 新地辰郎: 1次元セルオートマトンの時系列フラクタル解析, 情報処理学会論文誌, Vol.36, No.4, pp.787-796 (1995).
- 5) Li, W. and Packard, N.: The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space, *Complex Systems*, Vol.4, pp.281-297 (1990).
- 6) Wolfram, S.: Statistical Mechanics of Cellular Automata, *Rev. Mod. Phys.*, Vol.55, No.3, pp.601-644 (1983).

(平成8年10月11日受付)

(平成9年2月5日採録)



蛭川 繁 (学生会員)

昭和61年金沢大学理学部物理学科卒業。昭和63年富山大学大学院理学研究科修士課程修了。民間企業を経て、平成6年より高岡法経専門学校に勤務。平成7年より富山大学大学院工学研究科博士後期課程在学中。セルオートマトンを用いた複雑系に関する研究に従事。



米田 政明（正会員）

昭和 42 年東北大学工学部通信工学科卒業。昭和 47 年同大学大学院博士課程修了。同年富山大学工学部講師。現在、同教授。この間、オートマトン・言語理論、文字認識・文書理解等の研究に従事。工学博士。著書「計算機科学の基礎」（森北出版）。電子情報通信学会、人工知能学会各会員。



広瀬 貞樹（正会員）

昭和 49 年富山大学工学部電子工学科卒業。昭和 55 年東北大学大学院工学研究科博士後期課程修了。工学博士。同年、富士通研究所入社。昭和 59 年神奈川大学工学部助教授。平成 1 年富山大学工学部助教授、現在に至る。この間、オートマトン・言語理論、アルゴリズム理論、計算の複雑さの理論等の研究に従事。電子情報通信学会会員。