5D−4

連立代数方程式の数値解法における一次分数変換の新たな適用について*

鈴木秀男
東京職業能力開発短大・情報処理 †

小林英恒
日本大学理工・数学 ‡

1. はじめに

連立代数方程式が重根や近接根を持つ場合、数値計算によりそれらの根を求めようとすると、どうしても数値的な安定性が問題になり、精度が悪くなってしまうことがある。そこで、筆者らは、これらの問題を解決するために、一次分数変換を利用する方法を提案した[1)~6)]。この方法により、数値的な安定性や数値精度を向上させることが可能となった。また、数値解の誤差評価を与えるとともに、擬局所化の有効性も示した。

一次分数変換を適用した連立代数方程式の数値解法には、ホモトピー法を採用している。ホモトピー法では、パラメータの値を始点から終点まで変化させながらパスを追跡し、終点での値がもとの連立代数方程式の根となる。今回は、このパラメータに一次分数変換を適用した。その結果、パラメータの値をより終点に近づけることが可能となり、終点付近での精度が向上し、さらに終点付近の振る舞いが正確に把握できるようになった。

2. 一次分数変換

n 次元複素射影空間 $P^n(C)$ の斉次座標系 $(X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$ を用いて表現された m 次斉次多項式 $F(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を、$n+1$ 次正則行列 $A = (a_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ に対応する射影変換 P_A

$$P_A \quad : \quad (X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \to \left(\sum_{i=0}^{n} a_{0i}X_i : \sum_{i=0}^{n} a_{1i}X_i : \cdots : \sum_{i=0}^{n} a_{ni}X_i\right)$$

により変換する。行列 A の逆行列 A^{-1} を考えることにより、逆変換 $P_A^{-1} = P_{A^{-1}}$ も同様に定義できる。

このとき、連比にアフィン空間 C^n の点

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (X_1/X_0, X_2/X_0, \cdots, X_n/X_0)$$

を対応させることで射影空間の点とアフィン空間の点とが対応付けられる。すなわち、アフィン空間での各座標は一次分数変換の形で与えられる。

超平面 $U_0 = \sum_{i=0}^{n} a_{0i}X_i = 0$ が元の方程式の根を含まないように射影変換を選んで、この超平面を新たな無限遠超平面とするとき有限部分での方程式の根が元の方程式の根と重複度も含めて 1 対 1 に対応する。

3. 近接根分離のための一次分数変換の型

適当な複素数 α と実数 ϵ に対し $W(\alpha;\epsilon) = \{z \in C \mid |z-\alpha| < \epsilon\}$ とするとき、複素数 α_j と十分小さい正の実数 $\epsilon_j, j = 1, \cdots, n$ に対し

$$W = W(\alpha_1;\epsilon_1) \times \cdots \times W(\alpha_n;\epsilon_n)$$

とし、この範囲にある近接根を分離する。ただし、近接根以外の根は近接根から十分離れているものとする。

行列 A の選び方により様々な型の一次分数変換が存在するが、ここでは一次分数変換の具体的な型として

$$\sum_{j\in I} X_j + \left(\sum_{j\in I}\gamma_j - \sum_{j\in I}\alpha_j\right) X_0 = 0$$

を新たな無限遠超平面に変換するような射影変換を考える。ただし、この超平面上に解は存在しないものとする。ここで、I は添字の集合であり、$\gamma_j = k_j\epsilon_j\ (k_j \geq 1)$ である。集合 I の選び方により、種々の無限遠超平面を決めることができる。

逆に、もとの無限遠超平面 $X_0 = 0$ は

$$\sum_{j\in I} U_j - U_0 = 0$$

と変換される。

4. 根の移動

具体的には、$x_j (= \alpha_j + c_j\epsilon_j) \in W$ なる点は、

$$u_j = \frac{c_j\epsilon_j}{\sum_{l\in I}(k + c_l)\epsilon_l}$$

と変換される。これより、各 u_j は元の空間での値に比べ分離されていることが分かる。とくに $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon$ のときは $u_j = c_j/\sum_{l\in I}(k+c_l)$ となり ϵ に関係しない。また $x_j \notin W$ なる点は、

$$\sum_{j\in I} u_j = \frac{1}{1 + \sum_{l\in I}\gamma_l / \sum_{j\in I}(x_j - \alpha_j)}$$

となり、右辺の値は、$O(\sum\gamma_l/\sum(x_j-\alpha_j))$ の割合で超平面 $\sum_{j\in I} u_j - 1 = 0$ に近づくことになる。

---

*New application method of the linear fractional transformation in numerical solution for a system of algebraic equations

†Hideo Suzuki, Tokyo Polytechnic College, 2-32-1 Ogawa-nishi Kodaira Tokyo 187-0035 Japan

‡Hidetsune Kobayashi, Nihon University, 1-8-14 Kanda-surugadai Chiyoda Tokyo 101-0062 Japan

5. ホモトピー法への一次分数変換の適用

与えられた連立代数方程式を $f(x)=0(x\in C^n, f(x)\in C^n)$ とし、一次分数変換された連立代数方程式を $g(u)=0$ とする。以下の議論は、どちらの方程式でも同様なので、$g(u)=0$ について説明する。この連立代数方程式を解くためにホモトピーを構成する。実際には高次のホモトピーを採用しているが、ここでは次のような一次のホモトピーについて考える。

$$h(u,t)=tg(u)+(1-t)p(u)$$

構成されたホモトピーのパラメータ t についての一次分数変換を考える。t は、$[0,1]$ で定義されているため、前述の一次分数変換の型において $n=1, I=\{1\}, \gamma_1=-\delta, \alpha_1=1$ とする。この条件における一次分数変換の具体的な型は、様々なものが考えられるが $\varphi(0)=0, \varphi(1)=1, \varphi(\infty)=-\delta$ を満たすものを採用した。すなわち

$$t=\frac{(1+\delta)s}{s+\delta},\quad s=\frac{\delta t}{1-t+\delta}$$

である。ここで、δは十分小さな正の数とする。

この一次分数変換により、先ほどのホモトピーは

$$\tilde{h}(u,s,\delta)=(1+\delta)sg(u)+\delta(1-s)p(u)$$

となる。形式的には、パラメータ t を s に置き換えたホモトピーの s の部分に $1+\delta$を、$1-s$ の部分にδを掛けた形となる。以下、$h(u,t)$ と$\tilde{h}(u,s,\delta)$ との関係について述べる。まず、次の命題が成り立つ。

[命題 1]

元の空間で $t=1-\Delta s$ ($\Delta s>0$ は十分小) のときの u の近似解の一つをαとし真の値をα_{true}とするとき誤差は$\Delta\alpha=|\alpha-\alpha_{true}|$ となる。このとき、変換された空間で $s=1-\Delta s$ のときαに対応する近似解の誤差を$\Delta\tilde{\alpha}$とすれば

$$\Delta\tilde{\alpha}\sim\delta\Delta\alpha$$

が成り立つ。■

この命題から、同じ精度で t, s が求められているならば、一次分数変換を適用した方が u の誤差はδ倍小さくなることが分かる。

さらに、次のような性質も成り立つ。

[性質 1]

$t\sim1, s\sim1$ において$\Delta t\sim\delta\Delta s$ が成り立つ。■

この性質は、変換された空間で s の値が 1 に十分近く、すなわちΔs が十分小さければ、そのときの u の値は元の空間では、$\delta\Delta s$ だけより 1 へ近づいたときの値を意味している。したがって、元の空間で計算桁数以上の精度で t を 1 へ近づけることが可能となる。これにより、$t\sim1$ の近くでの振る舞いがより正確に把握でき、近接根(単根)の場合に数値的な安定性(精度)を向上させることが出来る。

[性質 2]

近接根以外の根は、一次分数変換を適用することにより、急速に 1 へ近づく。■

これにより、早い時期での近接根と近接根以外の根との分離が可能となり、計算時間の短縮がはかれる。

以上の命題及び性質より$\tilde{h}(u,s,\delta)$ の形式は有用であることが分かる。

6. 数値例

$f(x)=x^6-4499997/50000x^5-5000026999991/5000000000x^4-6000016199997/100000000000000x^3-7200010799999/4000000000000000000x^2-12000009/400000000000000000x-1/4000000000000000=0$ は近接根を 4 つ、それ以外の根を 2 つ持つ。この方程式を、ホモトピー法で直接解くと近接根のため、同一の数値解が得られる。その原因は $t\sim1$ においてパスの曲率κが急激に変化するために起こっている。そこで、$\delta=0.00001$ としてパラメータ t に一次分数変換を適用して解くと、同じ精度でδ倍だけ t を 1 に近づけることができ、次のように 4 つの近接根に収束する結果を得る。

表 1 分数変換による数値解

1	(-0.2000000000E-04,-0.1000000000E-04)
2	(-0.2000000000E-04, 0.1000000000E-04)
3	(-0.1000000000E-04, 0.2000000000E-04)
4	(-0.1000000000E-04,-0.2000000000E-04)

参考文献

1) 小林, 鈴木, 酒井：分数変換による近接根の分離について, 数式処理 vol.2 no.2 pp.2-7 (1993)

2) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Separation of close roots by linear fraction transformation, Proc. of ASIAN symposium on computer mathematics, pp.1-10 (1995)

3) 鈴木, 小林：一次分数変換を利用した近接根の分離方法とその誤差について, 情報処理学会論文誌 vol.38, no.2, pp.180-191 (1997.Feb.)

4) 鈴木, 小林：連立代数方程式の近接根の分離と擬局所化の可能性について, 京大数理研講究録 vol.986, pp.136-146 (1997)

5) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations. Mathematics of Computation, vol.67, no.221, pp.257-270 (1998,Jan.)

6) 鈴木, 小林：連立代数方程式の減次の可能性について, 京大数理研講究録 vol.1038, pp.8-16 (1998)