漸化式を用いるベッセル関数 $J_\nu(x)$ の数値計算法の別法の誤差解析

吉田 年雄†

第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ について，漸化式を用いる数値計算法の別法について述べる．m を適当に選ばれた正の偶整数とし，α を小さな任意定数とし，$F_{\nu+m+1}(x) = 0$, $F_{\nu+m}(x) = \alpha$ を出発値として，$J_\nu(x)$ が満足する漸化式を繰り返し使うことにより，$F_{\nu+m-1}(x)$, $F_{\nu+m-2}(x)$, $\cdots$, $F_\nu(x)$ を順次，計算する．そのとき，通常用いる $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(1)} J_{\nu+2k}(x) = 1$ の形のものの代わりに，$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(2)} J_{\nu+2k}(x) = \cos x$，あるいは，$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(3)} J_{\nu+2k+1}(x) = \sin x$ を利用すれば，ある $N(<m)$ に対して，$n = 0, 1, \cdots, N$ についての $J_{\nu+n}(x)$ の通常の近似式 $J_{\nu+n}(x) \approx F_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(1)} F_{\nu+2k}(x)$ とは別の形の近似式 $J_{\nu+n}(x) \approx \cos x F_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} F_{\nu+2k}(x)$，あるいは，$J_{\nu+n}(x) \approx \sin x F_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(3)} F_{\nu+2k+1}(x)$ が得られる．本論文では，これらの方法について誤差解析を行い，有用な誤差の評価式を与えている．

Error Analysis of the Alternative Methods Using the Recurrence Technique for the Calculation of Bessel Functions $J_\nu(x)$

TOSHIO YOSHIDA†

We give the alternative methods for the calculation of Bessel functions $J_\nu(x)$. Let m be an appropriately chosen positive even integer and let α be an arbitrarily chosen small constant. Starting with $F_{\nu+m+1}(x) = 0$, $F_{\nu+m}(x) = \alpha$ and by successive application of the recurrence relation for $J_\nu(x)$, we generate $F_{\nu+m-1}(x), F_{\nu+m-2}(x), \cdots, F_\nu(x)$. If we use $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(2)} J_{\nu+2k}(x) = \cos x$ or $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(3)} J_{\nu+2k+1}(x) = \sin x$, we obtain the approximation $J_{\nu+n}(x) \approx \cos x F_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} F_{\nu+2k}(x)$ or $J_{\nu+n}(x) \approx \sin x F_{\nu+n}(x)/\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(3)} F_{\nu+2k+1}(x)$. This paper describes the error analysis of these approximations and useful estimates of the error.

1. はじめに

ν 次（$\nu \geq 0$）の第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ の数値計算には，漸化式を用いる方法がよく使われている．以下に，従来の方法について，簡単に説明するとともに，その別法を述べる．

ν の小数点以下の部分を改めて ν と置くことにする．したがって，$0 \leq \nu < 1$ である．

m を適当に選ばれた正の偶整数とし，α を小さな任意定数とする．

$$F_{\nu+m+1}(x) = 0, F_{\nu+m}(x) = \alpha \tag{1}$$

を出発値として，$J_\nu(x)$ が満足する漸化式

$$F_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} F_\nu(x) - F_{\nu+1}(x) \tag{2}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{\nu+m-1}(x)$, $F_{\nu+m-2}(x)$, $\cdots$, $F_\nu(x)$ を順次，計算する．そのとき，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(1)} J_{\nu+2k}(x) = 1 \tag{3}$$

を利用すれば，ある $N(<m)$ に対して，$n = 0, 1, \cdots, N$ についての $J_{\nu+n}(x)$ の近似式

$$J_{\nu+n}(x) \approx F_{\nu+n}(x) \bigg/ \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(1)} F_{\nu+2k}(x) \tag{4}$$

を得ることができる．ただし，

$$\varepsilon_k^{(1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+k)}{k!} \tag{5}$$

である．本論文では，この方法を，方法 I と呼ぶこと

† 中部大学経営情報学部経営情報学科
College of Business Administration and Information Science, Chubu University

にする．これは，$J_{\nu+n}(x)$ を計算する通常の方法であり，この方法の誤差解析は，すでに，二宮[1] および吉田[2]によって行われている．式 (3) の代わりに，関係式[3]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(2)} J_{\nu+2k}(x) = \cos x \tag{6}$$

あるいは，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^{(3)} J_{\nu+2k+1}(x) = \sin x \tag{7}$$

を使うことも考えられ，それぞれに対応した近似式として，

$$J_{\nu+n}(x) \approx \cos x F_{\nu+n}(x) \Bigg/ \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} F_{\nu+2k}(x) \tag{8}$$

あるいは，

$$J_{\nu+n}(x) \approx \sin x F_{\nu+n}(x) \Bigg/ \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(3)} F_{\nu+2k+1}(x) \tag{9}$$

が得られる．ただし，

$$\varepsilon_k^{(2)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{(-1)^k 2(\nu+2k)\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu+2k)}{(2k)!\Gamma(2\nu+1)} \tag{10}$$

$$\varepsilon_k^{(3)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \cdot \frac{(-1)^k 2(\nu+2k+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu+2k+1)}{(2k+1)!\Gamma(2\nu+1)} \tag{11}$$

である．以後，前者を方法 II，後者を方法 III と呼ぶことにする．本論文では，まだ報告されていない方法 II と方法 III の誤差解析を行う．

2. 方法 II の誤差解析

関数 $J_{\nu+n}(x)$ および $Y_{\nu+n}(x)$ はともに同じ漸化式 (2) を満足する．逆に式 (2) の一般解は

$$F_{\nu+n}(x) = \xi J_{\nu+n}(x) + \eta Y_{\nu+n}(x) \tag{12}$$

によって表される．ここで ξ および η は任意定数である．これらの任意定数は式 (1) によって決定される．式 (1) から次式が得られる．

$$F_{\nu+m+1}(x) = \xi J_{\nu+m+1}(x) + \eta Y_{\nu+m+1}(x) = 0 \tag{13}$$

$$F_{\nu+m}(x) = \xi J_{\nu+m}(x) + \eta Y_{\nu+m}(x) = \alpha \tag{14}$$

式 (12) と (13) から η を消去すると次式を得る．

$$F_{\nu+n}(x) = \xi \left(J_{\nu+n}(x) - \frac{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \right) \tag{15}$$

式 (15) と関係式 (6) より

$$\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} \left(\frac{F_{\nu+2k}(x)}{\xi} + \frac{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \right) + \sum_{k=m/2+1}^{\infty} \varepsilon_k^{(2)} J_{\nu+2k}(x) = \cos x \tag{16}$$

が得られる．式 (15) と (16) から ξ を消去し，$\Phi_{\nu,m}^{(2)}(x)$ を

$$\Phi_{\nu,m}^{(2)}(x) = \frac{1}{\cos x} \left(\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} \frac{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} + \sum_{k=m/2+1}^{\infty} \varepsilon_k^{(2)} J_{\nu+2k}(x) \right) \tag{17}$$

と定義すると，次式が得られる．

$$J_{\nu+n}(x) = \frac{\cos x F_{\nu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} F_{\nu+2k}(x)} (1 - \Phi_{\nu,m}^{(2)}(x)) + \frac{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \tag{18}$$

さらに，

$$\Theta_{\nu,m,n}(x) = \frac{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+n}(x)}{J_{\nu+n}(x) Y_{\nu+m+1}(x)} \tag{19}$$

と定義すれば，

$$J_{\nu+n}(x) = \frac{\cos x F_{\nu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} F_{\nu+2k}(x)} (1 - \Phi_{\nu,m}^{(2)}(x)) + J_{\nu+n}(x) \Theta_{\nu,m,n}(x) \tag{18'}$$

と表すこともできる．

したがって，式 (1) を出発値として，漸化式 (2) を繰り返し適用することより得られた $F_{\nu+m-1}(x)$, $F_{\nu+m-2}(x), \cdots, F_\nu(x)$ を用いて，式 (8) により，10 進 p 桁の精度で $J_{\nu+n}(x)$ が計算できるためには，

$$|\Phi_{\nu,m}^{(2)}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{20}$$

および

$$|\Theta_{\nu,m,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{21}$$

が成り立てばよい．

$J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (8) の相対誤差 $E_{\nu,m,n}^{(2)}(x)$ は，式 (18) あるいは (18′) より，

$$E_{\nu,m,n}^{(2)}(x) = \frac{\dfrac{\cos x F_{\nu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(2)} F_{\nu+2k}(x)} - J_{\nu+n}(x)}{J_{\nu+n}(x)} = \frac{\Phi_{\nu,m}^{(2)}(x) - \Theta_{\nu,m,n}(x)}{1 - \Phi_{\nu,m}^{(2)}(x)} \tag{22}$$

と表され，さらに，$|\Phi_{\nu,m}^{(2)}(x)| \ll 1$ のときには，

$$E_{\nu,m,n}^{(2)}(x) \approx \Phi_{\nu,m}^{(2)}(x) - \Theta_{\nu,m,n}(x) \tag{23}$$

と表される．

2.1 $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ の変形

式 (17) で表される $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ を変形しよう．式 (6) を用いれば，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(2)}_{\nu,m} &= \frac{1}{\cos x}\Biggl(\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(2)}\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \\
&\qquad + \cos x - \sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(2)}J_{\nu+2k}(x)\Biggr) \\
&= \Biggl(\cos x Y_{\nu+m+1}(x) \\
&\qquad + \frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(2)}R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)\Biggr) \\
&\qquad \Bigg/ \Bigl(\cos x Y_{\nu+m+1}(x)\Bigr)
\end{aligned} \tag{24}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&R_{m-2k,\nu+2k+1}(x) \\
&\quad = \frac{\pi x}{2}\Bigl(J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x) - J_{\nu+2k}(x)Y_{\nu+m+1}(x)\Bigr) \\
&\quad = \sum_{l=0}^{m/2-k}\frac{(-1)^l(m-2k-l)!\Gamma(\nu+m-l+1)}{l!(m-2k-2l)!\Gamma(\nu+2k+l+1)} \\
&\qquad \cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k+2l}
\end{aligned} \tag{25}
$$

は Lommel 多項式[4]である．

式 (24) の分子の第 1 項を書き換えよう．次式で表される $\cos xJ_\nu(x)$ のベキ級数展開（付録 A 参照）

$$
\begin{aligned}
&\cos x J_\nu(x) \\
&\quad = \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&\qquad \cdot\frac{\Gamma(\nu+2k+1/2)}{k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\nu+k+1/2)}
\end{aligned} \tag{26}
$$

を用いて変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\cos x Y_{\nu+m+1}(x) \\
&= \Bigl(\cos x J_{\nu+m+1}(x)\cos(\nu+m+1)\pi - \cos x J_{-\nu-m-1}(x)\Bigr) \\
&\quad \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= \Biggl\{\sqrt{\pi}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m+2k+3/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m+k+2) \\
&\qquad \cdot\Gamma(\nu+m+k+3/2)\Bigr) \\
&\quad - \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(-\nu-m+2k-1/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(-\nu-m+k) \\
&\qquad \cdot\Gamma(-\nu-m+k-1/2)\Bigr)\Biggr\} \\
&\quad \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= \Biggl\{\sqrt{\pi}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m+2k+3/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m+k+2) \\
&\qquad \cdot\Gamma(\nu+m+k+3/2)\Bigr) \\
&\quad - \Biggl[\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{m}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(-\nu-m+2k-1/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(-\nu-m+k) \\
&\qquad \cdot\Gamma(-\nu-m+k-1/2)\Bigr) \\
&\quad + \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^{k+m+1}(x/2)^{2k+2m+2} \\
&\qquad \cdot\Gamma(-\nu+m+2k+3/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl((k+m+1)!\Gamma(k+m+3/2)\Gamma(-\nu+k+1) \\
&\qquad \cdot\Gamma(-\nu+k+1/2)\Bigr)\Biggr]\Biggr\} \\
&\quad \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= \Biggl\{-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{m}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(-\nu-m+2k-1/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(-\nu-m+k) \\
&\qquad \cdot\Gamma(-\nu-m+k-1/2)\Bigr) \\
&\quad + \sqrt{\pi}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m+2k+3/2)\Bigr) \\
&\qquad \Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m+k+2) \\
&\qquad \cdot\Gamma(\nu+m+k+3/2)\Bigr) \\
&\quad - \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \\
&\quad \cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^{k+m+1}(x/2)^{2k+2m+2} \\
&\qquad \cdot\Gamma(-\nu+m+2k+3/2)\Bigr)
\end{aligned}
$$

$$
\Big/ \Big((k+m+1)!\Gamma(k+m+3/2)\Gamma(-\nu+k+1) \cdot \Gamma(-\nu+k+1/2)\Big) \Bigg\}
$$

$$
\Big/ \sin(\nu+m+1)\pi
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \\
&\cdot \sum_{k=0}^{m} \Big((-1)^k (x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m-k+1) \cdot \Gamma(\nu+m-k+3/2)\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m-2k+3/2)\Big) \\
&+ \Bigg\{ \sqrt{\pi}\cos(\nu+m+1)\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \\
&\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^k (x/2)^{2k}\Gamma(3/2+\nu+m+2k)\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m+k+2) \cdot \Gamma(\nu+m+k+3/2)\Big) \\
&- \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+1} \\
&\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^{k+m+1}(x/2)^{2k}\Gamma(-\nu+m+2k+3/2)\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big((m+k+1)!\Gamma(m+k+3/2)\Gamma(-\nu+k+1) \cdot \Gamma(-\nu+k+1/2)\Big) \Bigg\} \\
&\Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \qquad (27)
\end{aligned}
$$

上式において，最後の式の第 1 の部分の変形には，ガンマ関数の反転公式を用いた．

式 (24) の右辺の分子の第 2 項は，次のように書き換えられる[5]．

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(2)} R_{m-2k,\nu+2k+1}(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&\quad \cdot \sum_{l=0}^{m/2-k}\frac{(-1)^l(m-2k-l)!\Gamma(\nu+m-l+1)}{l!(m-2k-2l)!\Gamma(\nu+2k+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1}\sum_{j=0}^{m/2}\sum_{l=0}^{j}\varepsilon_{j-l}^{(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^l(m-2j+l)!\Gamma(\nu+m-l+1)}{l!(m-2j)!\Gamma(\nu+2j-l+1)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{j=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\frac{(-1)^j}{(m-2j)!} \\
&\quad \cdot \sum_{l=0}^{j}\Big((\nu+2j-2l)\Gamma(2\nu+2j-2l) \cdot (m-2j+l)!\Gamma(\nu+m-l+1)\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big(l!\Gamma(2j-2l+1)\Gamma(\nu+2j-l+1)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{j=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\frac{(-1)^j}{(m-2j)!} \\
&\quad \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\Big((\nu+2j-2l)\Gamma(2\nu+2j-2l) \cdot (m-2j+l)!\Gamma(\nu+m-l+1)\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big(l!\Gamma(2j-2l+1)\Gamma(\nu+2j-l+1)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\Big((\nu+2j)(m-2j)!\Gamma(\nu+m+1) \cdot \Gamma(2\nu+2j)\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big((2j)!\Gamma(\nu+2j+1)\Big) \\
&\quad \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\Big((1/2-j)_l(m-2j+1)_l(-\nu-2j)_l \cdot (-\nu/2-j+1)_l(-j)_l\Big) \\
&\qquad \Big/ \Big(l!(-\nu-j+1/2)_l(-\nu-j+1)_l \cdot (-\nu-m)_l(-\nu/2-j)_l\Big) \qquad (28)
\end{aligned}
$$

ただし，$(a)_j$ は，Pochhammer の記号である（$(a)_j = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$）．

ここで，一般化された超幾何級数の和に関する定理[6]

$$
\begin{aligned}
&{}_5F_4\Big(a, \frac{a}{2}+1, b, c, -j; \\
&\qquad \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a-c, 1+a+j; 1\Big) \\
&\quad = \frac{(1+a)_j(1+a-b-c)_j}{(1+a-b)_j(1+a-c)_j} \qquad (j: \text{整数}) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

を用いれば，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(2)} R_{m-2k,\nu+2k+1}(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)} \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\frac{(\nu+2j)(m-2j)!\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(2\nu+2j)}{(2j)!\Gamma(\nu+2j+1)} \\
&\quad \cdot \frac{(-\nu-2j+1)_j(-\nu-m+j-1/2)_j}{(-\nu-j+1/2)_j(-\nu-m)_j} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}
\end{aligned}
$$

$$
\cdot\sum_{j=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\frac{\Gamma(\nu+m-j+1)\Gamma(-\nu-m+2j-1/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+1/2)\Gamma(-\nu-m+j-1/2)}
$$
$$
=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}
$$
$$
\cdot\sum_{j=0}^{m/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}\frac{(-1)^j\Gamma(\nu+m-j+1)\Gamma(\nu+m-j+3/2)}{j!\Gamma(j+1/2)\Gamma(\nu+m-2j+3/2)} \tag{30}
$$

このように，式の簡単化のために，定理 (29) が大きな役割を担っている．式 (27) と (30) を式 (24) の右辺に代入すると，その分子において，第 1 の部分をベキ級数で展開したものの一部と第 2 の部分（$k=0,1,\cdots,m/2$ の項）が相殺し，次式を得る．

$$
\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)
$$
$$
=\Biggl[\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}
$$
$$
\cdot\sum_{k=m/2+1}^{m}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m-k+1)
$$
$$
\cdot\Gamma(\nu+m-k+3/2)\Bigr)
$$
$$
\Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m-2k+3/2)\Bigr)
$$
$$
+\Biggl\{\sqrt{\pi}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1}
$$
$$
\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m+2k+3/2)\Bigr)
$$
$$
\Big/\Bigl(k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m+k+2)
$$
$$
\cdot\Gamma(\nu+m+k+3/2)\Bigr)
$$
$$
-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+1}
$$
$$
\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl((-1)^{k+m+1}(x/2)^{2k}\Gamma(-\nu+m+2k+3/2)\Bigr)
$$
$$
\Big/\Bigl((m+k+1)!\Gamma(m+k+3/2)\Gamma(-\nu+k+1)
$$
$$
\cdot\Gamma(-\nu+k+1/2)\Bigr)\Biggr\}
$$
$$
\Big/\sin(\nu+m+1)\pi\Biggr]
$$
$$
\Big/\Bigl(\cos xY_{\nu+m+1}(x)\Bigr) \tag{31}
$$

上述した項の相殺により，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ が小さくなりうることに注意しよう．逆に，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ が小さくなるためには，式 (24) の分子で項の相殺が起こらなければならないということである．

上式において，$(\nu+m/2)\cdot m/2\gg x/2$ ならば，[ ] の第 1 の部分の $k=m/2+1$ の項が主要項である．したがって，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ に対する有用な評価式として，次式が得られる．

$$
\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)
$$
$$
\approx\frac{(-1)^{m/2}\Gamma(\nu+m/2)\Gamma(\nu+m/2+1/2)(x/2)^{-\nu+1}}{\sqrt{\pi}\cos xY_{\nu+m+1}(x)(m/2+1)!\Gamma(m/2+3/2)\Gamma(\nu-1/2)}
$$
$$
=\frac{2(-1)^{m/2}\Gamma(2\nu+m)}{\sqrt{\pi}\cos xY_{\nu+m+1}(x)(m+2)!\Gamma(\nu-1/2)}(2x)^{-\nu+1} \tag{32}
$$

$\nu=1/2$ のときには、上の評価式は零となる．$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ そのものは小さくなるが，零になるわけではない．式 (31) において，[ ] の第一の部分（$k=m/2+1$ から m までの和の部分）は，$m\geq 2$ ならば零になり，{} の部分だけが残る．したがって，この $\nu=1/2$ の場合には，誤差は極端に小さくなる．

2.2 方法 II による $J_{\nu+n}(x)$ の計算について

$J_{\nu+n}(x)$ の具体的な計算法については，文献 1) に述べられたものと類似の方法を用いればよいので，詳しくは述べない．

$\nu\ll m$ および x/m が小さいとき，式 (17) で与えられる $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ の絶対値は，固定された ν および x に対して，m の単調減少関数であることが，評価式 (32) から分かる（これは，$x/m\ll 1$ ならば，あらい近似 $Y_{\nu+m+1}(x)\approx-\Gamma(\nu+m+1)(x/2)^{-\nu-m-1}/\pi$ により確かめられる）．さらに，式 (19) で与えられる $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ は，$\nu+m+1>x$ のときには，m の単調減少関数であることが，ベッセル関数の性質から容易に分かる．したがって，固定された ν および x に対して，式 (20) を満足する最小の m を M とし，$|\Theta_{\nu,M,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$ を満足する非負の n が存在したとき，その最大値を N とすれば，$0\leq n\leq N$ に対して，式 (8) により 10 進 p 桁の精度で $J_{\nu+n}(x)$ が計算できることになる（$n>N$ に対しては，$|\Theta_{\nu,m,n}(x)|<0.5\times10^{-p}$ を満足するように，m の値を M より大きく選ぶ必要がある）．

表 1 の (a)，(b)，(c) には，$J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (8) の値，その相対誤差，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ の値（式 (18) の計算値），その評価式 (32) の値および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ の値（式 (19) の計算値）の数値例として，$x=10$ で，表中に記したν，n，m の場合の結果を示す．これらは，FUJITSU の M-1600 の倍精度計算による結果である（以下同様）．式 (32) が$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ の十分な評価式になっていることが分かる．$n=0$ の場合には，$\Theta_{\nu,m,n}(x)$ は $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ に比べて十分に小さいことが分かる．また (b) の場合は，式 (8) の相対誤差は，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ ではなく，式 (23) で評価しなければならないことが分かる．紙面の都合上，この一例しか示すことができないが，他の場合の結果もほぼ同様である．

表 1 の (d)，(e)，(f) には，$x=10$，$n=0$，$m=20$

表1 $x=10$ の場合の $J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (8) の相対誤差，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$

Table 1 Relative error of approximation (8) to $J_{\nu+n}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ and $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ in the case of $x=10$.

	(a) $\nu=0.2$ $n=0$ $m=20$	(b) $\nu=0.2$ $n=16$ $m=20$	(c) $\nu=0.8$ $n=0$ $m=20$
Approximation (8)	$-2.16972896172\cdot10^{-1}$	$1.25676073845\cdot10^{-3}$	$-3.10849847378\cdot10^{-2}$
Ralative error of (8)	$-1.56\cdot10^{-7}$	$-4.64\cdot10^{-6}$	$6.18\cdot10^{-7}$
$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$-1.56\cdot10^{-7}$	$-1.56\cdot10^{-7}$	$6.18\cdot10^{-7}$
Estimate (32) of $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$-1.57\cdot10^{-7}$	$-1.57\cdot10^{-7}$	$6.20\cdot10^{-7}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$1.67\cdot10^{-10}$	$4.48\cdot10^{-6}$	$4.25\cdot10^{-10}$

	(d) $\nu=0.51$ $n=0$ $m=20$	(e) $\nu=0.501$ $n=0$ $m=20$	(f) $\nu=0.5$ $n=0$ $m=20$
Approximation (8)	$-1.34032208684\cdot10^{-1}$	$-1.36941908044\cdot10^{-1}$	$-1.37263735718\cdot10^{-1}$
Ralative error of (8)	$1.11\cdot10^{-8}$	$8.44\cdot10^{-10}$	$-2.69\cdot10^{-10}$
$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$1.13\cdot10^{-8}$	$1.03\cdot10^{-9}$	$-7.95\cdot10^{-11}$
Estimate (32) of $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$1.14\cdot10^{-8}$	$1.12\cdot10^{-9}$	0.0
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$1.90\cdot10^{-10}$	$1.89\cdot10^{-10}$	$1.89\cdot10^{-10}$

表2 $x\approx\pi/2$ の場合の $J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (8) の相対誤差，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$

Table 2 Relative error of approximation (8) to $J_{\nu+n}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ and $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ in the case of $x\approx\pi/2$.

	(a) $x=1.5$ $\nu=0.2$ $n=0$ $m=10$	(b) $x=1.571$ $\nu=0.2$ $n=0$ $m=10$	(c) $x=1.5707963$ $\nu=0.2$ $n=0$ $m=10$
Approximation (8)	$6.04371510680\cdot10^{-1}$	$5.74371147341\cdot10^{-1}$	$5.73570459020\cdot10^{-1}$
Ralative error of (8)	$-3.39\cdot10^{-10}$	$2.04\cdot10^{-7}$	$-1.55\cdot10^{-3}$
$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$-3.39\cdot10^{-10}$	$-1.56\cdot10^{-7}$	$-1.55\cdot10^{-3}$
Estimate (32) of $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$-3.40\cdot10^{-10}$	$2.05\cdot10^{-7}$	$-1.55\cdot10^{-3}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$-4.20\cdot10^{-18}$	$-1.45\cdot10^{-17}$	$-1.45\cdot10^{-17}$

の場合に対して，ν を 1/2 に近づけていく場合の結果を示す．$\nu=1/2$ のときに，近似式の精度が高いことは前述の理由による．

表2には，$\nu=0.2$，$n=0$，$m=10$ の場合に対して，x が $\pi/2$ に近いときの結果を示す．式 (32) からも分かるように，$|\cos x|\ll 1$ のときには，本方法の近似式の精度は低くなる．このことは，本方法 II の欠点であり，この場合には，方法 III あるいは方法 I を代わりに用いることが必要となる．

3. 方法 III の誤差解析

式 (12)～(15) は，方法 I と同じである．式 (15) と関係式 (7) より

$$\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(3)}\left(\frac{F_{\nu+2k+1}(x)}{\xi}+\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right)$$
$$+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\varepsilon_k^{(2)}J_{\nu+2k+1}(x)=\sin x \qquad (33)$$

が得られる．式 (15) と (33) から ξ を消去し，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ を

$$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)=\frac{1}{\sin x}\left(\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(3)}\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\varepsilon_k^{(3)}J_{\nu+2k+1}(x)\right) \qquad (34)$$

と定義すると，次式が得られる．

$$J_{\nu+n}(x)=\frac{\sin xF_{\nu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k^{(3)}F_{\nu+2k+1(x)}}(1-\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x))$$
$$+\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \qquad (35)$$

さらに，式 (19) を用いれば，

$$J_{\nu+n}(x) = \frac{\sin x F_{\nu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k^{(3)} F_{\nu+2k+1}(x)} (1 - \Phi_{\nu,m}^{(3)}(x)) + J_{\nu+n}(x) \Theta_{\nu,m,n}(x) \qquad (35')$$

と表すこともできる．

したがって，式 (1) を出発値として，漸化式 (2) を繰り返し適用することより得られた $F_{\nu+m-1}(x)$, $F_{\nu+m-2}(x), \cdots, F_\nu(x)$ を用いて，式 (9) により，10 進 p 桁の精度で $J_{\nu+n}(x)$ が計算できるためには，方法 II と同様に，

$$|\Phi_{\nu,m}^{(3)}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \qquad (36)$$

および式 (21) が成り立てばよい．

$J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (9) の相対誤差 $E_{\nu,m,n}^{(3)}(x)$ については，式 (22) と (23) と同様のものが成り立つ．

3.1 $\Phi_{\nu,m}^{(3)}(x)$ の変形

式 (34) で表される $\Phi_{\nu,m}^{(3)}(x)$ を変形しよう．式 (7) を用いれば，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\nu,m}^{(3)}(x) \\
&= \frac{1}{\sin x} \left(\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(3)} \frac{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+2k+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} + \sin x - \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(3)} J_{\nu+2k+1}(x) \right) \\
&= \frac{\sin x Y_{\nu+m+1}(x) + \dfrac{2}{\pi x} \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k^{(3)} R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)}{\sin x Y_{\nu+m+1}(x)}
\end{aligned} \qquad (37)$$

上式の分子の第 1 項を書き換えよう．次式で表される $\sin x J_\nu(x)$ のベキ級数展開（付録 B 参照）

$$\sin x J_\nu(x) = \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{\Gamma(\nu+2k+3/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\nu+k+3/2)} \qquad (38)$$

を用いて変形すると，

$$\begin{aligned}
&\sin x Y_{\nu+m+1}(x) \\
&= \left(\sin x J_{\nu+m+1}(x) \cos(\nu+m+1)\pi - \sin x J_{-\nu-m-1}(x)\right) \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= \Bigg\{ \sqrt{\pi} \cos(\nu+m+1)\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1} \Gamma(\nu+m+k+5/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+5/2)} \\
&\qquad - \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1} \Gamma(-\nu-m+2k+1/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(-\nu-m+k)\Gamma(-\nu-m+k+1/2)} \Bigg\} \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= \Bigg\{ \sqrt{\pi} \cos(\nu+m+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1} \Gamma(\nu+m+2k+5/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+5/2)} \\
&\qquad - \Bigg[\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1} \Gamma(-\nu-m+2k+1/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(-\nu-m+k)\Gamma(-\nu-m+k+1/2)} \\
&\qquad + \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^{m+k+1} (x/2)^{2m+k+3} \Gamma(-\nu+m+2k+5/2)\Big) \\
&\qquad\qquad \Big/ \Big((m+k+1)!\Gamma(m+k+5/2)\Gamma(-\nu+k+1) \cdot \Gamma(-\nu+k+3/2)\Big) \Bigg] \Bigg\} \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= \Bigg\{ -\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1} \Gamma(-\nu-m+2k+1/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(-\nu-m+k)\Gamma(-\nu-m+k+1/2)} \\
&\qquad + \sqrt{\pi} \cos(\nu+m+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1} \Gamma(\nu+m+2k+5/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+5/2)} \\
&\qquad - \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^{m+k+1} (x/2)^{2m+k+3} \Gamma(-\nu+m+2k+5/2)\Big) \\
&\qquad\qquad \Big/ \Big((m+k+1)!\Gamma(m+k+5/2)\Gamma(-\nu+k+1) \cdot \Gamma(-\nu+k+3/2)\Big) \Bigg\} \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k} \Gamma(\nu+m-k+1)\Gamma(\nu+m-k+1/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m-2k+1/2)} \\
&\quad + \Bigg\{ \sqrt{\pi} \cos(\nu+m+1)\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1}
\end{aligned}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k+1}\Gamma(\nu+m+2k+5/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+5/2)}$$
$$-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+1}$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big((-1)^{m+k+1}(x/2)^{2k+1}\Gamma(-\nu+m+2k+5/2)\Big)$$
$$\Big/\Big((m+k+1)!\Gamma(m+k+5/2)\Gamma(-\nu+k+1)$$
$$\cdot\Gamma(-\nu+k+3/2)\Big)\Bigg\}$$
$$\Big/\sin(\nu+m+1)\pi \qquad (39)$$

上式において，最後の式の第1の部分の変形において，ガンマ関数の反転公式を用いた．

式 (37) の右辺の分子の第2項は，次のように書き換えられる．

$$\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(3)}R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$\cdot\sum_{l=0}^{m/2-k-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\frac{(-1)^l(m-2k-l-1)!\Gamma(\nu+m-l+1)}{l!(m-2k-2l-1)!\Gamma(\nu+2k+l+2)}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{j=0}^{m/2-1}\sum_{l=0}^{j}\varepsilon_{j-l}^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$
$$\cdot\frac{(-1)^l(m+l-2j-1)!\Gamma(\nu+m-l+1)}{l!(m-2j-1)!\Gamma(\nu-l+2j+2)}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{j=0}^{m/2-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{j}\frac{(-1)^j}{(m-2j-1)!}$$
$$\cdot\sum_{l=0}^{j}\Big((\nu+2j-2l+1)\Gamma(2\nu+2j-2l+1)$$
$$\cdot(m+l-2j-1)!\Gamma(\nu+m-l+1)\Big)$$
$$\Big/\Big(l!\Gamma(2j-2l+2)\Gamma(\nu-l+2j+2)\Big)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{j=0}^{m/2-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{j}\frac{(-1)^j}{(m-2j-1)!}$$
$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Big((\nu+2j-2l+1)\Gamma(2\nu+2j-2l+1)$$
$$\cdot(m+l-2j-1)!\Gamma(\nu+m-l+1)\Big)$$
$$\Big/\Big(l!\Gamma(2j-2l+2)\Gamma(\nu-l+2j+2)\Big)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{j=0}^{m/2-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{j}\frac{(-1)^j}{(m-2j-1)!}$$
$$\cdot\frac{(\nu+2j+1)(m-2j-1)!\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(2\nu+2j+1)}{(2j+1)!\Gamma(\nu+2j+2)}$$
$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\Big((-j-1/2)_l(m-2j)_l(-\nu-2j-1)_l$$
$$\cdot(-\nu/2-j+1/2)_l(-j)_l\Big)$$
$$\Big/\Big(l!(-\nu-j)_l(-\nu-j+1/2)_l$$
$$\cdot(-\nu-m)_l(-\nu/2-j-1/2)_l\Big) \qquad (40)$$

ここで，定理 (29) を用いれば，次式が得られる．

$$\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k^{(3)}R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\sum_{j=0}^{m/2-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{j}\frac{(-1)^j}{(m-2j-1)!}$$
$$\cdot\frac{(\nu+2j+1)(m-2j-1)!\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(2\nu+2j+1)}{(2j+1)!\Gamma(\nu+2j+2)}$$
$$\cdot\frac{(-\nu-2j)_j(-\nu-m+j+1/2)_j}{(-\nu-j+1/2)_j(-\nu-m)_j}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\sum_{j=0}^{m/2-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(\nu+m-j+1)\Gamma(-\nu-m+2j+1/2)}{j!\Gamma(j+3/2)\Gamma(-\nu-m+j+1/2)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\sum_{j=0}^{m/2-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$
$$\cdot\frac{(-1)^j\Gamma(\nu+m-j+1)\Gamma(\nu+m-j+1/2)}{j!\Gamma(j+3/2)\Gamma(\nu+m-2j+1/2)} \qquad (41)$$

式 (39) と (41) を式 (37) の右辺に代入すると，方法 II の場合と同様に，その分子において，第1の部分のベキ級数展開の一部と第2の部分（$k=0,1,\cdots,m/2-1$ の項）が相殺し，次式を得る．

$$\Phi_{\nu,m}^{(3)}(x)$$
$$=\Bigg[\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}$$
$$\cdot\sum_{k=m/2}^{m}\Big((-1)^k(x/2)^{2k}\Gamma(\nu+m-k+1)$$
$$\cdot\Gamma(\nu+m-k+1/2)\Big)$$
$$\Big/\Big(k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m-2k+1/2)\Big)$$
$$+\Bigg\{\sqrt{\pi}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+1}$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big((-1)^k(x/2)^{2k+1}\Gamma(\nu+m+2k+5/2)\Big)$$
$$\Big/\Big(k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m+k+2)$$
$$\cdot\Gamma(\nu+m+k+5/2)\Big)$$
$$-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+1}$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big((-1)^{m+k+1}(x/2)^{2k+1}\Gamma(-\nu+m+2k+5/2)\Big)$$

表3 $x=10$ の場合の $J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (9) の相対誤差，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$

Table 3 Relative error of approximation (9) to $J_{\nu+n}(x)$, $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ and $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ in the case of $x=10$.

	(a) $\nu=0.2$, $n=0$, $m=20$	(b) $\nu=0.2$, $n=16$, $m=20$	(c) $\nu=0.8$, $n=0$, $m=20$
Approximation (9)	$-2.16969009496\cdot10^{-1}$	$1.25673822586\cdot10^{-3}$	$-3.10826114420\cdot10^{-2}$
Ralative error of (9)	$-1.81\cdot10^{-5}$	$-2.26\cdot10^{-5}$	$-7.57\cdot10^{-5}$
$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$	$-1.81\cdot10^{-5}$	$-1.81\cdot10^{-5}$	$-7.57\cdot10^{-5}$
Estimate (43) of $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$	$-1.81\cdot10^{-5}$	$-1.81\cdot10^{-5}$	$-7.57\cdot10^{-5}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$1.67\cdot10^{-10}$	$4.48\cdot10^{-6}$	$4.25\cdot10^{-10}$

表4 $x\approx\pi$ の場合の $J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (9) の相対誤差，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$

Table 4 Relative error of approximation (9) to $J_{\nu+n}(x)$, $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ and $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ in the case of $x\approx\pi$.

	(a) $x=3.1$, $\nu=0.2$, $n=0$, $m=16$	(b) $x=3.141$, $\nu=0.2$, $n=0$, $m=16$	(c) $x=3.1415927$, $\nu=0.2$, $n=0$, $m=16$
Approximation (9)	$-1.74469955370\cdot10^{-1}$	$-1.90296967671\cdot10^{-1}$	$-1.90444250769\cdot10^{-1}$
Ralative error of (9)	$3.65\cdot10^{-10}$	$3.19\cdot10^{-8}$	$-4.08\cdot10^{-4}$
$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$	$3.65\cdot10^{-10}$	$3.19\cdot10^{-8}$	$-4.08\cdot10^{-4}$
Estimate (43) of $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$	$3.65\cdot10^{-10}$	$3.19\cdot10^{-8}$	$-4.08\cdot10^{-4}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$8.60\cdot10^{-22}$	$1.20\cdot10^{-21}$	$1.21\cdot10^{-21}$

$$/\Big((m+k+1)!\Gamma(m+k+5/2)\Gamma(-\nu+k+1)\cdot\Gamma(-\nu+k+3/2)\Big)\Big\} \Big/\sin(\nu+m+1)\pi\Big] \Big/ \big(\sin xY_{\nu+m+1}(x)\big) \qquad (42)$$

上式において，$(\nu+m/2)\cdot m/2\gg x/2$ ならば，[ ] の第1の部分の $k=m/2$ の項が主要項である．したがって，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ に対する有用な評価式として，次式が得られる．

$$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x) \approx \frac{(-1)^{m/2+1}\Gamma(\nu+m/2+1)\Gamma(\nu+m/2+1/2)(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\sin xY_{\nu+m+1}(x)(m/2)!\Gamma(m/2+3/2)\Gamma(\nu+1/2)} = \frac{2(-1)^{m/2+1}\Gamma(2\nu+m+1)}{\sqrt{\pi}\sin xY_{\nu+m+1}(x)(m+1)!\Gamma(\nu+1/2)}(2x)^{-\nu} \qquad (43)$$

3.2 方法 III による $J_{\nu+n}(x)$ の計算について

方法 II と同様にして，$J_{\nu+n}(x)$ を計算することができる．

表3 の (a), (b), (c) には，$J_{\nu+n}(x)$ の近似式 (9) の値，その相対誤差，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ の値（式 (34) の計算値），その評価式 (43) の値および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ の値の数値例として，$x=10$ で，表中に記した ν, n, m の場合の結果を示す．式 (43) が $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ の十分な評価式になっていることが分かる．$n=0$ の場合には，$\Theta_{\nu,m,n}(x)$ は $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ に比べて十分に小さいことが分かる．また (b) の場合は，式 (9) の相対誤差は，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ ではなく，$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)-\Theta_{\nu,m,n}(x)$ で評価しなければならないことが分かる．紙面の都合上，この一例しか示すことができないが，他の場合の結果もほぼ同様である．

表4 には，$\nu=0.2$, $n=0$, $m=16$ の場合に対して，x が π に近いときの結果を示す．式 (43) からも分かるように，$|\sin x|\ll 1$ のときには，本方法の近似式の精度は低くなる．このことは，本方法 III の欠点であり，この場合には，方法 II あるいは方法 I を代わりに用いることが必要となる．

4. 方法 I, II, III の比較

方法 I の場合には，文献 2) から，

$$J_{\nu+n}(x) = \frac{F_{\nu+n}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k^{(1)}F_{\nu+2k}(x)}(1-\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)) + \frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+n}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \qquad (44)$$

であり，$\nu+m/2\gg x/2$ のとき，

表 5 $\nu=0.2$, $m=30$ の場合の $\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ および $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$

Table 5 $\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ and $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ in the case of $\nu=0.2$ and $m=30$.

x	$\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$	$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$
10	$1.36\cdot10^{-13}$	$7.38\cdot10^{-15}$	$1.85\cdot10^{-12}$
11	$2.40\cdot10^{-12}$	$-2.47\cdot10^{-11}$	$1.61\cdot10^{-11}$
12	$3.19\cdot10^{-11}$	$-1.72\cdot10^{-12}$	$3.65\cdot10^{-10}$
13	$3.33\cdot10^{-10}$	$-1.67\cdot10^{-11}$	$-4.49\cdot10^{-9}$
14	$2.81\cdot10^{-9}$	$-9.36\cdot10^{-10}$	$-1.50\cdot10^{-8}$
15	$1.98\cdot10^{-8}$	$1.19\cdot10^{-9}$	$-1.50\cdot10^{-7}$
16	$1.18\cdot10^{-7}$	$5.62\cdot10^{-9}$	$1.89\cdot10^{-6}$
17	$6.11\cdot10^{-7}$	$1.01\cdot10^{-7}$	$2.76\cdot10^{-6}$
18	$2.76\cdot10^{-6}$	$-1.90\cdot10^{-7}$	$1.51\cdot10^{-5}$
19	$1.10\cdot10^{-5}$	$-5.08\cdot10^{-7}$	$-2.86\cdot10^{-4}$
20	$3.94\cdot10^{-5}$	$-4.39\cdot10^{-6}$	$-1.59\cdot10^{-4}$

表 6 $\nu=0.8$, $m=30$ の場合の $\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ および $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$

Table 6 $\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ and $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ in the case of $\nu=0.8$ and $m=30$.

x	$\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$	$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$	$\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$
10	$8.96\cdot10^{-14}$	$-3.64\cdot10^{-14}$	$9.46\cdot10^{-12}$
11	$1.59\cdot10^{-12}$	$1.22\cdot10^{-10}$	$8.28\cdot10^{-11}$
12	$2.12\cdot10^{-11}$	$8.54\cdot10^{-12}$	$1.89\cdot10^{-9}$
13	$2.22\cdot10^{-10}$	$8.32\cdot10^{-11}$	$-2.33\cdot10^{-8}$
14	$1.88\cdot10^{-9}$	$4.69\cdot10^{-9}$	$-7.80\cdot10^{-8}$
15	$1.33\cdot10^{-8}$	$-5.98\cdot10^{-9}$	$-7.85\cdot10^{-7}$
16	$8.02\cdot10^{-8}$	$-2.85\cdot10^{-8}$	$1.00\cdot10^{-5}$
17	$4.17\cdot10^{-7}$	$-5.16\cdot10^{-7}$	$1.46\cdot10^{-5}$
18	$1.90\cdot10^{-6}$	$9.80\cdot10^{-7}$	$8.06\cdot10^{-5}$
19	$7.66\cdot10^{-6}$	$2.64\cdot10^{-6}$	$-1.54\cdot10^{-3}$
20	$2.76\cdot10^{-5}$	$2.30\cdot10^{-5}$	$-8.68\cdot10^{-4}$

$$\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x) \approx \frac{-\Gamma(\nu+m/2)}{\pi Y_{\nu+m+1}(x)(m/2+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+1} \tag{45}$$

となることが分かる．

表 5 には，$\nu=0.2$, $m=30$ の場合に対して，$x=10,11,12,\cdots,20$ のように変えたときの $\Phi^{(1)}_{\nu,m}(x)$, $\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ および $\Phi^{(3)}_{\nu,m}(x)$ の評価式の値を示す．**表 6** には，ν を $\nu=0.8$ とした場合について，表 5 と同様の結果を示す．これらの表から，$|\cos x|$ が非常に小さくなる $x=11$ の場合（$\pi/2\cdot7=10.9955\cdots$）を除いて，$\Phi^{(2)}_{\nu,m}(x)$ の評価式の値が最も小さいことが分かる．紙面の都合で，この 2 つの例しか示すことはできないが，他の場合もほぼ同様な結果が得られる．

5. おわりに

本論文では，方法 II および方法 III，すなわち，式 (8) および (9) による $J_\nu(x)$ の数値計算法の誤差解析を行った．これにより，次のような有用な知見を得ることができた．

方法 II は，同じ値の m（漸化式 (2) の繰り返し回数）に対して，$|\cos x|\ll1$ でないときには，方法 I（従来からの通常の方法），方法 III と比べて精度が高く，また，方法 II は，$\nu\cong1/2$ のとき，ν の他の値の場合と比べて精度が高くなるという特長をもっている．その反面，方法 II は，方法 I と比べて，$|\cos x|\ll1$ のときには精度が低く，また，$\cos x$ の計算を実際に必要とするという短所を持っている．

なお，本論文では扱わないが，x の複素数への拡張は，方法 I については，実軸に近いところを除いて，式 (4) の分母の和で桁落ちが生ずるので可能ではないが，方法 II および方法 III については可能である．方法 II および方法 III は複素数への拡張の面で長所を持っているといえる．

参考文献

1) 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II，pp.103–121，培風館，東京 (1965).
2) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol.35, No.5, pp.917–925 (1994).
3) Watson, G.N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, second edition, p.369, Cambridge University Press (1966).
4) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：数学公式 III，p.225，岩波書店，東京 (1968).
5) 吉田年雄：一般化された超幾何級数の和の定理の応用，情報科学リサーチジャーナル，中部大学情報科学研究所，Vol.2, pp.57–60 (1995).
6) Slater, L.J.: *Generalized Hypergeometric Functions*, p.56, Cambridge University Press (1966).
7) 犬井鉄郎：特殊関数，p.165，岩波書店，東京 (1976).

付　録　A

$$\begin{aligned}\cos x J_\nu(x) &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l x^{2l}}{(2l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(x/2)^{2j}}{j!\Gamma(\nu+j+1)}\\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l x^{2l}(-1)^{k-l}(x/2)^{2k-2l}}{(2l)!(k-l)!\Gamma(\nu+k-l+1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{2^{2l}}{(2l)!\Gamma(k-l+1)\Gamma(\nu+k-l+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l}}{(2l)!\Gamma(k-l+1)\Gamma(\nu+k-l+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-k)_l(-\nu-k)_l}{l!(1/2)_l}
\end{aligned} \tag{A-1}
$$

Gauss の公式[7]

$$
{}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{A-2}
$$

を用いると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\cos x J_\nu(x) \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \frac{\Gamma(\nu+2k+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+k+1/2)\Gamma(k+1/2)} \\
&= \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{\Gamma(\nu+2k+1/2)}{k!\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\nu+k+1/2)}
\end{aligned} \tag{A-3}
$$

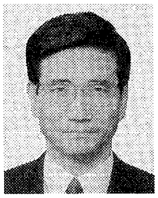
付 録 B

$$
\begin{aligned}
&\sin x J_\nu(x) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{2j}}{j!\Gamma(\nu+j+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l x^{2l+1}(-1)^{k-l}(x/2)^{2k-2l}}{(2l+1)!(k-l)!\Gamma(\nu+k-l+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{2^{2l+1}}{(2l+1)!\Gamma(k-l+1)\Gamma(\nu+k-l+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l+1}}{(2l+1)!\Gamma(k-l+1)\Gamma(\nu+k-l+1)} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{2}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-k)_l(-\nu-k)_l}{l!(3/2)_l} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{2}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-k)_l(-\nu-k)_l}{l!(1/2)_l}
\end{aligned} \tag{A-4}
$$

Gauss の公式 (A-2) を用いると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\sin x J_\nu(x) \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \frac{2}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \cdot \frac{\Gamma(\nu+2k+3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(\nu+k+3/2)\Gamma(l+3/2)} \\
&= \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \cdot \frac{\Gamma(\nu+2k+3/2)}{k!\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(\nu+k+3/2)}
\end{aligned} \tag{A-5}
$$

(平成 8 年 12 月 2 日受付)
(平成 9 年 3 月 7 日採録)



吉田 年雄（正会員）

昭和 19 年名古屋市生．昭和 43 年慶応義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 45 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和 48 年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和 60 年同講師．昭和 61 年中部大学工学部助教授．昭和 63 年同経営情報学部に配置換．平成 2 年教授．数値解析の研究に従事．特殊関数，とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味を持っている．工学博士．電子情報通信学会，日本応用数理学会会員．