3 L − 1

梯子型ネットワークの最短路を求める線形時間アルゴリズム

金子美博
岐阜大学工学部応用情報学科

1. はじめに

各枝が非負の長さを持つﾈｯﾄﾜｰｸでの最短路を求めるためには, ﾃﾞｰﾀ構造を工夫したDijkstraのｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ[1]が最速であることが知られている. 本報告では, 梯子型構造のﾈｯﾄﾜｰｸでの最短路を求める, 独自の線形時間のｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを提案する. このようなﾈｯﾄﾜｰｸでの最短路問題は, 固定ﾙｰﾄ上で情報ﾌｧｲﾙを最速に圧縮転送する方法を求める上で便利である. [2]

2. 準備

この節では, 本報告に必要な定義を示す. 点, 枝, ﾊﾟｽ, 根付木等ｸﾞﾗﾌ理論に関する基本的な用語は文献[3]を参照されたい. 非負整数の集合を$\mathbb{Z}_0^+$で表す. 枝は有向枝を指し, 辺は無向辺を指すものとする.

点集合及び辺集合(または枝集合)がそれぞれ V及びE(または B)である無向ｸﾞﾗﾌ(または有向ｸﾞﾗﾌ) Gを, $G=(V, E)$(または$G=(V, B)$)で表す. 点vに入る枝集合をB-(v)で表す. 2点x及びy(x≠y)に対して, x-yﾊﾟｽとはxからyへのﾊﾟｽを意味する.

各辺(または各枝)eに非負の長さℓ(e) (ℓ: $E\to\mathbb{Z}_0^+$)(またはℓ: $B\to\mathbb{Z}_0^+$)を持つﾈｯﾄﾜｰｸ Nを距離ﾈｯﾄﾜｰｸと呼び, $N=(V, E, \ell)$(または$N=(V, B, \ell)$)で表す. 距離ﾈｯﾄﾜｰｸ上のﾊﾟｽPの長さとは, P上の全ての辺(または枝)の長さの総和を意味し, ℓ(P)で表す. x-yﾊﾟｽで長さが最小のものをx-y最短路という.

枝の長さが全て非負であるﾈｯﾄﾜｰｸ上の最短路問題の解法としてDijkstraのｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ[1]が知られている. Dijkstra法は, ﾃﾞｰﾀ構造として, ﾋｰﾌﾟを使えば, O(| B|log| V|)の手間で最短路が求められる[3].

3. 梯子型構造のﾈｯﾄﾜｰｸ上の最短路問題

[定義1] 梯子型ｸﾞﾗﾌ$G=(V, E)$とは, 点集合 Vが$V_1=\{v_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$及び$V_2=\{v_i' \mid i=1,2,\cdots,n\}$に分割($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\phi$)され, 辺集合Eが$E=E_1$, E_2及びE_3に分割されるｸﾞﾗﾌである. ただし,

$$E_1=\{(v_i, v_{i+1}) \mid 1\leqq i\leqq n-1\}$$
$$E_2=\{(v_i, v_i') \mid 1\leqq i\leqq n\}$$
$$E_3=\{(v_i', v_{i+1}') \mid 1\leqq i\leqq n-1\}$$

である. □

一般に, 無向ｸﾞﾗﾌ上の各辺を, 双方向の枝に置き換えれば, 同値な有向ｸﾞﾗﾌに変換される. このような梯子型無向ｸﾞﾗﾌでの(有向)最短路に関して次の補題が成り立つ.

[補題1] 梯子型無向ｸﾞﾗﾌを, 同じ構造の有向ｸﾞﾗﾌに置き換えた場合, 枝(v_{i+1}, v_i), $(v_{i+1}', v_i')$$(1\leqq i\leqq n-1)$, (v_1', v_1), (v_n, v_n')のいずれかを通るv_1-v_n最短路は存在しない.

(証明) そのような枝を通るv_1-v_nﾊﾟｽをPとする. 梯子型の構造上, Pは必ず閉路を含むため, 最短路にはなり得ない. □

補題1より, 以下では, 枝集合 BがB_1, B_2及びB_3に分割される梯子型構造の有向ﾈｯﾄﾜｰｸ$N=(V, B, \ell)$での最短路問題を考える. ここで, Bは

$$\begin{aligned} B_1&=\{(v_i, v_{i+1}) \mid 1\leqq i\leqq n-1\} \\ B_2&=\{(v_i, v_i'), (v_i', v_i) \mid 2\leqq i\leqq n-1\} \\ &\qquad \cup \{(v_1, v_1'), (v_n', v_n)\} \\ B_3&=\{(v_i', v_{i+1}') \mid 1\leqq i\leqq n-1\} \end{aligned} \tag{1}$$

の3つに分割される. ただし, B_2上の双方向の枝(v_i, v_i')及び(v_i', v_i)に対して, 必ずしも$\ell(v_i, v_i')=\ell(v_i', v_i)$でなくてもよいものとする. このような$N$では, O(| B|)= O(| V|)であり, Dijkstra法では, O(| V|log| V|)の手間で最短路が求められるため, 線形時間ではない. そこで, Dijkstra法とは異なる方法で最短路を求めるｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑSPLNを提案する.

[SPLN(Shortest Path on Ladder Network)]
(入力)梯子型構造の有向ﾈｯﾄﾜｰｸN
(出力)N上のv_1-v_n最短路

Step 1. $d(v_1)=0$, $d(v_1')=\ell(v_1, v_1')$とし, $d(v_i)=d(v_i')=\infty$ $(i=2,3,\cdots,n)$とする. また, $fa(v_1)=fa(v_1')=v_1$とし, $fa(v_{i+1})=v_i$及び$fa(v_{i+1}')=v_i'$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$とする.

Step 2. $i=2,3,\cdots,n$に対して, 以下を繰り返す.

2-1. $d(v_i) = d(v_{i-1}) + \ell(v_{i-1}, v_i)$
$d(v_i')=d(v_{i-1}')+\ell(v_{i-1}', v_i')$
とする.

2-2. $d(v_i)>d(v_i')+\ell(v_i', v_i)$ならば
$d(v_i)=d(v_i')+\ell(v_i', v_i)$かつ
$fa(v_i)=v_i'$とする.

2-3. $d(v_i')>d(v_i)+\ell(v_i, v_i')$ならば
$d(v_i')=d(v_i)+\ell(v_i, v_i')$かつ
$fa(v_i')=v_i$とする.

A Linear Time Algorithm of a Shortest Path on a Ladder Network
Yoshihiro KANEKO
Faculty of Engineering, Gifu University
1-1 Yanagito, Gifu, Gifu, 501-11, Japan

Step 3．v_n, $fa(v_n)$, $fa(fa(v_n))$, $\cdots$, v_1と出力して終了．（SPLN終了）

以降では，SPLNにおいて，$d(v)$ ($v \in V$)がv_1-v最短路の長さを表し，$fa(v)$ ($v \in V$)により枝($fa(v)$, v)がv_1-v最短路上に存在することを証明する．

まず，距離ﾈｯﾄﾜｰｸ$N=(V, B, \ell)$におけるv_1を根とする根付木で，v_1からV上の各点vへのﾊﾟｽがN上でのv_1－v最短路であるものは，最短ﾊﾟｽ木と呼ばれる[3]．最短ﾊﾟｽ木に関して次の補題が知られている．

［補題２］[3]　距離ﾈｯﾄﾜｰｸ$N=(V, B, \ell)$において，点v_1を根とする根付木Tが最短ﾊﾟｽ木であるための必要十分条件は，Tにおけるv_1から各点vへの長さD[v]が，全ての枝(u, w)に対して，

$$D[w] \leq D[u] + \ell(u, w) \qquad (2)$$

を満たすことである．　□

この補題より，次の命題が得られる．

［命題１］　SPLNで求められたD(v) ($v \in V$)は，Nにおけるv_1からvへの最短路の長さである．

（証明）　SPLNの結果得られる，N上の全域木の枝集合B'は$B'=\{(fa(v), v) \mid v \in V\}$である．$B'$上の各枝e＝(u, w)に対しては

$$d(w) = d(u) + \ell(u, w)$$

であるため，式(2)が成り立つ．従って，$B \backslash B'$上の各枝が式(2)を満たすかどうか調べればよい．

Nの構造より，$|B_-(v_1')| = |B_-(v_n')| = 1$である．従って，$N$の全域木は枝($v_1$, v_1')及び(v_{n-1}', v_n')を含むため，それらの枝についても調べなくてもよい．よって，式(1)より

$$B_-(v_i) = \{(v_{i-1}, v_i),\ (v_i', v_i)\}\ (i=2, 3, \cdots, n),$$
$$B_-(v_i') = \{(v_{i-1}', v_i'), (v_i, v_i')\} (i=2, 3, \cdots, n-1),$$

の各枝について調べればよい．以降では，Step２直前でのdの値の大小関係で場合分けして調べる．

（Ⅰ）$d(v_i) \leq d(v_i')$の場合

このとき，Step2-2の条件は満たされず，$d(v_i)$は以降では更新されない．従って，$fa(v_i)=v_{i-1}$すなわち(v_i', v_i)$\notin B'$であり，

$$d(v_i) \leq d(v_i') < d(v_i') + \ell(v_i', v_i)$$

であるため，枝(v_i', v_i)は式(2)を満たす．次に，Step2-3の条件が満たされて，$d(v_i')$が更新された場合，$fa(v_i')=v_i$すなわち(v_{i-1}', v_i')$\notin B'$である．従って，

$$d(v_{i-1}') + \ell(v_{i-1}', v_i') > d(v_i')$$

であるため，枝(v_{i-1}', v_i')は式(2)を満たす．さらに，Step2-3の条件が満たされず，$d(v_i')$が更新されなければ，$fa(v_i')=v_{i-1}'$すなわち(v_i, v_i')$\notin B'$である．従って，Step2-2の条件より，

$$d(v_i') \leq d(v_{i-1}') + \ell(v_{i-1}', v_i')$$

である．

（Ⅱ）$d(v_i) > d(v_i')$の場合

このとき，Step2-3の条件は満たされず，$d(v_i')$は以降では更新されない．従って，$fa(v_i')=v_{i-1}'$すなわち(v_i, v_i')$\notin B'$であり，

$$d(v_i') < d(v_i) < d(v_i) + \ell(v_i, v_i')$$

であるため，枝(v_i, v_i')は式(2)を満たす．次に，Step2-2の条件が満たされて，$d(v_i)$が更新された場合，$fa(v_i)=v_i'$すなわち(v_{i-1}, v_i)$\notin B'$である．従って，

$$d(v_{i-1}) + \ell(v_{i-1}, v_i) > d(v_i)$$

であるため，枝(v_{i-1}, v_i)は式(2)を満たす．さらに，Step2-2の条件が満たされず，$d(v_i)$が更新されなければ，$fa(v_i)=v_{i-1}$すなわち(v_i', v_i)$\notin B'$である．従って，Step2-2の条件より，

$$d(v_i) \leq d(v_i') + \ell(v_i', v_i)$$

である．

以上より，$B \backslash B'$上の各枝が式(2)を満たすため，補題２より，題意が成り立つ．　□

［命題２］　梯子型構造の距離ﾈｯﾄﾜｰｸに対する，SPLNの手間は$O(|V|)$である．

（証明）各Stepの手間は全て$O(|V|)$である．　□

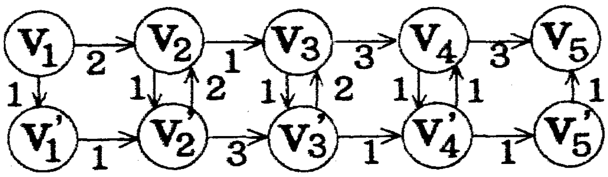

図１．梯子型構造の距離ﾈｯﾄﾜｰｸN_1

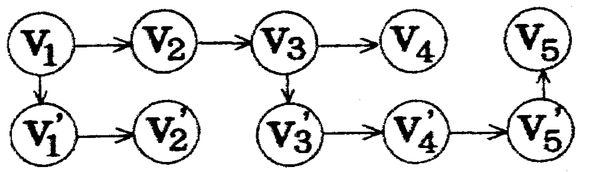

図２．N_1上の最短ﾊﾟｽ木

例として，図１の距離ﾈｯﾄﾜｰｸN_1を考える．ただし，枝の付近の値は，その枝の長さを表す．SPLNによって求められるN_1上の最短ﾊﾟｽ木は図２のようになる．従って，v_1-v_5最短路は，$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_3' \to v_4' \to v_5' \to v_5$のようになる．

参考文献

［１］Dijkstra E.W, "A Note on two problems in connection with graphs," Numerische Math., 1, pp. 269-271 (1959).

［２］金子, "情報ﾌｧｲﾙの最速な圧縮転送を求める２つの線形時間ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ" 信学技報CAS97 (1998. 1).

［３］浅野:情報の構造下, 日本評論社(1994).