正確な演算を利用した幾何アルゴリズム：現状と今後の展望

6AD－8

吉田典正，津金尚志，土井　淳，金　俊赫，山内俊哉，山口富士夫
早稲田大学

1.　はじめに

現在，幾何計算に浮動小数点演算を利用するのは一般的になっている．しかし，形状の数値データだけではなく位相データの変更を行う幾何アルゴリズムでは，浮動小数点演算を用いることによって生じる誤差に起因して，位相構造の判定に矛盾が生じる場合がある．現在，この問題に対して，様々な手法が考案されているが，広い範囲の問題に対して，完全に矛盾を排除することのできるのは，正確な演算を用いた幾何アルゴリズムのみである．本報告では，正確な演算を用いた幾何アルゴリズムの現状を簡単に報告するとともに，今後の課題を述べる．

2.　浮動小数点演算を利用した幾何アルゴリズムの問題点

一般に，幾何計算に浮動小数点演算を利用することによって生じる問題は，二つある．一つは，表現・演算過程などに生じる数値的誤差であり，もう一つは，誤差に起因して生じる位相構造の判定の矛盾である．位相構造の矛盾は，どれほど数値誤差がわずかであったとしても生じうる可能性を持っているという点で特徴的である．

現在までに，この問題に対して，浮動小数点演算を用いる手法では，許容誤差を用いて非常に接近した幾何要素は同じ位置を占めているとみなす手法，数値計算の計算結果よりも位相構造の無矛盾性を優先させる手法などが提案されている．

単純に許容誤差を用いた手法では，一致判定の同値関係が破綻してしまうことが指摘されている[1]．幾何要素の許容誤差を可変にし，高い信頼性を実現したシステム[2]も提案されているが，このシステムは，probably reliable（おそらく信頼できる）ではあるが，provably reliable（証明されるほど信頼できる）ではない．

数値計算の結果よりも位相の無矛盾性を優先させる手法は，数値計算の誤差がどれだけ大きくとも位相構造を矛盾なく判定することができたならば，provably reliable である．この意味での位相優先法[3]は，Voronoi 図の作成，凸多面体と平面の交差問題などの比較的単純な問題に応用され成果を得ているが，凹多面体を含む形状どうしの集合演算等の広い問題には適用されておらず，適用は困難なようである[4]．

現状の多くの幾何アルゴリズムは，数値計算の結果に十分な信頼性がおける場合は許容誤差を利用し，信頼性のおけない場合には（経験等に基づく）位相優先に基づいているのが現状であろう．この考えに基づくモデラは，probably reliable ではあるが provably reliable ではない．

3.　正確な演算とは

正確な演算とは，表現された数値を，数学における数値計算の理論（整数演算，実数演算等）に厳密かつ完全に合致して計算を行うことをいう．もっとも，コンピュータでは，メモリに限界があるから，正確な演算を行うには，表現されうる数値に限界が存在しているということが前提となる．

正確な演算といっても，式の値を常に誤差なく厳密に計算する必要はない．位相情報を伴う幾何アルゴリズムでは，式の値の正負によって，位相情報の変更を行う．従って，式の正負を高速に計算する手法（例えば，[5]）を装備することによって，処理の大幅な効率化を実現することができる．

Geometric Algorithms using Exact Computation: Current Statuas and Future problems
Norimasa YOSHIDA, Hisashi TSUGANE, Jun DOI, Junhyuk KIM, Toshiya YAMAUCHI, Fujio YAMAGUCHI
(Waseda university, 3-4-1 Ohkubo, Shinjuku-ku, Tokyo, 169)

正確な演算を利用する最大の特長は，浮動小数点演算を用いた場合のように理論やアルゴリズムを複雑化させることなく，provably reliable なアルゴリズムを，作成することができるということである．

4． 多面体ソリッドモデルの集合演算

多倍長整数演算などの正確な演算を利用して多面体ソリッドモデルの集合演算を行う手法は，いくつか提案されている．Fortune[7]は，半空間で構成される立体の集合演算を，浮動小数点演算による“フィルター”を利用するとともに，数値のデータ長を最小にするようなアルゴリズムの設計を行うことによって，高速に集合演算を行うアルゴリズムを提案している．Fortune のシステムでは，記号的摂動法(Symbolic perturbation)を用いることによって，アルゴリズムの単純化も実現している．

著者らは，基本立体の無矛盾性を定義し，アフィン変換によって無矛盾性を保持することによって集合演算を行う手法を提案した[8]．幾何計算には，同次処理[6]に基づく整数演算を利用している．図1に，2つのトーラスを原点を中心におき，一方を x, y, z の各軸に関して，10^{-6} 度づつ回転させ，差集合をとった図を示す．

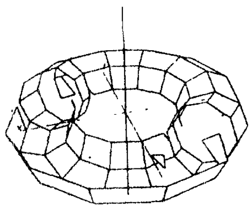

図1　トーラスどうしの差集合

5． 数値のデータ長の増加問題

ソリッドモデラでは，ソリッドに自由に座標変換や集合演算を施すことができることが好ましいであろう．しかし，正確な演算を用いたアルゴリズムでは，データ長の増加を抑制する必要性から，座標変換に関して制約が必要となる．

座標変換後の形状どうしの集合演算を行う場合にデータ長を短くするためには，集合演算を最初から繰り返す必要がある[8]．この問題に対し，数値データの最大公約数による除算及び集合演算の局所化によって制約の解除を検討していく．

6． 曲線・曲面の干渉処理

実際のシステムでは，曲線・曲面を含む形状を取り扱う必要があるが，現在のところ，曲線・曲面を含む形状に正確な演算を利用した例はあまりないようである．

Yap らは，四則演算および平方根によって表現される数値どうしの大小比較を行う手法を考案し[9]，そのパッケージを提供している．このパッケージは，式の値の評価に重点がおかれており，高速化は図られていない．今後，このパッケージを処理の高速化を含めて，同次処理の立場から基本的な干渉問題に応用し，性能を評価していく．

7． まとめ

正確な演算を用いてアルゴリズムの完全な信頼性を実現する手法は，Voronoi 図の作成などの２次元の問題や，多面体ソリッドモデルの集合演算に関しては，成功してきている．しかし，多面体ソリッドモデルにおいて自由に座標変換を行うことができたり，曲線・曲面形状を取り扱えるものは存在していないようである．今後，これらに関する研究を進めていく予定である．

参考文献

[1] A.R.Forrest: “Computational Geometry in Practice,” Fundatamental Algorithms for Computer Graphics, Vol.F17, 1985, pp.707-724.
[2] M. Segal: “Using Tolerances to Guarantee Valid Polyhedral Modeling results,” Computer Graphics, Vol.24, No.4, Aug. 1990.
[3] 杉原厚吉: "計算幾何工学", 培風館, 1994.
[4] A.Agrawal, et al.: “A Paradigm for the Robust Design of Algorithms for Geometric Modeling,” Computer Graphics Forum, Vol.13, 1994, pp.33-44.
[5] 花蜜，吉田，楼，鈴木，山口: “浮動小数点演算ユニットを利用した適応的符号判定処理”, 精密工学会誌, Vol.63, No.5, 1997, pp. 657-663.
[6] 山口富士夫: “４次元理論による図形・形状処理工学”, 日刊工業, 1996.
[7] S. Fortune: “Polyhedral modelling with exact arithmetic,” ACM Symp. Solid Modeling, 1995.
[8] N.Yoshida, et al: “Solid Modeling Based on a New Paradigm,” Computer Graphics Forum, Vol.13, No.3, 1994, pp.55-64.
[9] C.Yap: “Toward exact geometric computation,” Proc. 5th Canadian Conf. on Computational Geometry, pp.405, 1993.