完全４次元同次処理に基づく形状モデリング

6AD－1

早大理工　山口　富士夫

1.　まえがき

信頼性のあるCADシステムを構築するために，「完全４次元同次処理」と言う，形状モデリングの新しい枠組みを提案する．

2.　CADシステムの問題点

現在の形状モデリングの技術は，不正確さ，不安定さ，複雑さの点に基本的な弱点があり，信頼性の欠如という致命的問題を惹き起こす．ユークリッド処理では，この根本原因である除算が付随するからであり，ユークリッド処理に基づく限り，これらの問題を根本的に排除することは困難である．

3.　完全４次元同次処理の概要

３．１　基本的考え方：信頼性に重大な影響を及ぼす除算を完全に排除するために，射影空間に付随する４次元ベクトル空間（以後同次空間と呼ぶ）において，すべての処理を一貫して行う．また同次空間に厳密に成立する双対性を最大限に利用するとともに，すべての処理の，射影変換に対する不変性を目指す．この処理を「完全４次元同次処理」と言う．処理には，同次座標の一般化であるプリュッカー座標，プリュッカー係数を用いる（[1] pp.97-102）．

３．２　幾何要素の定義：単体，フラット，曲線，曲面は，同次空間のベクトルによる演算により，射影空間の図形として定義される．ここにおいて，射影空間の点によって，射影空間の図形を定義していないことに注意されたい．これらの同次幾何要素はすべて，曲線，曲面を含め，非有理な形式で定義される．

３．３　位相の定義：図形の位相は，双対なデータ構造により定義される．

３．４　幾何演算：射影空間上で定義された図形は，同値関係が解除され，同次空間において１次元高次の線形部分空間として，除算を用いず演算，処理される．必要な場合には,多倍長整数演算により,厳密な無誤差演算が行われる．

３．５　位相操作：双対なオイラーの関係式に基づく，双対なオイラーオペレータにより，双対性を利用した操作が行われる．

4.　ユークリッド処理と同次処理の比較

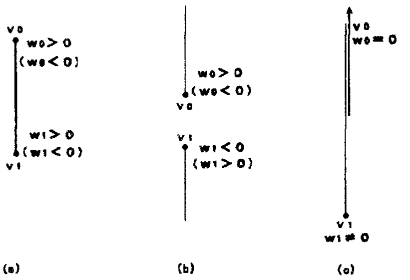
４．１　無誤差演算：ユークリッド処理では，除算は不可避であるので，無誤差演算の実現は困難であるのに対し，同次処理では，除算を用いないので，多倍長整数演算の利用により，必要なら厳密な無誤差演算が可能である．ここで，適応的符号判定処理（[1]pp.388-399）に，浮動小数点演算ユニットを用いることにより，大幅な能率向上を図ることができる[2]．

４．２　多角形に対する点の内外判定：この処理の判定を間違えると，システムに対し致命的な影響を与えることが少なくない．しかしユークリッド処理においては，図形の表現誤差や演算誤差のために内外判定は不安定になることがある．一方同次処理においては，射影変換に不変で，かつ，上記無誤差演算の利用により完全に安定な，プリュッカー座標を利用したアルゴリズムが存在する（[1]pp.377-379）．

４．３　干渉判定：射影変換により，線分は内側線分だけでなく，外側線分，半直線に変化し得る．従って，線分の集合である図形はきわめて複雑な形状に変化し得る．射影変換に不変に幾何要素間の干渉判定を行うには，ユークリッド処理ではきわめて複雑になる．例えば線分と３角形の立体交差判定の場合，１５個のプログラムを用意する必要がある．一方同次処理では次の簡単な判定で済む（pp.350-351）．

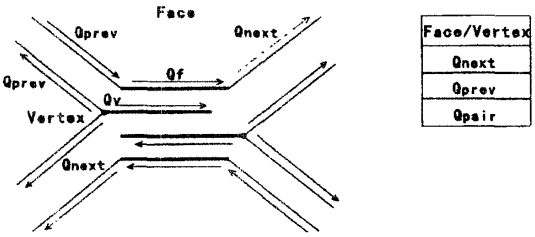
Geometric Modeling Based on Totally Four-dimensional Homogeneous Processing,
Fujio YAMAGUCHI, School of Science and Eng., Waseda University, 3-4-1, Ohkubo, Shinjuku, Tokyo 169 Japan

$$
\begin{aligned}
&((S_{a012}, S_{b012}) \neq (0,0)) \\
&\wedge ((S_{ab12}, S_{ab20}, S_{ab01} \geqq 0) \vee (S_{ab12}, S_{ab20}, S_{ab01} \leqq 0)) \\
&\wedge ((S_{a012} \geqq 0 \wedge S_{b012} \leqq 0) \vee (S_{a012} \leqq 0 \wedge S_{b012} \geqq 0)).
\end{aligned}
\tag{1}
$$



(a):内側線分　(b):外側線分　(c):半直線

4．4　双対処理：完全に双対な処理を実現するために，図形は，点と面分に関して双対な，クォータエッジデータ構造により表現される．



「完全４次元同次処理」においては，幾何要素の定義，位相の定義，幾何演算，位相操作にわたって双対性が実現されている．従って，一つのプログラムを，双対な二つの目的のために用いることができ，システム全体が双対性のもとに体系化される．

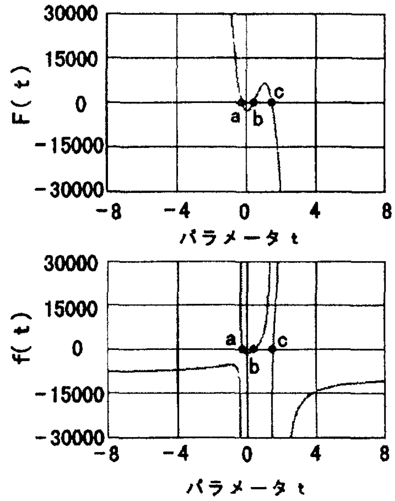
4．5　幾何的ニュートン法：有理曲線，曲面に対し幾何的ニュートン法を適用すると，初期値の値の選び方によって，しばしばパラメータの発散という致命的な問題が発生する([1]pp.433-447)．ユークリッド処理と同次処理のδｔは，それぞれ

$$\delta t = -\frac{f(t)}{f'(t)}, \quad (2) \qquad \delta t = -\frac{F(t)}{F'(t)}. \quad (3)$$

（ユークリッド処理）　　（同次処理）

ここに，ｆ（ｔ）は有理多項式，Ｆ（ｔ）は通常多項式である．

同次処理の場合，通常曲線処理の場合と同じ程度に安定である．



等価代数関数 Ｆ（t）とｆ（t）

4．6　有理曲線・有理曲面：ユークリッド処理において，有理曲線，曲面は，

(1)　幾何的ニュートン法が不安定になり易い，

(2)　一般には凸包性を利用できない，

(3)　導関数の算出等の公式が一般に複雑である，

(4)　線分近似は単純には行えない，

(5)　漸近線の発生により処理が複雑になる，

等様々な問題がある．一方同次空間で定義される同次曲線，例えば同次化ＮＵＲＢＳ[4]には,上述の問題点は存在せず,かつＮＵＲＢＳの持つ，

(1)'　円錐曲線の厳密な表現が可能，

(2)'　各種曲線の統一表現が可能，などの利点を保存している．更に同次化ＮＵＲＢＳは，係数の整数化が可能で，必要なら，

(1)"　曲線上の点の無誤差算出も可能である[4]．

5．あとがき：様々なアプリケーションを通して，ユークリッド処理に対する「完全４次元同次処理」の優越性を示した．尚，原稿中，射影空間とは，古典的射影空間と２重空間([1]pp.55-95)とを意味するものとする．

参考文献

[1]山口富士夫:4 次元理論による図形・形状処理工学,日刊工業新聞社,1996 年 9 月．

[2]花蜜宏晃,吉田典正,楼林,鈴木重行,山口富士夫:浮動小数点演算ﾕﾆｯﾄを利用した適応的符号判定処理,精密工学会誌,Vol.63, No.4,1997.

[3]津金尚志,吉田典正,井口浩伸,北原雅文,土井淳,楼林,山口富士夫:ｸｫｰﾀｴｯｼﾞﾃﾞｰﾀ構造への稜線ﾙｰﾌﾟの導入,平成 8 年度精密工学会春季大会講演論文集,1997 年 3 月．

[4]藤原竹雄,五十嵐達也,服部岳士,岩田茂人,梶間博行,山口富士夫:同次化NURBS 及びその応用ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ,平成 8 年度精密工学会春季大会講演論文集,1997 年 3 月．