曲面間相貫線計算のための接触点計算誤差見積り方式

1AD－7

仁尾都　日立製作所
徳増真司　神奈川工大
原島一郎　日立製作所
越智　利夫　明星大学
松本輝夫　(株)日立情報ネットワーク

1．はじめに

3次元形状設計CAD／CAMシステムでは，2つの曲面間の共通部分集合である相貫線を求めるための相貫線計算が不可欠である．一般の相貫線計算では，一方の曲面のn次パラメトリック境界曲線L（t）と他方の曲面の双n次パラメトリック曲面S（u,v）との交点を求めるに際し、ニュートン法が多く用いられ、その第i段階における収束点を　L（t_i），S（u_i,v_i）とすれば，交点計算誤差はdis（L（t_i），S（u_i,v_i））と定義されるか，または，Lから曲面Sに下ろした垂点をTとすれば，dis（L（t_i），T）と定義されて収束判定がなされている．しかし，面と面が接触状態にある場合，このような定義方法では近似解は真の接触点Pから遠く離れることになる．3次元CAD／CAMシステムでは，相貫線計算時の精度が図形処理時の論理矛盾を引き起こす原因の1つであることは従来から知られている．そこで，接触時における相関線計算精度向上を目的とし，曲線L（t）と曲面S（u,v）が多項式である場合、ニュートン法応用接触点計算誤差の計算が簡略に行えることに着目し、誤差計算方式の提案と検証を行う．

2．接触点計算誤差の見積り方式

命題：3次元空間における，n次パラメトリック曲線 $L(t) = \Sigma_{k=0}{}^{n} a_{n-k} t^{n-k}$　$(0 \leqq t \leqq 1)$ と，双3次パラメトリック曲面 $S(u,v) = \Sigma_{k=0}{}^{n} \Sigma_{j=0}{}^{n-k} b_{n-k-j,j}\, u^{n-k-j} v^{j}$ $(0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1)$ との接触点は方程式 $F(t,u,v) = L(t) - S(u,v) = 0$ の解で定義される．この時，L（t）とS（u,v）の間におけるニュートン法による第i段階の解をそれぞれL（t_i），S（u_i,v_i）とし，真の接触点をPとすれば下記に定義される接触点計算誤差Eに関し次式が近似的に成り立つ。

$$E = \max(dis(P, L(t_i)), dis(P, S(u_i,v_i))) =$$
$$(k+1)^k \max(dis(L(t_{i+1}), L(t_i)), dis(S(u_{i+1},v_{i+1}), S(u_i,v_i)))$$

ただし、（1）t_i, u_i, v_i がそれぞれ単調に，$t_\infty, u_\infty, v_\infty$ に収束．（2）L（t_i），S（u_i,v_i）のr階偏微分（$k > r \geqq 1$）が，すべて $t_\infty, u_\infty, v_\infty$ において0．（3）L（t_i），S（u_i,v_i）のk階偏微分（$k \geqq 1$）の少なくとも1つが0ではない．（4）iが充分大きい．

証明：F（t,u,v）に関する t,u,v のk階偏微分（$k \geqq 1$）がそれぞれ収束点で0であるとき，ニュートン法による第i段階の t,u,v の値を t_i, u_i, v_i とすれば，iが充分大きく，かつ t_i, u_i, v_i が $t_\infty, u_\infty, v_\infty$ に単調に収束しているときは，　$t_\infty = t_i + m\,dt$、$u_\infty = u_i + m\,du$、$v_\infty = v_i + m\,dv$　が近似的に成り立つことが知られている[1)]．ただし，$m = k+1$、$dt = t_{i+1} - t_i$，$du = u_{i+1} - u_i$，$dv = v_{i+1} - v_i$ である．そこで，条件（2），（3）であること，$i \to \infty$ の時，$dt \to 0$，$t_i \to t_\infty$ であることから，$(dt)^j$ $(j \geqq k+1)$ の項を無視し，$(dt)^k$ だけの項に着目すれば下記の近似ができる。

$$dis(L(t_\infty), L(t_i)) = (K+1)^K dis(L(t_{i+1}), L(t_i))$$

なお、ここでは、条件（2），（3）はL（t_i），S（u_i,v_i）の共有する接平面をx－y平面になるよう

Error estimates for caluculation error of tanqencial　points of curve on surface

Misato Nio(Home Systems Department,Systems Engineering Division, Hitachi Ltd.:4-6 Kanda-Surugadai,Chiyoda-ku,Tokyou,101,Japan), Shinji Tokumasu, Ichiro Harashima,Toshio Ochi, Teruo Matsumoto

に座標変換した曲線 L’（t）に対しても、条件（2），（3）成り立つことを利用している。同様に,

$dis(S(u_\infty, v_\infty), S(u_i, v_i)) = (k+1)^k dis(S(u_{i+1}, v_{i+1}), S(u_i, v_i))$

したがって,

$E = max(dis(L(t_\infty), L(t_i)), dis(S(u_\infty, v_\infty), S(u_i, v_i))) =$

$(k+1)^k max(dis(L(t_{i+1}), L(t_i)), dis(S(u_{i+1}, v_{i+1}), S(u_i, v_i)))$

3． 誤差評価方式の検証

ｎ＝３とした場合の接触点計算例によって検証する．このケースでは,曲線,曲面を３次Ｂｅｚｉｅｒ曲線,双３次Ｂｅｚｉｅｒ曲面とし,（x,y,z）＝（５０,５０,0）の点で,曲線と曲面が接触するように,それぞれの制御点を設定することにより,多項式の各項の係数の決定をした（表）．この場合ではｋは１となるので、Ｌ（t）側の近似交点Ｌ（t_i）の真の交点までの距離は$2 \times dis(L(t_{i+1}), L(t_i))$より小さいことになる．計算機を利用した実際の交点計算結果を表に示すが、結果は提案を検証している。

表　曲線側の近似交点Ｌ（ｔｉ）の誤差予測と真値との比較

i	真の誤差値（上段）と誤差予測値（下段）
1	0．53940847 0．53942183
2	0．26969476 0．26969643
3	0．13484619 0．13484640
4	0．067422951 0．067422978
5	0．033711456 0．033711461
8	0．0042139381 0．0042139150
11	0．00052677975 0．00052675965
14	0．000066188673 0．000063743386
17	0．0000048668782 0．0000000000039

	制御点	x座標	y座標	z座標
曲線L	p1	0．0	0．0	0．0
	p2	0．0	50．0	0．1
	p3	100．0	50．0	0．1
	p4	100．0	100．0	0．0
曲面S	p11	0．0	0．0	0．0
	p12	0．0	0．0	0．1
	p13	100．0	0．0	0．1
	p14	100．0	0．0	0．0
	p21	0．0	30．0	0．0
	p22	0．0	30．0	0．1
	p23	100．0	30．0	0．1
	p24	100．0	30．0	0．0
	p31	0．0	70．0	0．0
	p32	0．0	70．0	0．1
	p33	100．0	70．0	0．1
	p34	100．0	70．0	0．0
	p41	0．0	100．0	0．0
	p42	0．0	100．0	0．1
	p43	100．0	100．0	0．1
	p44	100．0	100．0	0．0

4． おわりに

２曲面間の相貫線の高精度計算を目的として,ｎ次パラメトリック曲線 Ｌ（t）,双ｎ次パラメトリック曲面Ｓ（u, v）間に接触点がある場合、その点をニュートン法で計算する場合の計算誤差評価の方式を提案し,実際のテストケースに適用して,本方式の正しいことを確認した．

参考文献

1）伊理：数値計算の常識,ｐｐ５９－ｐｐ６７,共立出版,（１９８５）．