

## 傾斜スプラインによる曲率変化の滑らかな曲線の生成

1AD-3

東京電機大学 ○伊勢史章 渡辺由美子 斉藤 剛

## 1 はじめに

近年、自動車などの工業製品の外形には、高品位で意匠性のある曲面、特に、周辺の景観の写り込み映像に歪みが生じない曲面が要求されている。このような曲面の設計・製造には、CADシステムが必要不可欠なものとなっている。

写り込み映像の質は、その曲面の面法線分布状況に大きく依存し、曲率変化が滑らかな曲面ほど、映像の歪みは少ない。このような曲面を幾何モデルとして構成するためには、曲面構成に必要な「基本曲線」の曲率を滑らかにする必要がある。

一方、デザイナーは、設計対象となる曲面の基本曲線を、曲率の変化が単調となるように分割し、各部分を曲率の変化具合が微妙に違っている数十種類の「スプライン定規」を使い分け描いている。

本研究では、高品位曲面創成に必要な基本曲線を生成することを目的として、曲率が単調に変化するような曲線を計算機内に構成することを行う。本報告では、幅が路長と共に変化するスプライン（傾斜スプラインと呼ぶ）のモデルを用いて、接続を考慮したモデルを新たに提案する。さらに、曲線生成に必要な非線形連立方程式の解法として汎用数式処理システムである Mathematica を利用し、モデルの検証例として生成曲線例を示す。

## 2 幾何拘束条件

「基本曲線」を描く上で必要となる拘束条件は、接続点となる端点の位置  $P_1, P_2$ 、両端点での接線方向  $\alpha, \beta$  と、曲率半径  $\rho_1, \rho_2$  である。

この拘束条件を満たし、曲率の変化が滑らかな曲線の生成法について述べる。

## 3 傾斜スプラインモデル

本手法による傾斜スプラインのモデルを図1に示す。

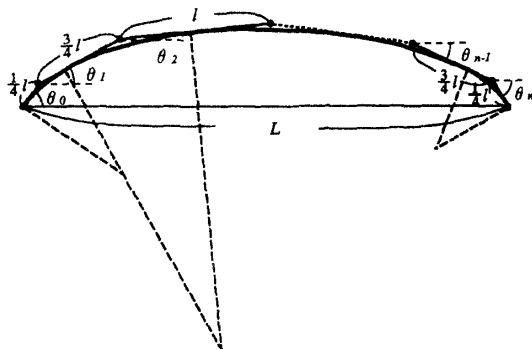


図1 傾斜スプラインモデル

このモデルは、傾斜スプラインを長さ  $l$  の小片で近似し、曲線を  $n+1$  本の多辺形でモデル化したものである。各小片と  $x$  軸とのなす角度を、 $\theta_i$  とする。形成される曲線は、この多辺形に内接する円弧とする。そこで、傾斜スプライン曲線は、円弧列に蓄えられる弾性エネルギーが最小となるので、

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{l_i \cdot (\theta_{i-1} - \theta_i)}{r_i} \cdot m_i, \quad (1)$$

$$r_0 = \rho_0, r_n = \rho_1$$

が最小の曲線となる。ここで、 $m_i$  は、線分の距離と曲がり角度に対応した係数である。

この係数を、線分距離に沿って変えることにより、傾斜スプラインの形状、すなわち、路長に対する幅の変化具合を変えることができる。

一方、始点終点に関しての拘束として、

$$g_1 = \sum_{i=0}^n l_i \cos \theta_i - L,$$

$$g_2 = \sum_{i=0}^n l_i \sin \theta_i \quad (2)$$

がある。

この条件下で、式(1)で定義された  $E$  が最小となるように、 $l_i$  および  $\theta_i$  を変分法により求める。

補助変数  $\lambda_1, \lambda_2$  を用いて、

$$F = E + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \quad (3)$$

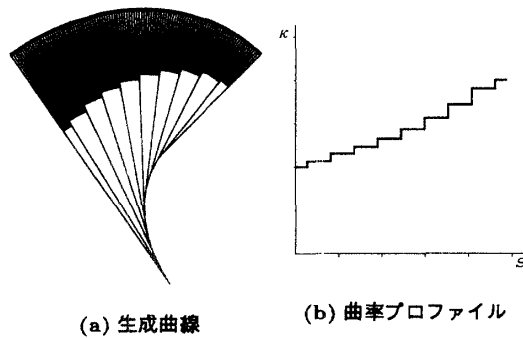


図2：10個の円弧で構成

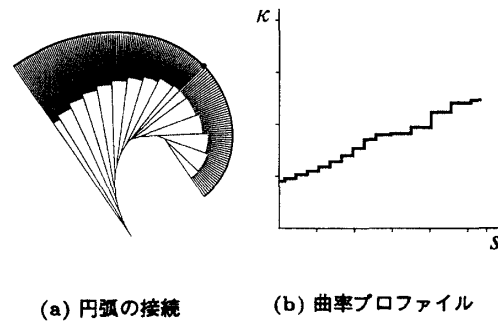


図3：点指定での円弧の接続例

と置き、

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial F}{\partial l}, \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \quad (4)$$

を解けば良いことになる。

#### 4 数式処理システムを用いた解法

前節で傾斜スプラインモデルと、そのモデルより曲線を求める式を示した。しかし、これらを解くためには、非線形の連立方程式を解かなければならない。

今回は、モデルの検証を主目的としたため、これらが、容易に扱える汎用数式処理システムである Mathematica を用いて方程式を解き、その結果を用いて曲線生成を行った。解法は以下の通りである。解くべき変数  $\mathbf{v} = (l, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1})$  に対して、式4で定義される  $n-1$  個の関数が与えられる。これを、 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$  と置く。この時、 $\mathbf{v}$  の第  $k$  次近似  $\mathbf{v}^{(k)}$  から、 $k+1$  次近似  $\mathbf{v}^{(k+1)}$  を、

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (5)$$

として、ニュートン法で求める。ここで、 $\mathbf{J}$  は、ヤコビアン行列である。

#### 5 曲線生成例

生成例を以下に示す。

図2は、 $\theta_0 = 35, \theta_n = 45, \rho_1 = 1, \rho_2 = 2$ 、右端から  $m(0) = 1, m(S) = 2$  とし、曲線を10個の円弧として生成した例である。(b)は、横軸に曲線の路長を取り、そのときの曲率を縦軸に示した曲率プロファイルである。この図からわかるように、曲率変化が単調な基本曲線が生成されていることがわかる。

図3は、通過点を1点とその接線方向を指定し、その点を通り曲率変化が単調な曲線の生成例である。

左側の単位曲線は、 $\theta_0 = 35, \theta_n = 45, \rho_1 = 0.9$  とし、曲線を10個の円弧にて生成した。次いで、右側の単位曲線は、 $\theta_0 = 45, \theta_n = 55, \rho_2 = 2.8$  とし、曲線を6個の円弧で生成したものである。中間点での曲率は、曲線全体のエネルギーが最小となるように決定する。また、両曲線ともに右端から  $m(0) = 1, m(S) = 2$  とした。図から両曲線の接続は、滑らかであることがわかる。

#### 6 おわりに

本報告では、新たな傾斜スプラインモデルを定義し、数式処理システムを用いて、このモデルより目的となる曲線を求めた。生成した曲線は曲率が単調に変化し、条件を満たしている。さらに、数式処理システムを用いたことで、計算機上でのモデル構成、検証が容易に行えた。今後は、目的とする曲率パターンと重み、実際にスプライン幅との関係を明確にして行きたい。

#### 参考文献

- 1) 渡辺, 斉藤, 東:「傾斜スプラインを用いた曲率変化の滑らかな曲線の構成方法」平成7年情報処理学会全国大会
- 2) 黒田, 斉藤, 渡辺, 東:「数式処理システムによるクロノイドスプライン補間曲線」精密工学会誌, 1996.12
- 3) 黒田, 東, 斉藤, 渡辺:「曲率が弧長の区分2次関数となるG<sup>3</sup>補間曲線」情報処理学会論文誌, 1997.3
- 4) 穂坂, 佐田:「統合化CAD/CAMシステム」オーム社, 1994